Základy automatického riadenia

Prednáška 4

doc. Ing. Anna Jadlovská, PhD.,
doc. Ing. Ján Jadlovský, CSc.

Katedra kybernetiky a umelej inteligencie
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Technická univerzita v Košiciach

ZS 2015/2016

Prechodová funkcia je definovaná ako časová odozva systému na jednotkový skok vstupnej veličiny pri nulových počiatočných podmienkach. Ak je systém popísaný prenosovou funkciou

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \qquad \text{kde} \qquad U(s) = \mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s},$$

potom je obraz prechodovej funkcie $H(s)$ určený ako

$$Y(s) = H(s) \rightarrow H(s) = F(s)U(s) = \frac{F(s)}{s}$$

a prechodová funkcia $h(t)$ je získaná spätnou LT ako

$$\boxed{h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}}$$

Označenie výstupu $y(t) \rightarrow h(t)$ je prechodovú funkciu.

Uvažujme prenosovú funkciu systému 1. rádu v tvare

$$F(s) = \frac{b_0}{(s + a_0)}$$

Ak obraz prechodovej funkcie $H(s)$ systému prvého rádu je

$$H(s) = \frac{F(s)}{s} = \frac{b_0}{s(s + a_0)}$$

potom je jej prechodová funkcia

$$\boxed{h(t) = \frac{b_0}{a_0}\left\{1 - e^{-a_0 t}\right\}}$$

V prípade, že je prenos vyjadrený v normovanom tvare (časová konštanta T, zosilnenie Z_s)

$$F(s) = \frac{Z_s}{(Ts+1)}, \qquad \text{kde} \qquad Z_s = \frac{b_0}{a_0}, \quad T = \frac{1}{a_0}$$

je prechodová funkcia

$$h(t) = Z_s \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right\}$$

Prechodová charakteristika je grafické zobrazenie prechodovej funkcie $h(t)$.

Uvažujeme systém prvého rádu

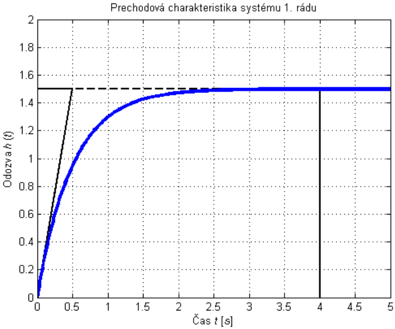
$$F(s) = \frac{3}{s+2} \quad \rightarrow \quad \frac{1.5}{0.5s+1}$$

Prechodová funkcia je

$$h(t) = \frac{3}{2}\left\{1 - e^{-2t}\right\}$$

kde

$$Z_s = \frac{3}{2}, \quad T = \frac{1}{2},$$



Prechodové funkcie stabilných systémov 2. rádu

Uvažujeme systém druhého rádu

$$F(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad \text{resp.} \quad F(s) = \frac{Z_s}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Korene charakteristického polynómu sú

$$s_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

Pri stabilných systémoch môžu nastať 3 prípady:

- $a_1^2 > 4a_0 \rightarrow$ dva rôzne záporne reálne korene
- $a_1^2 = 4a_0 \rightarrow$ dva násobné záporne reálne korene
- $a_1^2 < 4a_0 \rightarrow$ dva komplexne združené korene so zápornou reálnou časťou

Ak $a_1^2 > 4a_0$, potom je rozklad obrazu prechodovej funkcie $H(s)$ definovaný ako

$$H(s) = \frac{b_0}{s(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{s-s_2},$$

príslušná prechodová funkcia $h(t)$ je

$$\boxed{h(t) = \frac{b_0}{s_1 s_2}\left[1 + \frac{s_2}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} - \frac{s_1}{s_1 - s_2} e^{s_2 t}\right]}$$

Ak je prenos $F(s)$ zadaný v normovanom tvare (Z_s, T_1, T_2)

$$F(s) = \frac{Z_s}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad \text{kde} \quad T_1 = -\frac{1}{s_1}, \quad T_2 = -\frac{1}{s_2}, \quad Z_s = \frac{b_0}{s_1 s_2}$$

$$h(t) = Z_s\left[1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{\frac{1}{T_1} t} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{\frac{1}{T_2} t}\right]$$

Uvažujeme systém druhého rádu

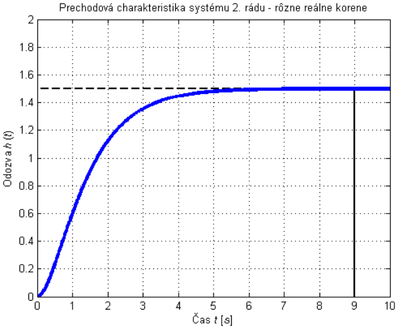
$$F(s) = \frac{3}{(s+1)(s+2)}$$

Prechodová funkcia je

$$h(t) = \frac{3}{2}\left\{1 - 2e^{-t} + e^{-2t}\right\}$$

kde

$$T_1 = 1, \quad T_2 = \frac{1}{2}, \quad Z_s = \frac{3}{2}$$



Prechodová funkcia a prechodová charakteristika

Prechodové funkcie stabilných systémov 2. rádu s dvojnásobným reálnym koreňom

Ak $a_1^2 = 4a_0$, potom je rozklad obrazu prechodovej funkcie definovaný ako

$$H(s) = \frac{b_0}{s(s-s_1)^2} = \frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{(s-s_1)^2}$$

príslušná prechodová funkcia je

$$h(t) = \frac{b_0}{s_1^2} - \frac{b_0}{s_1^2}e^{s_1 t} + \frac{b_0}{s_1}te^{s_1 t} = \boxed{\frac{b_0}{s_1^2}\left[1-(1-s_1 t)e^{s_1 t}\right]}$$

Ak je prenos $F(s)$ zadaný v normovanom tvare $(Z_s, T_1 = T_2 = T)$

$$F(s) = \frac{Z_s}{(Ts+1)^2} \quad \text{kde} \quad T = -\frac{1}{s_1}, \quad Z_s = \frac{b_0}{a_0} = \frac{b_0}{s_1^2}$$

je príslušná prechodová funkcia definovaná ako

$$h(t) = Z_s\left[1-\left(1+\frac{t}{T}\right)e^{-\frac{t}{T}}\right]$$

Uvažujeme systém druhého rádu

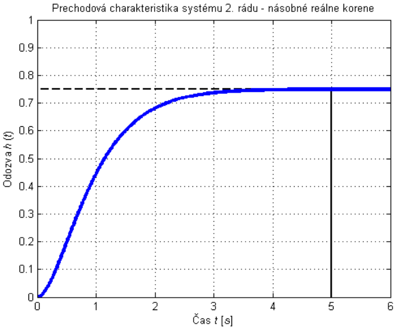
$$F(s) = \frac{3}{(s+2)^2} = \frac{0.75}{(0.5s+1)^2}$$

s násobnou časovou konštantou a zosilnením

$$T = 0.5, \quad Z_s = \frac{3}{4}$$

ktorého je prechodová funkcia

$$h(t) = \frac{3}{4}\left[1-(1+2t)e^{-2t}\right]$$



Ak $a_1^2 < 4a_0$, potom je rozklad obrazu prechodovej funkcie definovaný ako

$$H(s) = \frac{b_0}{s[(s+\alpha)^2+\beta^2]} = \frac{c_0}{s} + c_1 \frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2} + c_2 \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

príslušná prechodová funkcia je

$$h(t) = \frac{b_0}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{b_0}{\alpha^2+\beta^2} e^{-\alpha t}\sin\beta t - \frac{b_0}{\alpha^2+\beta^2} e^{-\alpha t}\cos\beta t =$$

$$\boxed{h(t) = \frac{b_0}{a_0}\left[1 - e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t + \cos\beta t\right)\right]}$$

respektíve

$$h(t) = Z_s\left[1 - e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t + \cos\beta t\right)\right].$$

Uvažujeme systém druhého rádu

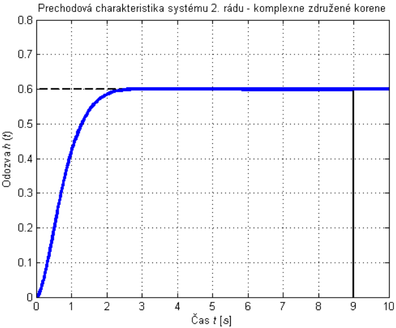
$$F(s) = \frac{3}{s^2 + 4s + 5} = \frac{3}{(s+2)^2 + 1^2}$$

kde sú komplexne združené korene $s_{1,2} = -1 \pm 2j$ a po úprave na štvorce je

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \text{a} \quad Z_s = \frac{3}{5}$$

ktorého je prechodová funkcia

$$h(t) = \frac{3}{5}\left[1 - e^{-2t}\left(2\sin t + \cos t\right)\right]$$



Uvažujeme systém druhého rádu

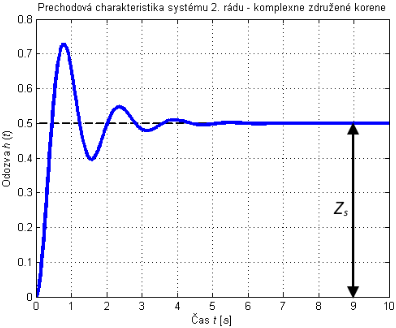
$$F(s) = \frac{8.5}{s^2 + 2s + 17} = \frac{8.5}{(s+1)^2 + 4^2}$$

kde sú komplexne združené korene $s_{1,2} = -1 \pm 4j$ a po úprave na štvorce je

$$\alpha = 1, \quad \beta = 4, \quad \text{a} \quad Z_s = \frac{8.5}{17} = \frac{1}{2}$$

ktorého je prechodová funkcia

$$h(t) = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-t}\left(\frac{\sin 4t}{4} + \cos 4t\right)\right]$$



Prechodová funkcia a prechodová charakteristika

Prechodová charakteristika systému 2. rádu na hranici stability s komplexne združenými rýdzo-imaginárnimi koreňmi

Uvažujeme systém druhého rádu

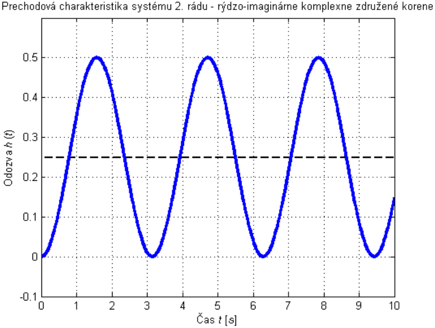
$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 4} = \frac{1}{(s+0)^2 + 2^2}$$

kde sú rýdzo-imaginárne komplexne združené korene $s_{1,2} = \pm 2j$ a po úprave na štvorce je

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad \text{a} \quad Z_s = \frac{1}{4}$$

ktorého je prechodová funkcia

$$h(t) = \frac{1}{4}\left(1 - \cos 2t\right)$$

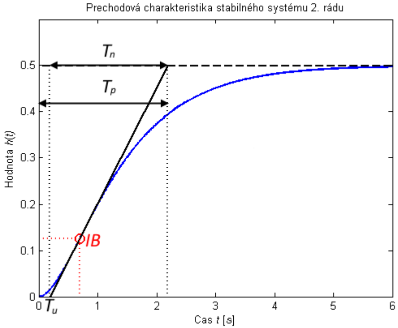


Prechodová funkcia stabilného systém 2. rádu má inflexný bod (IB), pomocou ktorého je možné určiť

- T_u ako dobu prieťahu,
- T_n ako dobu nábehu,
- T_p ako dobu prechodu.

$$T_n = T_p - T_u$$

Hodnoty T_u, T_n sú využívané v syntéze PID regulátorov.



Impulzná funkcia je odozva systému po privedení Diracovho impulzu $\delta(t)$ na jeho vstup. Jej grafickým znázornením je impulzná charakteristika.

$$\text{Diracov impulz} \qquad u(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{pre} \quad t = 0 \\ 0 & \text{pre} \quad t \neq 0 \end{cases},$$

Ak je systém popísaný prenosom

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \qquad \text{kde} \qquad U(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1,$$

potom je obraz impulznej funkcie $G(s)$ určený ako

$$Y(s) = G(s) \rightarrow G(s) = F(s)U(s) = F(s) \cdot 1$$

Impulzná funkcia $g(t)$ je získaná spätnou Laplaceovou transformáciou ako

$$\boxed{g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}}$$

Uvažujeme systém prvého rádu

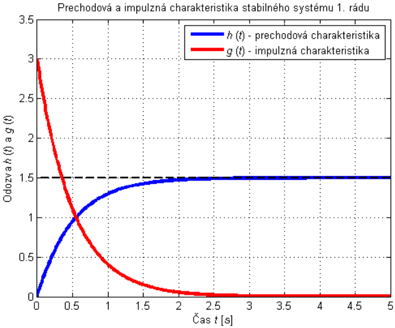
$$F(s) = \frac{3}{s+2} \quad \rightarrow \quad \frac{1.5}{0.5s+1}$$

Prechodová funkcia je

$$h(t) = \frac{3}{2}\left\{1 - e^{-2t}\right\}$$

Impulzná funkcia je

$$g(t) = 3e^{-2t}$$



Uvažujeme systém druhého rádu

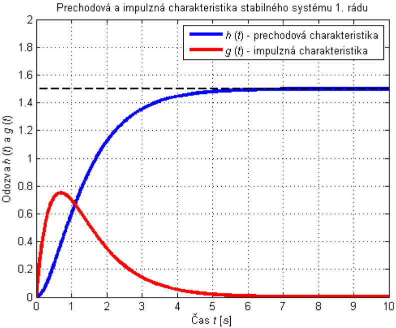
$$F(s) = \frac{3}{(s+1)(s+2)}$$

Prechodová funkcia je

$$h(t) = \frac{3}{2}\left\{1 - 2e^{-t} + e^{-2t}\right\}$$

Impulzná funkcia je

$$g(t) = 3e^{-t} - 3e^{-2t}$$

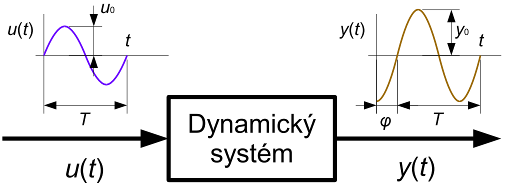


Frekvenčný prenos vyšetrovaného systému je možné získať privedením harmonického signálu na jeho vstup. Typový signál je sínusový priebeh

$$u(t) = u_0 \sin \omega t \qquad \text{resp.} \qquad u(t) = u_0 e^{j\omega t}$$

Na výstupe je po ustálení taktiež sínusový signál, avšak s inou amplitúdou, rovnakou uhlovou frekvenciou a fázovým posunom voči vstupnému signálu

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{resp.} \qquad y(t) = y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$



Frekvenčný prenos $G(j\omega)$ systému sa rovná podielu Fourierového obrazu výstupného signálu a Fourierovho obrazu vstupného signálu pri nulových počiatočných podmienkach.

$$\boxed{F(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{y_0\, e^{j(\omega t + \varphi)}}{u_0\, e^{j\omega t}} = |F(j\omega)| e^{j\Phi(\omega)}}$$

Frekvenčný prenos systému je možné získať zo spojitého (Laplaceového) prenosu substitúciou komplexnej premennej za $j\omega$ ako

$$F(j\omega) = [F(s)]_{s=j\omega}$$

Na základe spojitého prenosu je možné zapísať frekvenčný prenos ako

$$F(j\omega) = \frac{b(j\omega)}{a(j\omega)} = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + \cdots + b_m(j\omega)^m}{a_0 + a_1(j\omega) + \cdots + a_n(j\omega)^n}$$

Frekvenčný prenos je možné prepísať do tvaru

$$F(j\omega) = \frac{b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots + j(b_1\omega - b_3\omega^3 + \dots)}{a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots + j(a_1\omega - a_3\omega^3 + \dots)} = \frac{c(\omega) + jd(\omega)}{e(\omega) + jf(\omega)}$$

Tento prenos je možné ďalej rozdeliť na reálnu a imaginárnu časť ako

$$F(j\omega) = \frac{c(\omega)e(\omega) + d(\omega)f(\omega)}{e^2(\omega) + f^2(\omega)} + j\frac{d(\omega)e(\omega) - c(\omega)f(\omega)}{e^2(\omega) + f^2(\omega)}$$

Frekvenčný prenos

$$F(j\omega) = \mathrm{Re}\,[F(j\omega)] + j\mathrm{Im}\,[F(j\omega)] \quad \rightarrow \quad \boxed{F(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)}$$

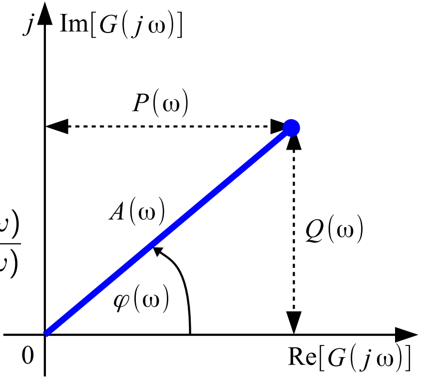
je v tzv. **karteziánskom tvare** frekvenčného prenosu.

Frekvenčný prenos a frekvenčná charakteristika

Polárny tvar frekvenčného prenosu

Pre konštantnú hodnotu ω budú $P(\omega)$ a $Q(\omega)$ konkrétne čísla. Ich zobrazenie v komplexnej rovine je možné cez absolútnu hodnotu $A(\omega)$ a uhol φ, pre ktorý platí

$$\operatorname{tg}\Phi(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} \Rightarrow \Phi(\omega) = \arctan\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$



Frekvenčný prenos

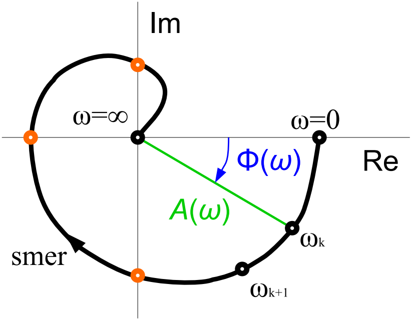
$$\boxed{F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\Phi(\omega)} = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)}}$$

je v tzv. **polárnom tvare** frekvenčného prenosu.

$$|F(j\omega)| = A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

Postup:

1. určenie $F(s)$ z diferenciálnej rovnice
2. dosadenie $j\omega$ za s pre získanie prenosu $F(j\omega)$
3. vyjadrenie $F(j\omega)$ v polárnom alebo karteziánskom tvare
4. vypočítame hodnoty typových frekvencií: $\omega = 0$, $\omega = \infty$, $\omega = 10$, $\omega = 100$, $\omega = 1000$ a iné kladné hodnoty ω.
5. znázorníme body v komplexnej rovine a prepojíme ich hladkou čiarou so smerom
6. vypočítame priesečníky s osami



$$F(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

alebo

$$F(j\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)}$$

Prenosy a ich frekvenčné charakteristiky:

$$F_1(s) = k$$

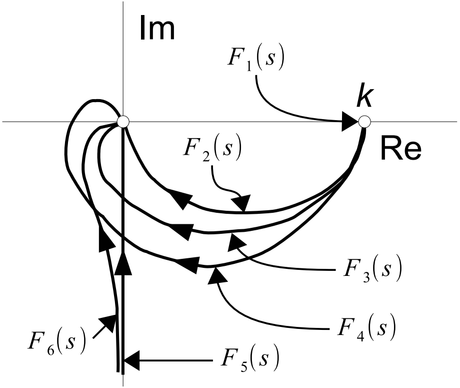
$$F_2(s) = \frac{k}{Ts+1}$$

$$F_3(s) = \frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$

$$F_4(s) = \frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$$

$$F_5(s) = \frac{k}{s}$$

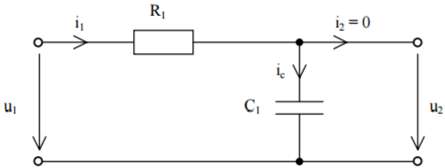
$$F_5(s) = \frac{k}{s(Ts+1)}$$



Dôležité limity:

$$\lim_{\omega\to 0} F(j\omega), \qquad \lim_{\omega\to\infty} F(j\omega)$$

Zadaný RC obvod



má Laplaceov prenos

$$F(s) = \frac{1}{Ts+1}, \quad \text{kde} \quad T = R \cdot C$$

Frekvenčný prenos je

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + jT\omega},$$

po úprave na karteziánsky tvar

$$F(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) =$$

$$= \frac{1}{1 + T^2\omega^2} - j\frac{T\omega}{1 + T^2\omega^2}$$

Následne môžeme postupne dosadzovať hodnoty ω z intervalu $\langle 0; \infty)$ pre vykreslenie frekvenčnej Nyquistovej charakteristiky.

Frekvenčný prenos RC obvodu je v karteziánskom tvare

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + T^2\omega^2} - j\frac{T\omega}{1 + T^2\omega^2},$$

Absolútna hodnota

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{(1 + T^2\omega^2)^2} + \frac{+T^2\omega^2}{(1 + T^2\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$$

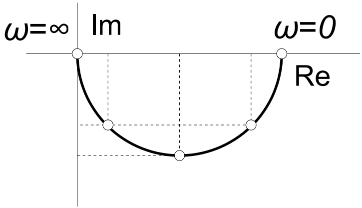
a uhol φ

$$\varphi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{-T\omega}{1+T^2\omega^2}}{\frac{1}{1+T^2\omega^2}}\right) = -\tan^{-1}(T\omega)$$

Frekvenčný prenos RC obvodu v polárnom tvare je

$$F(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} e^{-j\tan^{-1}(T\omega)}$$

Ukážka Nyquistovej frekvenčnej charakteristiky pre RC obvod získanej z karteziánského tvaru prenosu kde $R = 200\Omega,\ C = 4.7\mu F$

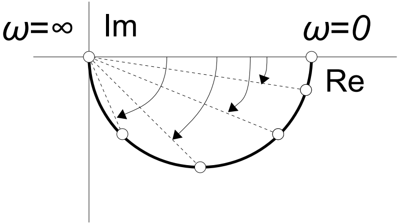


ω	$P(\omega)$	$Q(\omega)$
0	1	0
50	0.9978	-0.0469
100	0.9912	-0.0932
200	0.9659	-0.1816
500	0.8191	-0.3850
1000	0.5309	-0.4990
2000	0.2205	-0.4146
5000	0.0433	-0.2036
∞	0	0

$$\lim_{\omega\to 0} F(j\omega) = P(0) + jQ(0) = 1 + 0j$$

$$\lim_{\omega\to\infty} F(j\omega) = P(\infty) + jQ(\infty) = 0 + 0j$$

Ukážka Nyquistovej frekvenčnej charakteristiky pre RC obvod získanej z polárneho tvaru prenosu kde $R = 200\Omega$, $C = 4.7\mu F$



ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)[deg]$
0	1.0000	0
50	0.9989	-2.69
100	0.9956	-5.37
200	0.9828	-10.65
500	0.9050	-25.17
1000	0.7286	-43.23
2000	0.4696	-62.00
5000	0.2081	-77.99
∞	0	-90.00

$$\lim_{\omega\to 0} F(j\omega) = A(0)e^{j\Phi(0)} = 1 \cdot e^{j0}$$

$$\lim_{\omega\to\infty} F(j\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)} = 0 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Frekvenčné charakteristiky je vhodné znázorňovať v logaritmických súradniciach. Po zlogarizmizovaní frekvenčného prenosu v polárnom tvare

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\Phi(\omega)} = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)}$$

dostaneme výraz

$$\ln F(j\omega) = \ln A(\omega) + j\Phi(\omega)$$

Pre hodnoty ω z intervalu $\langle 0; \infty)$

$$\mathrm{Re}[\ln F(j\omega)] = \ln A(\omega) \quad \text{a} \quad \mathrm{Im}[\ln F(j\omega)] = \Phi(\omega)$$

dostávame *Nicholsov diagram*, avšak prenos $\ln F(j\omega)$ je vhodné zobraziť dvoma charakteristikami:

- logaritmickou amplitúdovou charakteristikou,
- fázovou charakteristikou,

Vyšetrenie dynamických vlastností vybraných lineárnych dynamických systémov v časovej a frekvenčnej oblasti

Frekvenčná charakteristika v logaritmických súradniciach

Ak dva frekvencie sa navzájom líšia desaťnásobne, potom

$$\log \frac{\omega_2}{\omega_1} = 10$$

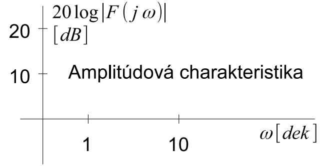
čo znamená, že sa navzájom líšia o jednu dekádu. Dva výkony sa od seba líšia o jeden *decibel* $[dB]$, ak

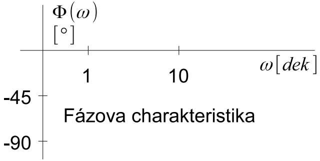
$$10 \log \frac{N_2}{N_1} = 1$$

Pre kvadráty U_1, U_2 platí

$$10 \log \frac{U_2^2}{U_1^2} = 20 \log \frac{U_2}{U_1} = 1$$

Amplitúda frekvenčnej charakteristiky je vynášaná v $20 \log[A(\omega)]$ v decibeloch





Frekvenčná charakteristika v logaritmických súradniciach

Postup pri konštrukcií približných frekvenčných charakteristík v logaritmických súradniciach

1. Upravíme frekvenčný prenos $F(j\omega)$ na tvar koreňových činiteľov,
2. urobíme výpočet $20 \cdot \log F(j\omega)$, zostavíme jednotlivé časti od najmenšej po najväčšiu časovú konštantu,
3. z časových konštánt T_k určíme body zlomu ako $\omega_k = \frac{1}{T_k}$ a zoradíme ich ako od najmenšej po najväčšiu,
4. aproximujeme celý prenos $F(j\omega)$ v jednotlivých intervaloch a zakresľujeme logaritmickú frekvenčnú charakteristiku na základe už uvedených typových tvarov,

5. Začneme od najnižších frekvencií:
   1. Ak prenos nemá pól v počiatku, začína amplitúdová charakteristika asymptotou so sklonom 0 dB/dek, posunutá o $20 \cdot \log K$, kde K je zosilnenie,
   2. Pri jednonásobnom póle v počiatku má prvá asymptota sklon $-20\text{dB}/dek$, pre $\omega = 1$ prechádza bodom $20 \cdot \log K$ a pretína os 0dB pri $\omega = K$.
6. Prvá asymtota prebieha od najnižších kmitočtov $\omega \to 0$ až do kmitočtu zlomu ω_1, ktorý odpovedá prvému členu $(1 + j\omega T_1)$. Nová asymptota má sklon o +20 dB/dek alebo -20 dB/dek väčší ako predošlá asymptota podľa toho či je to člen čitateľa alebo menovateľa, atď.
7. Ak prenos má kvadratický člen, mení sa sklom o ± 40 dB/dek