2 Lineárne spojité systémy s konštantnými koeficientami s jedným vstupom a jedným výstupom - prenosové funkcie

2.1 Ciele cvičenia

- popísať dynamický systém n-tého rádu v tvare lineárnej diferenciálnej rovnice (LDR),
- definovať prenos dynamického systému a zapísať ho vo všeobecnom tvare pre systém n-tého rádu,
- odvodiť prenos z lineárnej diferenciálnej rovnice n-tého rádu,
- odvodiť lineárnu diferenciálnu rovnicu z prenosu n-tého rádu,
- algebra prenosových funkcií (sériové, paralelné zapojenie)

2.2 Vytvorenie prenosovej funkcie z LDR

Lineárny spojitý systém s konštantnými koeficientami a_i, b_i s jedným vstupom $u(t)$ a jedným výstupom $y(t)$ môže byť v časovej oblasti opísaný v tvare lineárnej diferenciálnej rovnice

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 u(t). \tag{2.1}$$

Predpokladáme, že rovnica (2.1) má nulové počiatočné podmienky. Dynamický systém môže byť opísaný v tvare prenosu $G(s)$ v s-oblasti Ak vykonáme Laplaceovú transformáciu ($\mathcal{L}$) rovnice (2.1) dostaneme

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \cdots + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \cdots + b_0 U(s) \tag{2.2}$$

Po úprave je možné vyjadriť prenos systému $G(s)$ ako

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{2.3}$$

kde $B(s)$ je polynóm čitateľa, $A(s)$ je polynóm menovateľa,
m je rád čitateľa, n je rád menovateľa,

$G(s)$ sa nazýva **prenosová funkcia**, (skrátene prenos) **systému**. Prenos systému je definovaný ako pomer Laplaceových obrazov výstupnej a vstupnej veličiny pri nulových počiatočných podmienkach.

Aby bol prenos $G(s)$ fyzikálne realizovateľný, musí platiť $n \geq m$.

2.3 Vytvorenie LDR z prenosu

Predpokladáme, že prenos (2.3) popisuje dynamický systém definovaný pri nulových počiatočných podmienkach. Najprv prenos (2.3) prepíšeme ako algebrickú rovnicu v tvare

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) U(s) \tag{2.4}$$

a následne upravíme na tvar

$$\begin{aligned} a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \cdots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) \\ = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \cdots + b_1 s U(s) + b_0 U(s) \end{aligned} \tag{2.5}$$

na ktorý je možné aplikovať spätnú Laplaceovú transformáciu ($\mathcal{L}^{-1}$)

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)} y(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\ = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 u'(t) + b_0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

pri nulových počiatočných podmienkach.

2.4 Riešené príklady

Vytvorenie prenosu z LDR

Zadanie: Nájdite prenos dynamického systému, ktorý je popísaný diferenciálnou rovnicou

$$y'''(t) + 4.5y''(t) + 5y'(t) + 1.5y(t) = u'(t) + 4u(t), \tag{2.7}$$

s nulovými počiatočnými podmienkami $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$, $u'(0) = u(0) = 0$.

Riešenie: Vykonáme Laplaceovú transformáciu pri nulových počiatočných podmienkach a v algebraickej rovnici osamostatníme $Y(s)$ a $U(s)$

$$s^3Y(s) + 4.5s^2Y(s) + 5sY(s) + 1.5Y(s) = sU(s) + 4U(s), \tag{2.8}$$

$$(s^3 + 4.5s^2 + 5s + 1.5)Y(s) = (s + 4)U(s), \tag{2.9}$$

a následne vyjadríme prenos $G(s)$ ako

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+4}{s^3 + 4.5s^2 + 5s + 1.5} \tag{2.10}$$

Vytvorenie LDR z prenosu

Zadanie: Nájdite lineárnu diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje dynamický systém, ak jeho prenos má tvar

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2+1}{s^3 + 4s^2 + 3.25s + 0.75}. \tag{2.11}$$

Riešenie: Prenos prepíšeme ako algebrickú rovnicu

$$(s^3 + 4s^2 + 3.25s + 0.75)Y(s) = (2s^2 + 1)U(s) \tag{2.12}$$

a prepíšeme do tvaru, na ktorý je možné aplikovať spätnú Laplaceovú transformáciu

$$s^3Y(s) + 4s^2Y(s) + 3.25sY(s) + 0.75Y(s) = 2s^2U(s) + U(s) \tag{2.13}$$

a po transformácii pre nulové počiatočné podmienky dostávame

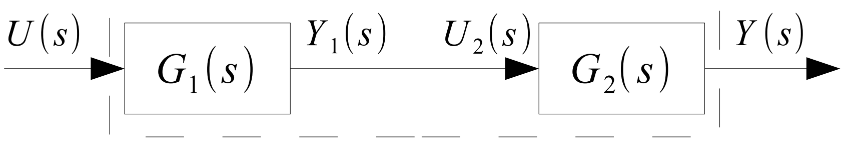
$$y'''(t) + 4y''(t) + 3.25y'(t) + 0.75y(t) = 2u''(t) + u(t), \tag{2.14}$$

respektíve

$$\frac{d^3y(t)}{dt} + 4\frac{d^2y(t)}{dt} + 3.25\frac{dy(t)}{dt} + 0.75y(t) = 2\frac{d^2u(t)}{dt} + u(t). \tag{2.15}$$

2.5 Sériové a paralelné zapojenie prenosov

Sériové zapojenie



Pre jednotlivé prenosy platí:

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)}$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{U_2(s)}$$

Vyjadrením výstupnej veličiny $Y(s)$ v tvare:

$$Y(s) = G_2(s)U_2(s),$$

kde $U_2(s) = Y_1(s)$. Výstupnú veličinu môžeme potom vyjadriť nasledovne:

$$Y(s) = G_2(s)Y_1(s) \tag{2.16}$$

Pre $Y_1(s)$ platí:

$$Y_1(s) = G_1(s)U(s) \tag{2.17}$$

a dosadením vyjadrenia (2.17) do (2.16) získame:

$$Y(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$$

Celkový prenos je rovný súčinu jednotlivých sériovo zapojených prenosov:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)G_2(s) \tag{2.18}$$

Príklad: Je zadaný lineárny dynamický systém s prenosovou funkciou v tvare:

$$G_1(s) = \frac{5}{s+1}$$

a súčasne je zadaný druhý lineárny dynamický systém s prenosovou funkciou v tvare:

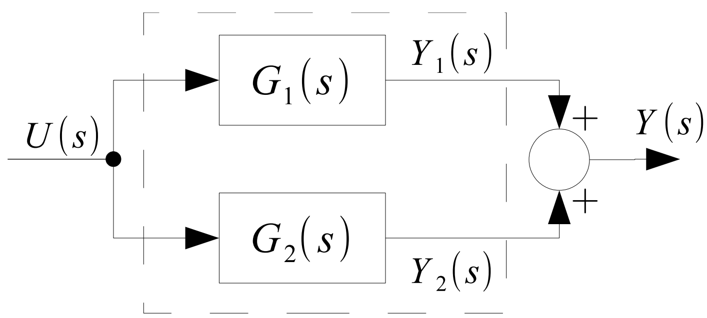
$$G_2(s) = \frac{4}{s+2}$$

Odvoďte celkový prenos dvoch sériovo zapojených lineárnych dynamických systémov.

Riešenie: Celkový prenos $G(s)$ získame súčinom $G_1(s)$ a $G_2(s)$:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{5}{s+1} \cdot \frac{4}{s+2} = \frac{20}{s^2+3s+2}$$

Paralelné zapojenie



Pre jednotlivé prenosy platí:

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)}$$

$$G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)}$$

Vyjadrením výstupnej veličiny $Y(s)$ v tvare:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) \tag{2.19}$$

kde platí:

$$Y_1(s) = G_1(s)U(s) \tag{2.20}$$

$$Y_2(s) = G_2(s)U(s) \tag{2.21}$$

Dosadením vyjadrenia (2.20) a (2.21) do (2.19) získame vyjadrenie $Y(s)$ v tvare:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s) = (G_1(s) + G_2(s))U(s)$$

Celkový prenos je rovný súčinu jednotlivých sériovo zapojených prenosov:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s) \tag{2.22}$$

Zadanie: Je zadaný lineárny dynamický systém s prenosovou funkciou v tvare:

$$G_1(s) = \frac{5}{s+1}$$

a súčasne je zadaný druhý lineárny dynamický systém s prenosovou funkciou v tvare:

$$G_2(s) = \frac{4}{s+2}$$

Odvoďte celkový prenos dvoch paralelne zapojených lineárnych dynamických systémov.

Riešenie: Celkový prenos $G(s)$ získame súčtom $G_1(s)$ a $G_2(s)$:

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{5}{s+1} + \frac{4}{s+2} =$$

$$= \frac{5(s+2) + 4(s+1)}{s^2+3s+2} = \frac{(5s+10)+(4s+4)}{s^2+3s+2} = \frac{9s+14}{s^2+3s+2}$$

Zadanie: Je zadaný lineárny dynamický systém s prenosovou funkciou v tvare:

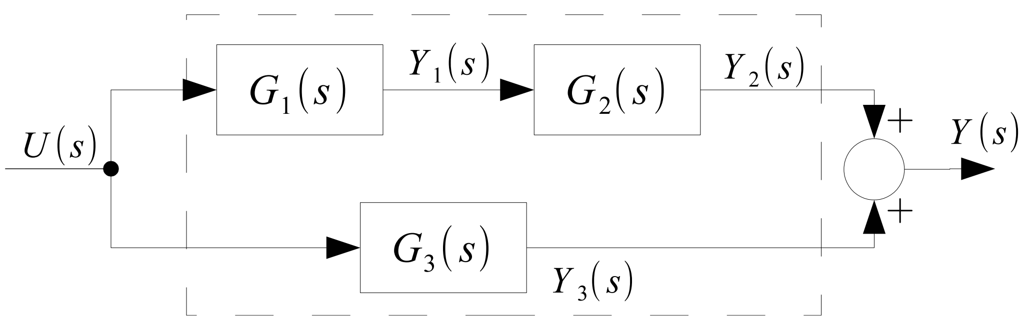
$$G_1(s) = \frac{1}{s+1},$$

súčasne je zadaný druhý lineárny dynamický systém s prenosovou funkciou v tvare:

$$G_2(s) = \frac{1}{s+2}$$

a tretí lineárny dynamický systém s prenosovou funkciou v tvare:

$$G_3(s) = \frac{1}{2s}$$



Odvoďte celkový prenos lineárnych dynamických systémov, ktorých zapojenie je znázornené na obrázku.

Riešenie: Pre odvodenie celkového prenosu $G(s)$ si najprv určíme čiastkový prenos $G_{12}(s)$, ktorý získame súčinom prenosov $G_1(s)$ a $G_2(s)$, pretože sú v sériovom zapojení. Prenos $F_{12}(s)$ vypočítame nasledovne:

$$G_{12}(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{1}{s^2+3s+2}$$

Celkový prenos $G(s)$ získame zo súčtu prenosov $G_{12}(s)$ a $G_3(s)$, ktoré sú v paralelnom zapojení. Výsledný celkový prenos vypočítame nasledovne:

$$G(s) = G_{12}(s) + G_3(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} + \frac{1}{2s} = \frac{2s + (s^2+3s+2)}{2s(s^2+3s+2)} = \frac{s^2+5s+2}{2s^3+6s^2+4s}$$

2.6 Príklady na samostatné riešenie

Zadanie 1: Je zadaná vstupno-výstupná lineárna diferenciálna rovnica

$$y'''(t) - 1.5y''(t) - 4y'(t) - 1.5y(t) = 2u''(t) + 3u(t), \tag{2.23}$$

s nulovými počiatočnými podmienkami $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$, $u'(0) = u(0) = 0$. Vyjadrite lineárnu diferenciálnu rovnicu ako prenos.

Zadanie 2: Je zadaná vstupno-výstupná lineárna diferenciálna rovnica

$$y'''(t) - 0.75y'(t) + 0.25y(t) = u'(t) + 5u(t), \tag{2.24}$$

s nulovými počiatočnými podmienkami $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$, $u'(0) = u(0) = 0$. Vyjadrite lineárnu diferenciálnu rovnicu ako prenos.

Zadanie 3: Je zadaný prenos v tvare

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4s^3 + 1}{s^4 - 6.5s^3 + 3.5s^2 + 18.5s + 7.5}. \tag{2.25}$$

Vyjadrite ho v tvare vstupno-výstupnej lineárnej diferenciálnej rovnice pre nulové počiatočné podmienky.

Zadanie 4: Je zadaný prenos v tvare

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 5s + 2}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 9s}. \tag{2.26}$$

Vyjadrite ho v tvare vstupno-výstupnej lineárnej diferenciálnej rovnice pre nulové počiatočné podmienky.