

Základy automatického riadenia

Prednáška 4 - príklady

doc. Ing. Anna Jadlovská, PhD.,
doc. Ing. Ján Jadlovský, CSc.

Katedra kybernetiky a umelej inteligencie
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Technická univerzita v Košiciach

ZS 2015/2016

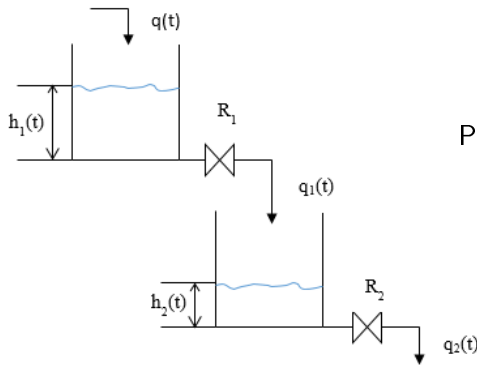
Systemy 2. rádu:

- nevlastné - vznikajú sériovým zapojením systémov 1. rádu
- vlastné - schopné generovať vlastné kmity a nedajú sa rozdeliť na 2 systémy 1. rádu

Príklad 1

Systémy bez vzájomného ovplyvňovania

Systémy bez vzájomného ovplyvňovania



Pre 1. nádrž platí bilančná rovnica:

$$T_1 \frac{dq_1(t)}{dt} + q_1(t) = q(t)$$

Pre 2. nádrž platí bilančná rovnica:

$$T_2 \frac{dh_2(t)}{dt} + h_2(t) = R_2 q_1(t)$$

- vstup: prítok $q(t)$
- výstup: výška hladiny $h_2(t)$

Úloha: určte závislosť výšky hladiny v 2. nádrži od prítoku do 1. nádrže:

$$h_2(t) = f(q(t))$$

Úpravou rovnice pre 2. nádobu:

$$\frac{T_2}{R_2} \frac{dh_2(t)}{dt} + \frac{h_2(t)}{R_2} = q_1(t)$$

$$\frac{dq_1(t)}{dt} = \frac{1}{R_2} \frac{dh_2(t)}{dt} + \frac{T_2}{R_2} \frac{d^2 h_2(t)}{dt^2}$$

a dosadením do rovnice pre 1. nádobu dostávame LDR pre celý systém:

$$q(t) = \frac{T_2}{R_2} \frac{dh_2(t)}{dt} + \frac{h_2(t)}{R_2} + T_1 \left(\frac{1}{R_2} \frac{dh_2(t)}{dt} + \frac{T_2}{R_2} \frac{d^2 h_2(t)}{dt^2} \right)$$

$$T_1 T_2 \frac{d^2 h_2(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dh_2(t)}{dt} + h_2(t) = R_2 q(t)$$

Príklad 1

Systémy bez vzájomného ovplyvňovania

Po vykonaní Laplaceovej transformácie:

$$T_1 T_2 s^2 H_2(s) + (T_1 + T_2) s H_2(s) + H_2(s) = R_2 Q(s)$$

získame prenosovú funkciu systému 2 nádob bez interakcie:

$$F(s) = \frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{R_2}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2) s + 1}$$

Prechodovú funkciu hydraulického systému 2. rádu získame, ak na vstup privedieme skokovú funkciu: $q(t) = Q_0 1(t)$, $Q(s) = Q_0/s$, $q(t) \cong Q(s)$

$$H_2(s) = \frac{R_2}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2) s + 1} \frac{Q_0}{s}$$

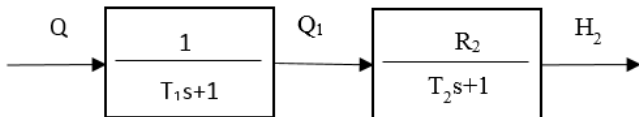
Príklad 1

Systémy bez vzájomného ovplyvňovania

Následným rozkladom na parciálne zlomky a spätnou Laplaceovou transformáciou dostaneme:

$$h_2(t) = R_2 Q_0 \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

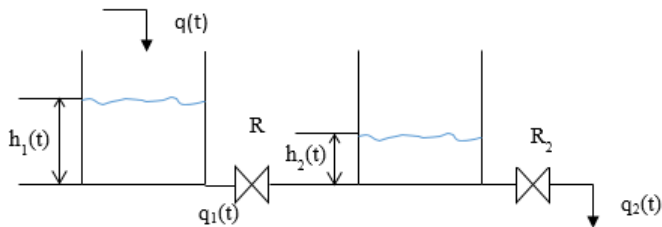
Postup určenia prenosovej funkcie pomocou blokovej algebry:



$$F(s) = F_1(s)F_2(s) = \frac{Q_1(s)}{Q(s)} \frac{H_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{1}{T_1s + 1} \frac{R_2}{T_2s + 1}$$

Príklad 2

Systémy so vzájomným ovplyvňovaním



Prietok medzi 1. a 2. nádržou je závislý od výšky hladiny v 2. nádrži:

$$q_1(t) = \frac{1}{R_1}(h_1(t) - h_2(t))$$

$$q_2(t) = \frac{1}{R_2}h_2(t)$$

Príklad 2

Systémy so vzájomným ovplyvňovaním

Pre daný systém platia nasledovné bilančné rovnice:

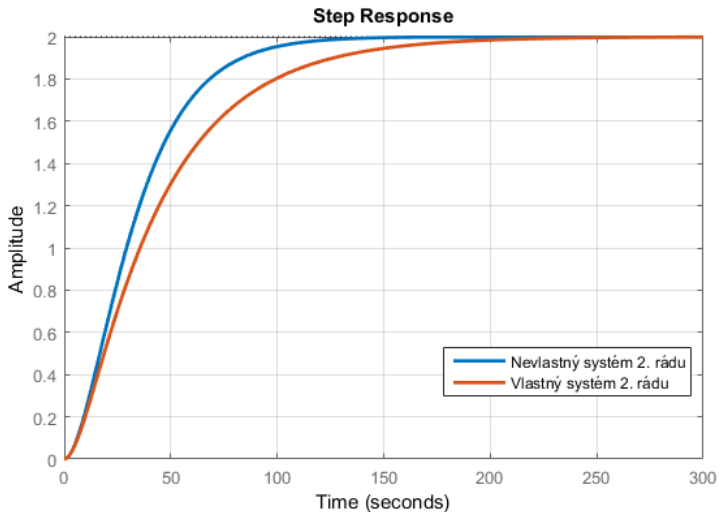
$$q(t) - q_1(t) = A_1 \frac{dh_1(t)}{dt}, \quad q_1(t) = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_1}$$

$$q_1(t) - q_2(t) = A_2 \frac{dh_2(t)}{dt}, \quad q_2(t) = \frac{h_2(t)}{R_2}$$

Nakoľko hľadáme $h_2(t) = f(q(t))$, po eliminovaní $q_1(t)$, $q_2(t)$ a $h_1(t)$ získame prenos funkcie $F(s)$:

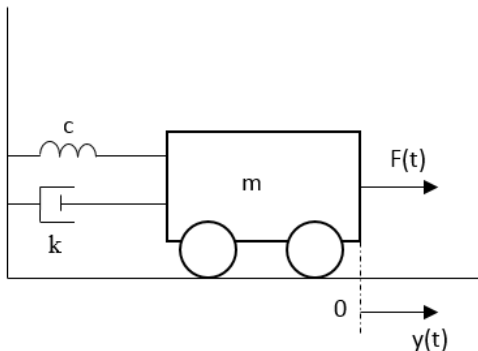
$$F(s) = \frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{R_2}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2 + A_1 R_2)s + 1}$$

Príklad 1 vs. príklad 2



Príklad 3

Vlastný systém 2. rádu



Blok hmotnosti m je uložený na horizontálnej ploche bez trenia a je pripojený k zvislej strune lineárnou pružinou a viskóznym tmičom.

Systém môže oscilovať horizontálne pod vplyvom sily $F(t)$

Úloha: určte prenosovú funkciu $y(t) = f(F(t))$

Príklad 3

Vlastný systém 2. rádu

1. $y(0) = 0$

2. Predpokladajme, že v čase t je blok v polohe $y(t) \neq 0$ a pohybuje sa doprava, $y > 0$, $\frac{dy(t)}{dt} > 0$

3. Na systém pôsobia sily:

- sila pružiny $-cy(t)$ - doľava
- viskózne trenie $-k\frac{dy(t)}{dt}$ - doľava
- vonkajšia sila $F(t)$ - doprava

c - konštanta pružiny, k - koeficient tlmiča

Príklad 3

Vlastný systém 2. rádu

Na základe Newtonovho zákona pohybu dostávame LDR II. rádu:

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -k \frac{dy(t)}{dt} - cy(t) + F(t)$$

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + k \frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = F(t)$$

$$m[\text{kg}], k[\text{Nsm}^{-1}], c[\text{Nm}^{-1}], F(t)[\text{N}]$$

Ak označíme $m/c = T^2$, $k/c = 2\xi T$, $X(t) = F(t)/c$, potom dostaneme upravenú LDR:

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = X(t)$$

Príklad 3

Vlastný systém 2. rádu

$$T = \sqrt{\frac{m}{c}}, \quad \xi = \frac{k}{2c} \frac{1}{T} = \frac{k}{2c} \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{k^2}{4mc}}$$

T [s] časová konštanta, ξ [-] koeficient tlmenia

$T = \frac{1}{\omega_k}$, ω_k - kritická frekvencia

4. Ak v $t < 0$ sa blok nepohybuje, použijeme Laplaceovu transformáciu:

$$T^2 s^2 Y(s) + 2\xi T s Y(s) + Y(s) = X(s)$$

Na charakteristiku systému 2. rádu teda potrebujeme 2 parametre: T a ξ

Príklad 3

Vplyv koeficientu tlmenia na prechodovú charakteristiku

