Základy automatického riadenia

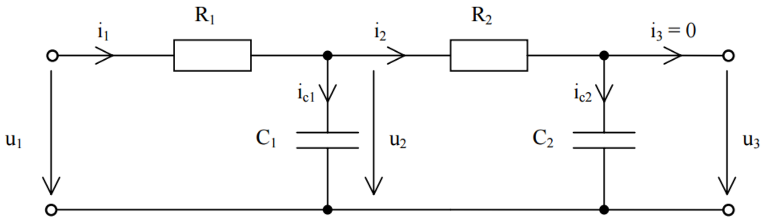
Prednáška 3

doc. Ing. Anna Jadlovská, PhD.,
doc. Ing. Ján Jadlovský, CSc.

Katedra kybernetiky a umelej inteligencie
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Technická univerzita v Košiciach

LS 2015/2016

Elektrický systém II. rádu

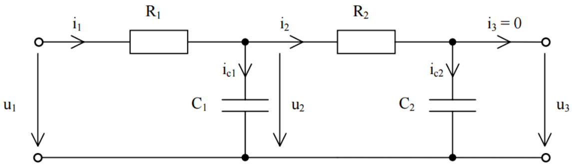


- vstup $u_1(t)$
- výstup $u_3(t)$

Úloha: Nájdite vťah medzi vstupom a výstupom

$$u_3(t) = f(u_1(t))$$

Predpoklad: R_1, C_1, R_2, C_2 sú lineárne



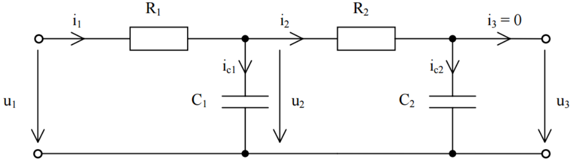
Podľa 1. a 2. Kirchhoffovho zákona platí:

$$u_2(t) = R_2 i_2(t) + u_3(t), \quad i_2(t) = i_3(t) + i_{c2}(t), \quad i_3(t) = 0 \Rightarrow i_2(t) = i_{c2}(t)$$

a prúd tečúci kondenzátorom môžeme vyjadriť v tvare:

$$i_{c2} = i_2 = C_2 \frac{du_3}{dt}$$

Modelovanie fyzikálneho systému II. rádu



Z Ohmových a Kirchhoffových zákonov taktiež platí:

$$u_1 = R_1 i_1 + u_2, \quad i_1 = i_2 + i_{c1}, \quad i_{c1} = C_1 \frac{du_2}{dt}$$

$$u_2 = R_2 i_2 + u_3 = R_2 C_2 \frac{du_3}{dt} + u_3, \quad \frac{du_2}{dt} = R_2 C_2 \frac{d^2 u_3}{dt^2} + \frac{du_3}{dt}$$

$$u_1 = R_1 i_1 + u_2 = R_1 (i_2 + i_{c1}) + u_2 = R_1 C_2 \frac{du_3}{dt} + R_1 C_1 \frac{du_2}{dt} + u_2$$

Modelovanie fyzikálneho systému II. rádu

Dosadením za u_2 a $\frac{du_2}{dt}$ dostávame:

$$u_1 = R_1 C_2 \frac{du_3}{dt} + R_1 C_1 (R_2 C_2 \frac{d^2 u_3}{dt^2} + \frac{du_3}{dt}) + R_2 C_2 \frac{du_3}{dt} + u_3$$

a odtiaľ dostaneme nehomogénnu LDR II. rádu:

$$T_1 T_2 \frac{d^2 u_3(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2 + T_3) \frac{du_3(t)}{dt} + u_3(t) = u_1(t)$$

s časovými konštantami:

$$T_1 = R_1 C_1, \quad T_2 = R_2 C_2, \quad T_{12} = R_1 C_2$$

Úloha:

- Nájsť Laplaceov obrazový prenos $F(s)$
- Nájsť originál $f(t)$ v časovej oblasti
- Nájsť riešenie LDR $y(t)$ za predpokladu nulových počiatočných podmienok a pre vstupnú funkciu $u(t) = 1$

$$y^{'''}(t) + 6y^{''}(t) + 11y^{'}(t) + 6y(t) = u(t)$$

Určenie Laplaceoveho obrazu $F(s)$

$$y'''(t) + 6y''(t) + 11y'(t) + 6y(t) = u(t)$$

Po Laplaceovej transformácii diferenciálnej rovnice dostávame:

$$s^3 Y(s) + 6s^2 Y(s) + 11sY(s) + 6Y(s) = U(s)$$

odkiaľ dostaneme Laplaceov obrazový prenos:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Určenie originálu $f(t)$ k Laplaceovmu obrazového prenosu F(s)

Korene polynómu menovateľa sú $s_1 = -1, s_2 = -2, s_3 = -3$, teda platí:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

$$A = \lim_{s \to -1} \frac{1}{(s+2)(s+3)}, B = \lim_{s \to -2} \frac{1}{(s+1)(s+3)}, C = \lim_{s \to -3} \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

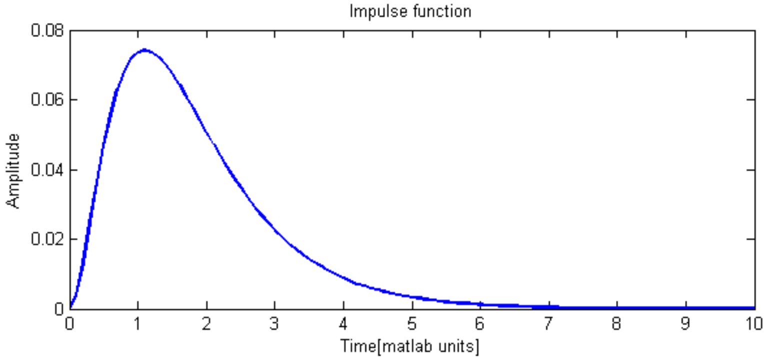
potom $A = 0.5, B = -1, C = 0.5$ a obrazový prenos má tvar:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0,5}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \frac{0,5}{s+3}$$

Po nájdení originálov k častiam obrazového prenosu F(s) dostávame originál f(t):

$$f(t) = 0.5e^{-t} - e^{-2t} + 0.5e^{-3t}$$

Túto funkciu f(t) označujeme ako **impulznú**(váhovú) **funkciu**.



Určenie riešenia LDR $y(t)$
Za predpokladu pre nulové poč. podmienky a vstupnú funkciu $u(t) = 1$:

$$s^3 Y(s) + 6s^2 Y(s) + 11sY(s) + 6Y(s) = U(s)$$

odkiaľ pre $Y(s)$ platí:

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}\frac{1}{s}, \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

Korene polynómu menovateľa sú $s_1 = -1, s_2 = -2, s_3 = -3, s_4 = 0$, teda platí:

$$Y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3} + \frac{D}{s}$$

$$A = \lim_{s \to -1} \frac{1}{s(s+2)(s+3)}, \quad B = \lim_{s \to -2} \frac{1}{s(s+1)(s+3)}$$

$$C = \lim_{s \to -3} \frac{1}{s(s+1)(s+2)}, \quad D = \lim_{s \to 0} \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

potom $A = -1/2, B = 1/2, C = -1/6, D = 1/6$ a Laplaceov tvar riešenia má tvar:

$$Y(s) = -\frac{1/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+2} - \frac{1/6}{s+3} + \frac{1/6}{s}$$

Po nájdení originálov k častiam obrazového prenosu dostávame originál y(t):

$$y(t) = -0.5e^{-t} + 0.5e^{-2t} - 1/6e^{-3t} + 1/6$$

Lineárne spojité systémy, ilustratívny príklad