10 Overenie stability systémov pomocou algebraických kritérií

10.1 Ciele cvičenia

- Určenie kritického parametra regulátora zvolenej štruktúry pomocou Hurwitzovho kritéria
- Vyšetrenie stability uzavretého regulačného obvodu pomocou Hurwitzovho kritéria - ak $w(t) = 1(t)$
- Vyšetrenie stability uzavretého regulačného obvodu pomocou Hurwitzovho kritéria - ak $z(t) = 1(t)$

10.2 Riešené príklady

Zadanie: Vyšetrite stabilitu regulačného obvodu, ktorého charakteristická rovnica má tvar:

$$s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 5s + 2 = 0 \tag{10.1}$$

Riešenie:

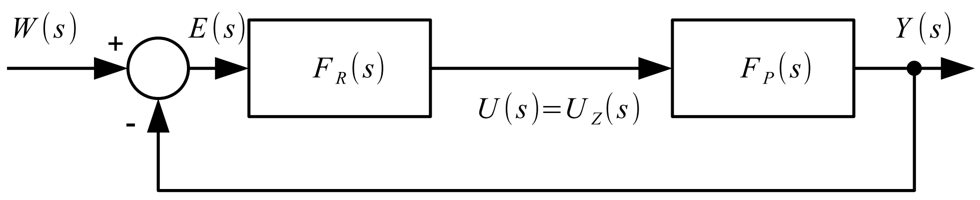
$$\begin{gathered}
\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = 12 - 5 = 7 > 0 \\
\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 \cdot 5 = 60 - 18 - 25 = 17 > 0
\end{gathered} \tag{10.2}$$

Regulačný obvod je stabilný.

Zadanie: Uvažujme dynamický systém (n=3), ktorého prenos je:

$$F_P(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \tag{10.3}$$

Pre P-regulátor zadaný prenosom $F_R(s) = r_0$ nájdite $r_0 = K_{KRIT}$ tak, aby uzavretý regulačný obvod bol na hranici stability ak na vstup URO privedieme riadiacu veličinu $w(t) = 1(t)$.



Riešenie: Použijeme Hurwitzovo kritérium stability, charakteristická rovnica uzavretého regulačného obvodu je

$$1 + F_s(s)F_R(s) = 0 \tag{10.4}$$

$$1 + \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \cdot K_{KRIT} = 0 \Rightarrow \overbrace{\underbrace{1}_{a_3} s^3 + \underbrace{3}_{a_2} s^2 + \underbrace{3}_{a_1} s + \underbrace{1 + K_{KRIT}}_{a_0} = 0}^{\text{Charakteristická rovnica}} \tag{10.5}$$

Zostavíme Hurwitzov determinant z koeficientov charakteristickej rovnice:

$$H_n = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1+K_{KRIT} & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1+K_{KRIT} \end{vmatrix} \tag{10.6}$$

$$H_1 = 3 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1+K_{KRIT} \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - (1+K_{KRIT}) \tag{10.7}$$

Pri Hurwitzovom kritériu je hlavný determinant definovaný ako

$$H_n = a_0 H_{n-1} \tag{10.8}$$

Podľa Hurwitzovho kritéria je obvod na hranici stability ak platí

$$H_n = a_0 H_{n-1} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = 0 \vee H_{n-1} = 0 \tag{10.9}$$

Pre riešený príklad je $a_0 \neq 0$ a z toho vyplýva že $H_{n-1} \stackrel{!}{=} 0$

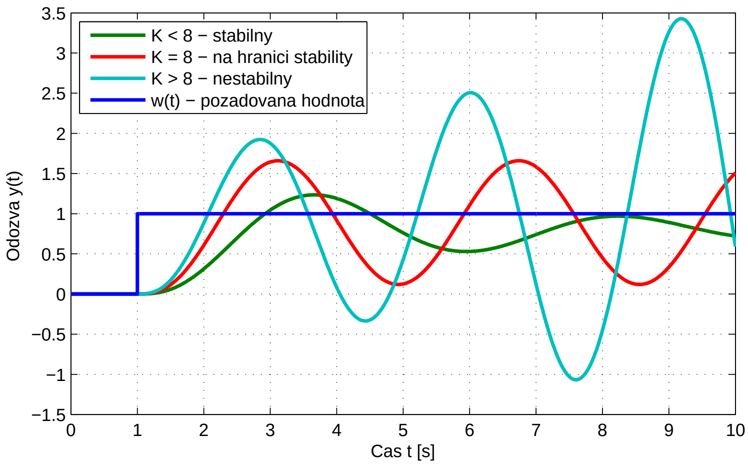
$$H_{n-1} = 0 \rightarrow 9 - (1+K_{KRIT}) = 0 \Rightarrow K_{KRIT} = 8 \tag{10.10}$$

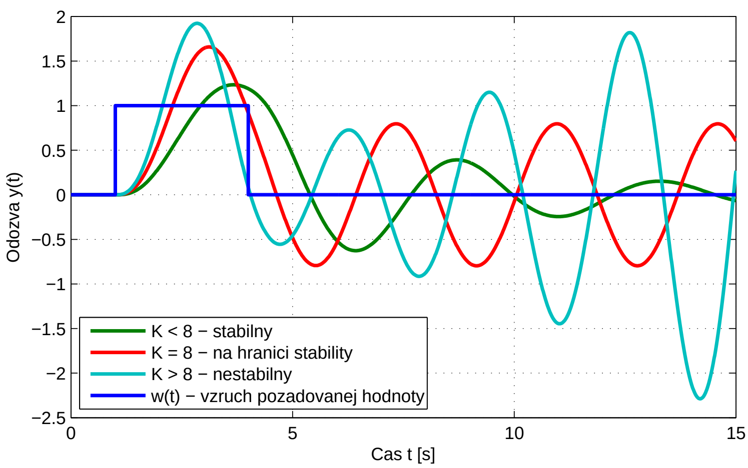
$$F_R(s) = 8 \tag{10.11}$$

Regulačný obvod je na hranici stability pre $K_{KRIT} = 8$.

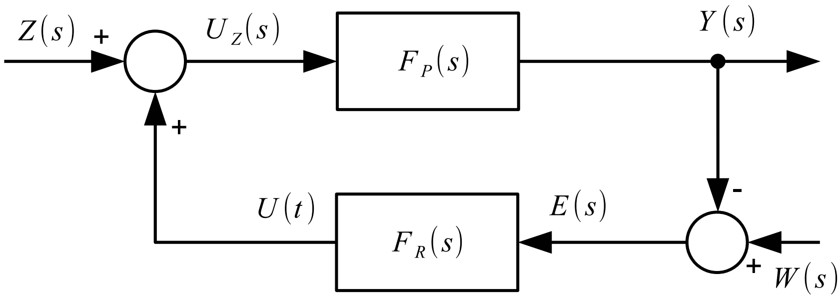
Ak $a_0 \neq 0 \wedge H_{n-1} = 0 \rightarrow$, obvod je na hranici kmitavej stability. (korene ležia na imaginárnej osi).

Ak $\underline{a_0 = 0}$, obvod sa nachádza na hranici aperiodickej stability, t.j. jeden z koreňov charakteristickej rovnice je nulový.





Zadanie: Pomocou Hurwitzovho kritéria vyšetrite stabilitu uzavretého regulačného obvodu podľa obrázku a následne určte kritické zosilnenie P-regulátora, ak na vzruch použijete zmenu poruchového signálu $z(t)$



kde $F_P(s)$ je prenos systému (n=3)

$$F_P(s) = \frac{0.8}{(1+s)(1+0.4s)(1+0.1s)} \tag{10.12}$$

a $F_R(s)$ je prenos P-regulátora.

$$F_R(s) = 10 \tag{10.13}$$

Overenie stability: Prenos uzavretého regulačného obvodu vzhľadom na poruchu je

$$F_{Y/Z}(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{F_P(s)}{1+F_P(s)F_R(s)} = \tag{10.14}$$

$$= \frac{\frac{0.8}{(1+s)(1+0.4s)(1+0.1s)}}{1+\frac{0.8}{(1+s)(1+0.4s)(1+0.1s)}\cdot 10} = \tag{10.15}$$

$$= \frac{0.8}{0.04s^3+0.54s^2+1.5s+9} \tag{10.16}$$

Z menovateľa $F_{Y/Z}(s)$ je možné zostaviť charakteristickú rovnicu

$$\underbrace{0.04}_{a_3}s^3 + \underbrace{0.54}_{a_2}s^2 + \underbrace{1.5}_{a_1}s + \underbrace{9}_{a_0} = 0 \tag{10.17}$$

pričom všetky koeficienty a_i charakteristickej rovnice sú väčšie ako nula.

$$\begin{aligned} H_3 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.54 & 9 & 0 \\ 0.04 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0.54 & 9 \end{vmatrix} \\ H_2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.54 & 9 \\ 0.04 & 1.5 \end{vmatrix} = 0.45 \\ H_3 &= 9H_2 = 4.05 \end{aligned} \tag{10.18}$$

Všetky subdeterminanty $H_2 > 0, H_3 > 0$, preto je obvod stabilný.

Výpočet kritického parametra: Ak $F_R(s) = K_{KRIT}$, prenos poruchy $F_{Y/Z}(s)$ má tvar

$$F_{Y/Z}(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{F_P(s)}{1+F_P(s)\cdot K_{KRIT}} = \tag{10.19}$$

$$= \frac{0.8}{0.04s^3+0.54s^2+1.5s+1+0.8K_{KRIT}} \tag{10.20}$$

Z $F_{Y/Z}(s)$ je možné zostaviť charakteristickú rovnicu

$$\underbrace{0.04}_{a_3} s^3 + \underbrace{0.54}_{a_2} s^2 + \underbrace{1.5}_{a_1} s + \underbrace{1 + 0.8K_{KRIT}}_{a_0} = 0 \tag{10.21}$$

a Hurwitzov determinant je

$$\begin{aligned} H_3 &= \begin{vmatrix} 0.54 & 1+0.8K_{KRIT} & 0 \\ 0.04 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0.54 & 1+0.8K_{KRIT} \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \\ H_2 &= \begin{vmatrix} 0.54 & 1+0.8K_{KRIT} \\ 0.04 & 1.5 \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \tag{10.22}$$

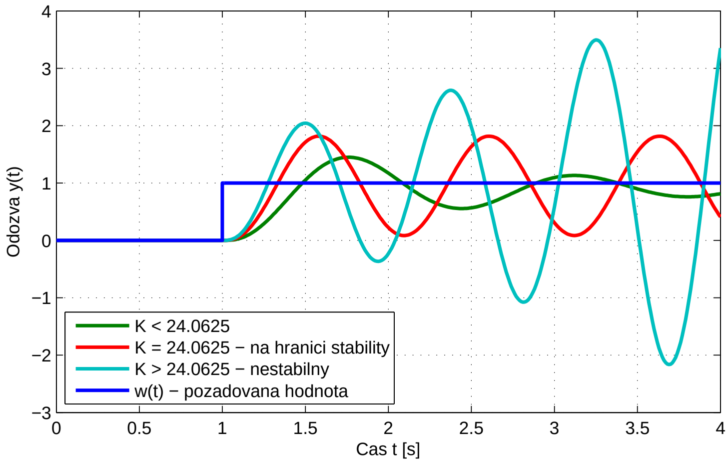
Podľa Hurwitzovho kritéria je obvod na hranici kmitavej stability ak

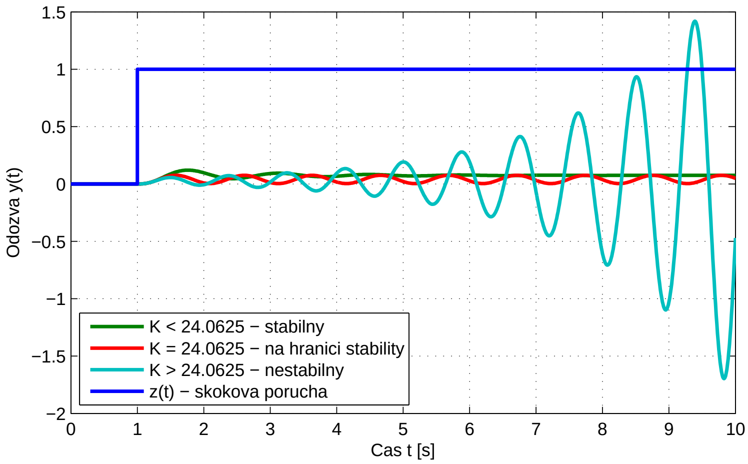
$$H_3 = a_0 H_2 \stackrel{!}{=} 0, \quad \text{kde} \quad a_0 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_2 \stackrel{!}{=} 0 \tag{10.23}$$

$$(1 + 0.8K_{KRIT})[0.54 \cdot 1.5 - (1 + 0.8K_{KRIT}) \cdot 0.04] \stackrel{!}{=} 0 \tag{10.24}$$

Pre determinant H_2 je

$$\begin{aligned} &0.54 \cdot 1.5 - (1 + 0.8K_{KRIT}) \cdot 0.04 \stackrel{!}{=} 0 \\ &0.032 \cdot K_{KRIT} \stackrel{!}{=} 0.77 \qquad \rightarrow \qquad K_{KRIT} = \underline{24.0625} \end{aligned} \tag{10.25}$$





Zadanie: Je zadaný prenos astatického dynamického systému

$$F_P(s) = \frac{k_s}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \tag{10.26}$$

kde $k_s = 0.5, T_1 = 0.5s, T_2 = 0.1s$ a prenos P-regulátora.

$$F_R(s) = r_0 \tag{10.27}$$

kde $r_0 = 24$. Vyšetrite stabilitu uzavretého regulačného obvodu pomocou Hurwitzovho kritéria stability, ak riadiaca veličina je $w(t) = 1(t)$.

Riešenie: Prenos $F_{Y/W}$ je možné vyjadriť ako

$$F_{Y/W} = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{F_0(s)}{1 + F_0(s)} = \frac{F_R(s)F_P(s)}{1 + F_R(s)F_P(s)} \tag{10.28}$$

pričom charakteristická rovnica uzavretého regulačného obvodu je určená z menovateľa ako

$$1 + F_R(s)F_P(s) = 0 \tag{10.29}$$

$$1 + r_0 \cdot \frac{k_s}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = 0 \tag{10.30}$$

a po úprave má tvar

$$\underbrace{T_1 T_2}_{a_3} s^3 + \underbrace{(T_1 + T_2)}_{a_2} s^2 + \underbrace{1}_{a_1} s + \underbrace{r_0 k_s}_{a_0} = 0 \tag{10.31}$$

Nutnou podmienkou stability je, aby boli všetky koeficienty kladné, čo je splnené zadanými hodnotami $\rightarrow T_1, T_2, k_s, r_0 > 0$. Súčasne však musí byť kladný nenulový aj Hurwitzov subdeterminant $H_{n-1} = H_2$ a to

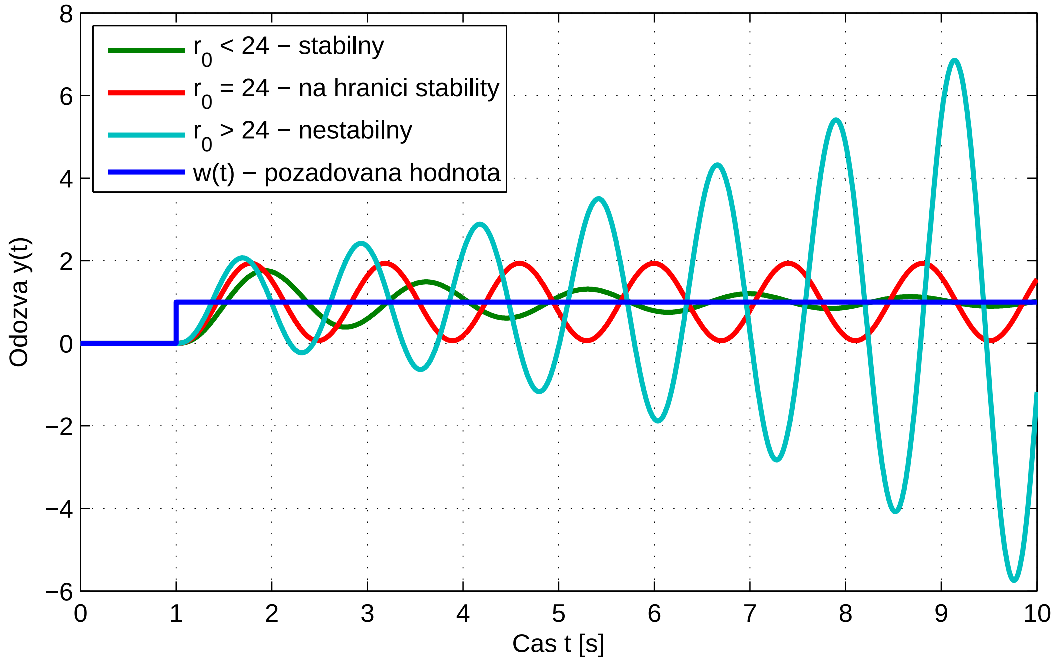
$$H_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_1 + T_2 & r_0 k_s \\ T_1 T_2 & 1 \end{vmatrix} > 0 \tag{10.32}$$

Po dosadení hodnôt je determinant H_2 rovný

$$(T_1 + T_2) \cdot 1 - T_1 T_2 r_0 k_s = (0.5 + 0.1) - 0.5 \cdot 0.1 \cdot 24 \cdot 0.5 = 0. \tag{10.33}$$

Z toho vyplýva, že uzavretý regulačný obvod je na hranici stability pre zosilnenie P-regulátora $r_0 = 24$.

Ak bude $r_0 > 24$, uzavretý regulačný obvod bude nestabilný, ak bude $r_0 < 24$, URO bude stabilný.



10.3 Príklady na samostatne riešenie

Zadanie: Pomocou Hurwitzovho kritéria vyšetrite stabilitu regulačného obvodu, ktorého charakteristická rovnica má tvar:

$$(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1) + K = 0 \tag{10.34}$$

pre $T_1 = 1s, T_2 = 0.2s, T_3 = 0.05s, K = 25$.

Riešenie: Regulačný obvod je stabilný

Zadanie: Majme charakteristickú rovnicu regulačného obvodu štvrtého rádu v tvare

$$a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \tag{10.35}$$

kde koeficienty majú tieto hodnoty: $a_0 = 100, a_1 = 0.13, a_2 = 0.003, a_3 = 2.10^{-5}, a_4 = 2.10^{-9}$. Vyšetrite stabilitu pomocou skráteného Hurwitzovho determinantu.

Riešenie: obvod je nestabilný

Zadanie: Vyšetrite stabilitu regulačného obvodu, ak $F_P(s)$ je prenos regulovaného systému

$$F_P(s) = \frac{1}{0.3s^3 + s^2 + 2s + 1} \tag{10.36}$$

a $F_R(s)$ je prenos regulátora.

$$F_R(s) = 1 + \frac{1}{3s} \tag{10.37}$$

Stabilitu určte pomocou Hurwitzovho kritéria stability.

Riešenie: Regulačný obvod je stabilný

Zadanie: Pre akú hodnotu r_{-1} PI-regulátora s prenosom $F_P(s)$ bude regulačný obvod stabilný?

$$F_P(s) = \frac{1}{s(3s + 1)}, \qquad F_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} \tag{10.38}$$

Určte pomocou Hurwitzovho kritéria.

Riešenie: Regulačný obvod je stabilný ak $r_{-1} < \frac{r_0}{3}$