Základy automatického riadenia

Prednáška 2

doc. Ing. Anna Jadlovská, PhD.,
doc. Ing. Ján Jadlovský, CSc.

Katedra kybernetiky a umelej inteligencie
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Technická univerzita v Košiciach

LS 2015/2016

Systém je objekt s definovanými veličinami a definovanými vzťahmi medzi nimi.

Deterministický jednorozmerný systém je definovaný na skúmanom objekte tak, že naň z okolia pôsobí vstupná veličina $u(t)$ a výsledkom tohto pôsobenia je pozorovateľná, výstupná veličina $y(t)$, pričom pri rovnakých počiatočných podmienkach k určitej veličine $u(t)$ je priradená vždy tá istá veličina $y(t)$. Nezávislá premenná je čas t.

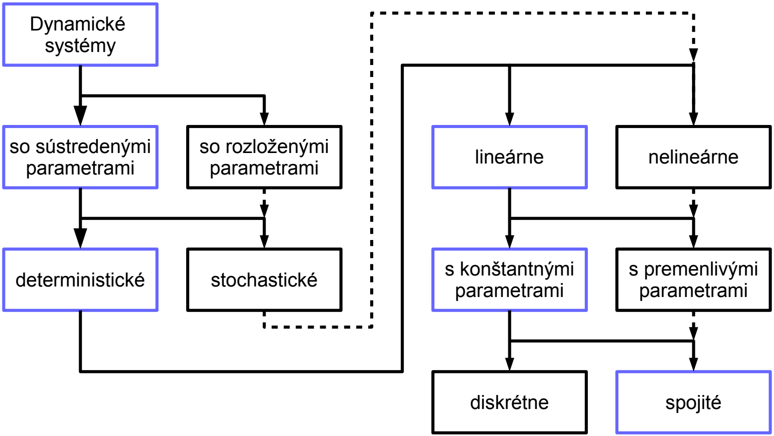
Pri dynamických systémoch so sústredenými parametrami sú vzťahy medzi vstupnými a výstupnými veličinami opísané pomocou obyčajných diferenciálnych rovníc a deriváciami podľa času.

Lineárne systémy sú také systémy, pre ktoré platí zákon superpozície. Tento zákon možno vyjadriť rovnicou

$$\begin{aligned} y &= T(a_1 u_1 + a_2 u_2) \\ &= a_1 T(u_1) + a_2 T(u_2) \\ &= a_1 y_1 + a_2 y_2 \end{aligned} \tag{1}$$

kde T je lineárny operátor a a_1, a_2 sú reálne čísla.

Ak pre proces definujeme z hľadiska priestoru a času súbor *typicky významných vlastností*, dôležitých pre cieľ nášho skúmania, potom hovoríme, že sme na objekte - procese definovali systém.


Dynamické systémy
so sústredenými parametrami
so rozloženými parametrami
deterministické
stochastické
lineárne
nelineárne
s konštantnými parametrami
s premenlivými parametrami
diskrétne
spojité

Matematický opis lineárnych spojitých systémov je možné vyjadriť pomocou dvoch ekvivalentných opisov:

- vonkajší opis - opis pomocou vstupno-výstupných premenných - diferenciálne rovnice, obrazové prenosy
- vnútorný opis - opis pomocou vnútorných premenných

Ak poznáme vnútorný popis (model) LDS, jednoznačne z neho vyplýva aj vonkajší opis (V/V opis) LDS.

Spojitý LDS je možné popísať lineárnou diferenciálnou rovnicou:

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 y^{'}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \ldots + b_1 u^{'}(t) + b_0 u(t)$$

kde
$a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m$ sú konštantné koeficienty
$y(t)$ je výstup LDS
$u(t)$ je vstup LDS

podmienka fyzikálnej realizovateľnosti: $n \geq m$

Lineárne spojité systémy

Pri získavaní modelu LDS (odvodenie LDR) vychádzame z fyzikálnej podstaty dejom skúmaného LDS.

Vonkajší (V/V) opis LDS:

- model v tvare LDS
- obrazový prenos v LT
- frekvenčný prenos
- prechodová charakteristika, impulzná charakteristika, frekvenčná charakteristika

Vnútorný opis LDS: $\Rightarrow$ metóda stavového priestoru (úplný obraz o všetkých dynamických vlastnostiach lineárneho systému)

Metódy založené na stavovom priestore pracujú v t-oblasti.

Laplaceova transformácia

- poskytuje veľmi jednoduchú metódu riešenia lineárnych diferenciálnych rovníc
- vhodná na odvodenie vstupno-výstupných modelov, ktorých použitie je výhodné pri identifikácii alebo návrhu algoritmov riadenia

Laplaceova transformácia je daná vzťahom

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \approxeq \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

Funkciu $f(t)$ nazývame originálom a funkciu $F(s)$ jej obrazom.

Pre praktické výpočty pomocou Laplaceovej transformácie sú užitočné pomocné vzťahy(Eulerove vzorce):

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{\mathrm{i}\,\omega t} + e^{-\mathrm{i}\,\omega t}}{2}, \quad \sin(\omega t) = \frac{e^{\mathrm{i}\,\omega t} - e^{-\mathrm{i}\,\omega t}}{2\,\mathrm{i}},$$

$$e^{\mathrm{i}\,\omega t} = \cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t), \quad e^{-\mathrm{i}\,\omega t} = \cos(\omega t) - \mathrm{i}\sin(\omega t).$$

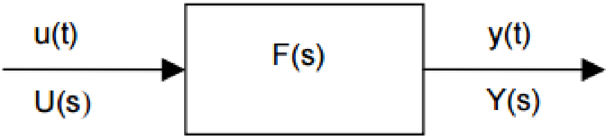
Základné vlastnosti Laplaceovej transformácie:

	originál	obraz
linearita	$k_1 f_1 \pm k_2 f_2$	$k_1 F_1 \pm k_2 F_2$
substitúcia	$f(at)$	$1/aF(s/a)$
posun v origináli	$f(t-a)$	$e^{-at}F(s)$
posun v obraze	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$

Obrazový prenos LDS je definovaný ako pomer obrazu *Y(s)* výstupnej veličiny *y(t)* ku obrazu *U(s)* vstupnej veličiny *u(t)*:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Popis LDS s pomocou obrazového prenosu



SISO systém, SIMO systém, MIMO systém

Lineárne spojité systémy

Obrazový prenos

Prenos systému je podiel obrazu výstupu ku obrazu vstupu pri nulových počiatočných podmienkach:

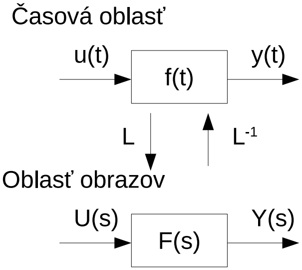
$$L\{y(t)\} = L\left\{\int_0^\infty f(\tau)u(t-\tau)d\tau\right\}$$

$$\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty f(\tau)u(t-\tau)d\tau\right\} e^{-st}dt$$

$$\xi = t-\tau \Rightarrow t = t+\xi \Rightarrow dt = d\xi$$

$$Y(s) = \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty f(\tau)u(\xi)d\tau\right\} e^{-s\tau}e^{-s\xi}d\xi =$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau}_{F(s)} \underbrace{\int_0^\infty u(\xi)e^{-s\xi}d\xi}_{U(s)} = F(s)U(s) \tag{2}$$



$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$Y(s) = F(s)U(s)$$

Funkčný vzťah medzi vstupnou a výstupnou veličinou uvažovaného systému je daný nasledovnou diferenciálnou rovnicou:

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = ku(t) \tag{3}$$

Za predpokladu, že sústava je v rovnovážnom stave, teda počiatočné podmienky sú nulové ($y(0) = 0$, $y'(0) = 0$), použitím LT môžeme písať:

$$a_2 s^2 Y(s) + a_1 sY(s) + a_0 Y(s) = kU(s), \tag{4}$$

odkiaľ obrazový prenos je:

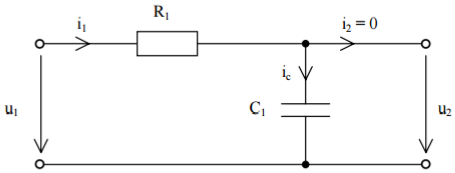
$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{5}$$

Všeobecne môžeme obrazový prenos $F(s)$ zapísať v tvare:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} \tag{6}$$

Korene polynómu čitateľa označujeme ako nuly a korene polynómu menovateľa ako póly. Polynóm menovateľa rovný nule sa volá charakteristická rovnica.

Elektrický systém

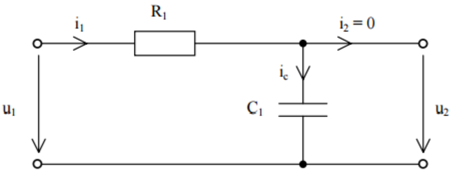


- vstup $u_1(t)$
- výstup $u_2(t)$

Úloha: Nájdite vťah medzi vstupom a výstupom

$$u_2(t) = f(u_1(t))$$

Ak R_1 a C_1 sú ideálne (nemenia svoje hodnoty v závislosti od teploty, prúdu), systém je **LINEÁRNY**



Podľa 1. a 2. Kirchhoffovho zákona platí:

$$u_1(t) = R_1 i_1(t) + u_2(t), \quad i_1(t) = i_2(t) + i_c(t), \qquad i_2(t) = 0 \Rightarrow i_1(t) = i_c(t)$$

a prúd tečúci kondenzátorom môžeme vyjadriť v tvare:

$$i_c = i_1 = C_1 \frac{du_2}{dt} \Rightarrow u_1 = R_1 C_1 \frac{du_2}{dt} + u_2$$

Označením $R_1 C_1 = T_1$ dostávame nehomogénnu diferenciálnu rovnicu 1. rádu:

$$T_1 \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1$$

Riešenie uvedenej diferenciálnej rovnice sa skladá z riešenia homogénnej dif. rovnice a partikulárneho riešenia dif. rovnice:

- homogénnej rovnici $T_1 \frac{du_2}{dt} + u_2 = 0$ prislúcha riešenie:

$$u_{2h} = K_1 \,\mathrm{e}^{st}, \quad u_{2h}(t) = K_1 e^{-\frac{t}{T_1}} \quad kde \quad s = -1/T_1$$

- pre partikulárne riešenie platí: nech $u_1(t) = u_{1K}$, potom riešenie má tvar $u_{2n}(t) = K_2$ a po dosadení do rovnice: $T_1 0 + K_2 = u_{1K}$ určíme konštantu $K_2 = u_{1K}$, $u_{2n}(t) = u_{1K}$

Výsledné riešenie diferenciálnej rovnice:

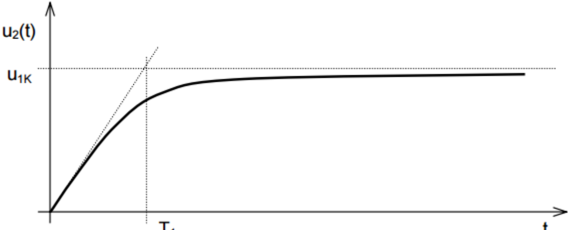
$$u_2(t) = u_{2h}(t) + u_{2n}(t) = K_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + u_{1K}$$

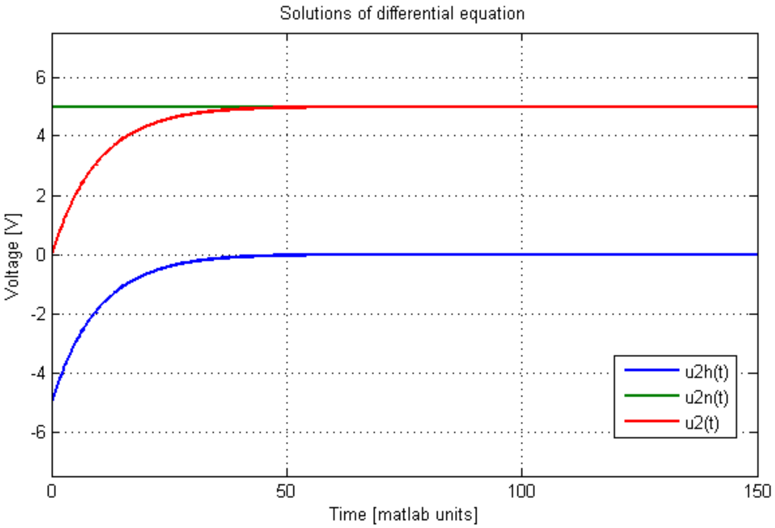
Konštantu K_1 určíme z počiatočných podmienok:

$$u_2(0) = 0 \Rightarrow 0 = K_1\, \mathrm{e}^{-t/T_1} + u_{1k} \Rightarrow K_1 = -u_{1K}$$

$$u_2(t) = u_{1k}(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$$

Grafický priebeh riešenia diferenciálnej rovnice pomocou analytických metód:




Solutions of differential equation
Voltage [V]
6
4
2
0
-2
-4
-6
0
50
100
150
Time [matlab units]
u2h(t)
u2n(t)
u2(t)

Riešenie pomocou Laplaceovej transformácie

Nech $u_1(t) = u_{1K}, \quad u_1(0) = 0$

$$T_1 \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = u_1(t) \quad \to \textit{prepis do LT} \to \quad T_1 U_2(s)s + U_2(s) = \frac{u_{1K}}{s}$$

pričom

$$u_1(t) \approxeq U_1(s) = \frac{u_{1K}}{s}$$

Laplaceov obraz výstupnej veličiny:

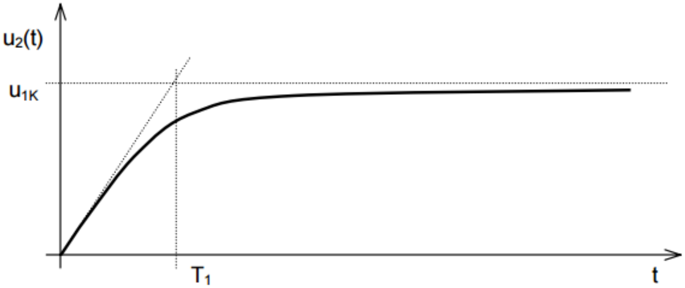
$$U_2(s) = \frac{u_{1K}}{s(T_1 s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{T_1 s + 1}, \quad A = u_{1K}, \quad B = -u_{1K} T_1$$

$$U_2(s) = u_{1K}\left(\frac{1}{s} - \frac{T_1}{T_1 s + 1}\right)$$

Po prevode do časovej oblasti:

$$u_2(t) = u_{1k}(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$$

Grafický priebeh riešenia diferenciálnej rovnice pomocou Laplaceovej transformácie:



Jednokapacitný prenos

Transformáciou diferenciálnej rovnice pri nulových poč. podmienkach:

$$T_1 \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = u_1(t)$$

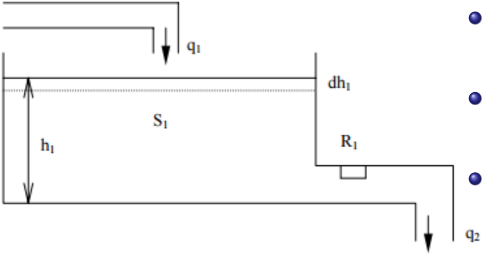
na Laplaceov obrazový prenos dostávame:

$$T_1 U_2(s)s + U_2(s) = U_1(s)$$

a následnou úpravou získame Laplaceov obrazový prenos jednokapacitnej sústavy:

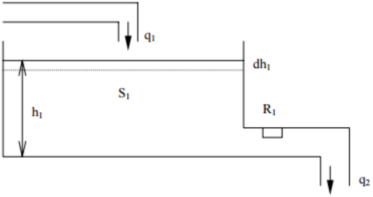
$$F(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{T_1 s + 1}$$

Hydraulický systém prvého rádu



- vstup $q_1(t)$ - prítok média do nádoby
- výstup $q_2(t)$ - množstvo vytekajúceho média z nádoby
- výstup $h_1(t)$ - výška hladiny v nádobe
- S_1 - prierez nádoby, R_1 - hydr. odpor, γ - špecifická váha kvapaliny

Úloha 1: Nájdite vzťah medzi vstupom a výstupom $q_2(t) = f_1(q_1(t))$
Úloha 2: Nájdite vzťah medzi vstupom a výstupom $h_1(t) = f_2(q_1(t))$



Bilančná rovnica

$$\frac{d(\text{kvapaliny})}{dt} = \text{prítok} - \text{odtok}$$

$$S_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t)$$

Výstup $q_2(t)$ - priamo úmerný hydraulickému tlaku v mieste odporu R_1, nepriamo úmerný odporu R_1 a lineárne závislý od výšky hladiny $h_1(t)$:

$$q_2(t) = \frac{\gamma}{R_1} h_1(t)$$

kde γ je špecifická váha kvapaliny vytekajúca cez hydraulický odpor R_1
Deriváciou dostávame:

$$\frac{dq_2(t)}{dt} = \frac{\gamma}{R_1}\frac{dh_1(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{R_1}{\gamma}\frac{dq_2(t)}{dt}$$

Dosadením do pôvodnej diferenciálnej rovnice dostaneme:

$$\frac{S_1 R_1}{\gamma}\frac{dq_2(t)}{dt} + q_2(t) = q_1(t)$$

Označením $\frac{S_1 R_1}{\gamma} = T_1$ sme získali LDR **I.** rádu.
Výsledná diferenciálna rovnica pre **hydraulický systém:**

$$T_1\frac{dq_2(t)}{dt} + q_2(t) = q_1(t),$$

ktorej riešením je:

$$q_2(t) = q_1(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$$

čo je rovnako ako v predošlom príklade tvar riešenia pre jednokapacitný prenos.

Ak chceme riešiť úlohu $h_1(t) = f(q_1(t))$, dosadíme do výsledného bilančného vzťahu:

$$S_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t)$$

za $q_2(t) = \frac{\gamma h_1(t)}{R_1}$:

$$S_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = q_1(t) - \frac{\gamma h_1(t)}{R_1}$$

a následnou úpravou dostávame LDR:

$$S_1 \frac{dh_1(t)}{dt} + \frac{\gamma}{R_1} h_1(t) = q_1(t),$$

ktorej postup riešenia je totožný s už uvedenými príkladmi.

Ak pre výtok kvapaliny z nádoby platí:

$$q_2(t) = k_1 f \sqrt{2gh_1(t)},$$

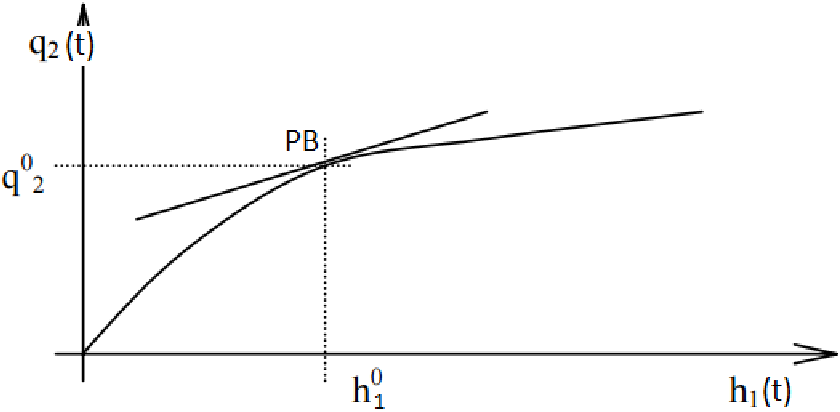
kde k_1 - konšt., f - priemer výtokového otvoru, g - gravitačné zrýchlenie
Označením $k_2 = k_1 f \sqrt{2g}$ a dosadením do výslednej bilančnej rovnice:

$$S_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t)$$

dostávame **nelineárnu** diferenciálnu rovnicu (NDR):

$$S_1 \frac{dh_1(t)}{dt} + k_2 \sqrt{h_1(t)} = q_1(t),$$

NDR nevieme riešiť analyticky v t-oblasti oblasti, ani pomocou Laplaceovej transformácie.


$q_2(t)$
PB
q^0_2
h^0_1
$h_1(t)$

Linearizácia $\equiv$ rozvoj do Taylorovho radu:

$$q_2(t) \approx q_2(h_1^0) + q_2^{'}(h_1^0)\frac{(h_1(t) - h_1^0)}{1!} + \dots$$

pričom platí: $q_2(h_1^0) = k_2\sqrt{h_1^0}$, $q_2^{'}(h_1^0) = k_2\frac{1}{2\sqrt{h_1^0}} = k_2\frac{\sqrt{h_1^0}}{2h_1^0}$

dosadením do rovnice dostávame:

$$q_2(t) \approx k_2\sqrt{h_1^0} + k_2\frac{\sqrt{h_1^0}}{2h_1^0}(h_1(t) - h_1^0)$$

$$q_2(t) \approx k_2\frac{\sqrt{h_1^0}}{2} + k_2\frac{\sqrt{h_1^0}}{2h_1^0}h_1(t)$$

Označením:

$$k_3 = k_2 \frac{\sqrt{h_1^0}}{2}$$

dostávame výsledný hydraulický model vyjadrený LDR:

$$S_1 \frac{dh_1(t)}{dt} + \frac{k_3}{h_1^0} h_1(t) = q_1(t) - k_3,$$

ktorú vieme riešiť metódami uvedenými v predošlých príkladoch.