

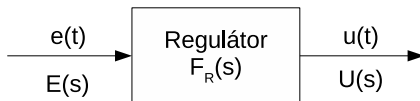
Základy automatického riadenia

Prednáška 6

doc. Ing. Anna Jadlovská, PhD.,
doc. Ing. Ján Jadlovský, CSc.

Katedra kybernetiky a umelej inteligencie
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Technická univerzita v Košiciach

ZS 2015/2016



- $e(t)$ - regulačná odchýlka - vstup do regulátora
- $u(t)$ - akčný zásah - výstup z regulátora
- $E(s)$ - LO regulačnej odchýlky
- $U(s)$ - LO akčného zásahu

Regulátor môže regulačnú odchýlku $e(t)$ zosilňovať, integrovať a derivovať.

P regulátor

akčná veličina je priamo úmerná regulačnej odchýlke $e(t)$:

$$u(t) = r_0 e(t) \quad (1)$$

r_0 - proporcionálne zosilnenie

Prenosová funkcia **P regulátora** $F_R(s)$ má tvar:

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = r_0 \quad (2)$$

Postup pre získanie prechodovej funkcie pre P regulátor:

1. určíme prenosovú funkciu:

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = r_0 \Rightarrow U(s) = r_0 E(s) \quad (3)$$

2. vyjadríme výstup P regulátora - akčný zásah $u_p(t)$ ako odozvu na vstupný signál $e(t) = 1(t)$:

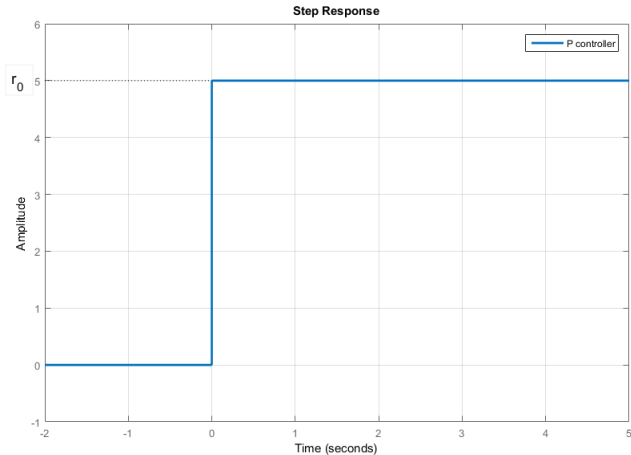
$$U(s) = r_0 E(s) = r_0/s \quad (4)$$

3. prechod z LO do časovej oblasti:

$$u_p(t) = r_0 \quad (5)$$

Regulátory - dynamické vlastnosti

Prechodová charakteristika P regulátora:



I regulátor

akčná veličina $u(t)$ je priamo úmerná integrálu regulačnej odchýlky $e(t)$:

$$u(t) = r_{-1} \int e(t) dt \quad (6)$$

r_{-1} - integračné zosilnenie

Prenosová funkcia I regulátora $F_R(s)$ má tvar:

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{r_{-1}}{s} \quad (7)$$

Postup pre získanie prechodovej funkcie pre I regulátor:

1. určíme prenosovú funkciu:

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{r_{-1}}{s} \Rightarrow U(s) = \frac{r_{-1}}{s} E(s) \quad (8)$$

2. vyjadríme výstup I regulátora - akčný zásah $u_p(t)$ ako odozvu na vstupný signál $e(t) = 1(t)$:

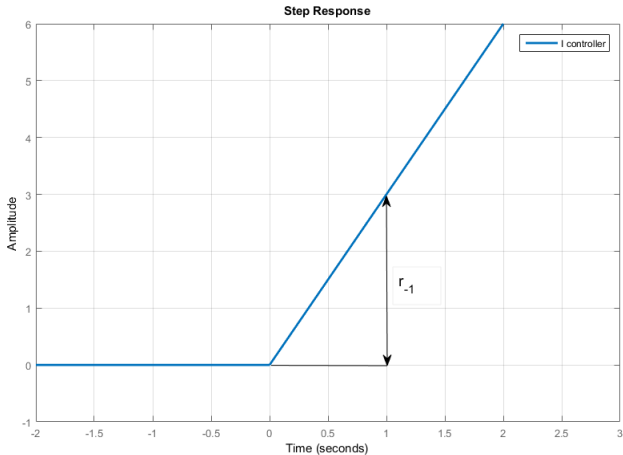
$$U(s) = \frac{r_{-1}}{s} E(s) = \frac{r_{-1}}{s^2} \quad (9)$$

3. prechod z LO do časovej oblasti:

$$u_p(t) = r_{-1}t \quad (10)$$

Regulátory - dynamické vlastnosti

Prechodová charakteristika I regulátora:



D regulátor

akčná veličina $u(t)$ je priamo úmerná derivácii regulačnej odchýlky $e(t)$:

$$u(t) = r_1 \frac{de(t)}{dt} \quad (11)$$

r_1 - derivačné zosilnenie

Prenosová funkcia **D regulátora** $F_R(s)$ má tvar:

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = r_1 s \quad (12)$$

Postup pre získanie prechodovej funkcie D regulátora:

1. určíme prenosovú funkciu:

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = r_1 s \Rightarrow U(s) = r_1 s E(s) \quad (13)$$

2. vyjadríme výstup D regulátora - akčný zásah $u_p(t)$ ako odozvu na vstupný signál $e(t) = 1(t)$:

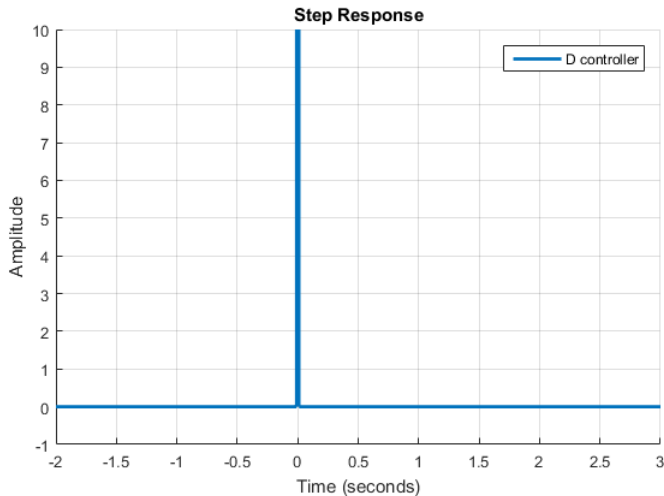
$$U(s) = r_1 s E(s) = r_1 \quad (14)$$

3. prechod z LO do časovej oblasti:

$$u_p(t) \equiv \delta(t) \quad (15)$$

Regulátory - dynamické vlastnosti

Prechodová charakteristika D regulátora:



Následnou kombináciou základných typov regulátorov vzniknú ďalšie typy regulátorov:

PI regulátor

Akčná veličina $u(t)$ je priamo úmerná regulačnej odchýlke $e(t)$ a integrálu regulačnej odchýlky $e(t)$:

$$u(t) = r_0 e(t) + r_{-1} \int e(t) dt \quad (16)$$

Prenosová funkcia **PI regulátora** $F_R(s)$ má tvar:

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} \quad (17)$$

Postup pre získanie prechodovej funkcie PI regulátora:

1. určíme prenosovú funkciu:

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} \Rightarrow U(s) = (r_0 + \frac{r_{-1}}{s}s)E(s) \quad (18)$$

2. vyjadríme výstup PI regulátora - akčný zásah $u_p(t)$ ako odozvu na vstupný signál $e(t) = 1(t)$:

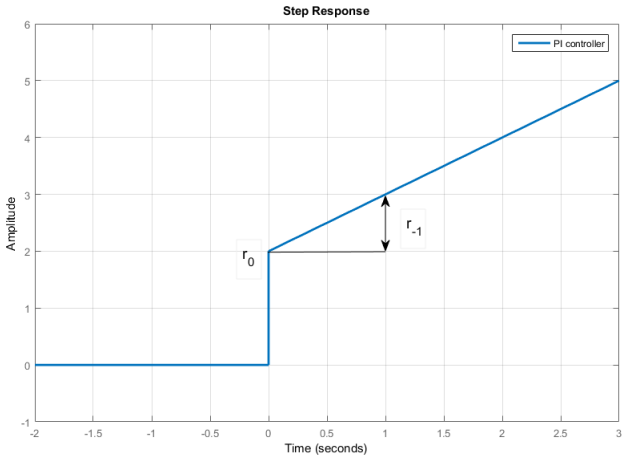
$$U(s) = (r_0 + \frac{r_{-1}}{s})E(s) = r_0/s + \frac{r_{-1}}{s^2} \quad (19)$$

3. prechod z LO do časovej oblasti:

$$u_p(t) = r_0 + r_{-1}t \quad (20)$$

Regulátory - dynamické vlastnosti

Prechodová charakteristika PI regulátora:



PD regulátor

Akčná veličina $u(t)$ je priamo úmerná regulačnej odchýlke $e(t)$ a derivácii regulačnej odchýlky $e(t)$:

$$u(t) = r_0 e(t) + r_1 \frac{de(t)}{dt} \quad (21)$$

Prenosová funkcia **PD regulátora** $F_R(s)$ má tvar:

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = r_0 + r_1 s \quad (22)$$

Postup pre získanie prechodovej funkcie PD regulátora:

1. určíme prenosovú funkciu:

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = r_0 + r_1 s \Rightarrow U(s) = (r_0 + r_1 s)E(s) \quad (23)$$

2. vyjadríme výstup PD regulátora - akčný zásah $u_p(t)$ ako odozvu na vstupný signál $e(t) = 1(t)$:

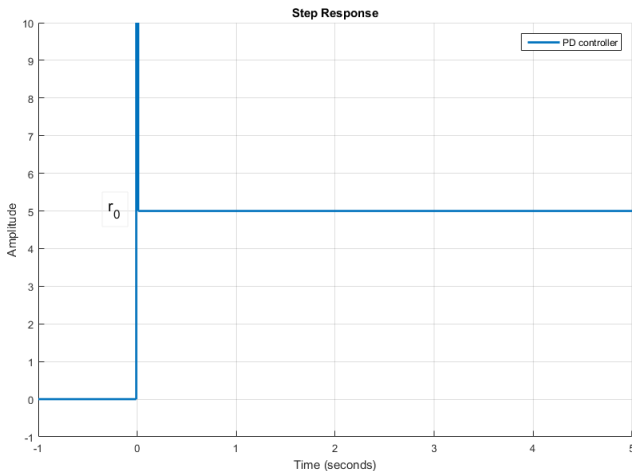
$$U(s) = (r_0 + r_1 s)E(s) = r_0/s + r_1 \quad (24)$$

3. prechod z LO do časovej oblasti:

$$u_p(t) \equiv r_0 + \delta(t) \quad (25)$$

Regulátory - dynamické vlastnosti

Prechodová charakteristika PD regulátora:



PID regulátor

Regulátor PID je vzhľadom k predchádzajúcim typom regulátorov všeobecný typ regulátora. Zákon riadenia v zložkovom tvare:

$$u(t) = r_0 e(t) + r_{-1} \int e(t) dt + r_1 \frac{de(t)}{dt} \quad (26)$$

Prenosová funkcia **PID regulátora** $F_R(s)$ má tvar:

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s \quad (27)$$

Postup pre získanie prechodovej funkcie PID regulátora:

1. určíme prenosovú funkciu:

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s \Rightarrow U(s) = (r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s)E(s) \quad (28)$$

2. vyjadríme výstup PID regulátora - akčný zásah $u_p(t)$ ako odozvu na vstupný signál $e(t) = 1(t)$:

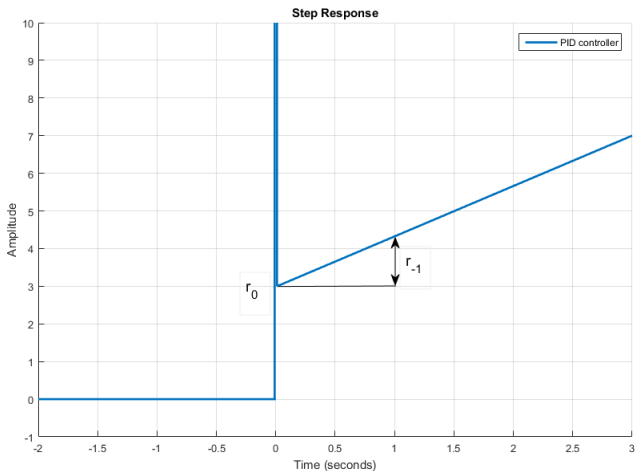
$$U(s) = (r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s)E(s) = r_0/s + \frac{r_{-1}}{s^2} + r_1 \quad (29)$$

3. prechod z LO do časovej oblasti:

$$u_p(t) = r_0 + r_{-1}t + \delta(t) \quad (30)$$

Regulátory - dynamické vlastnosti

Prechodová charakteristika PID regulátora:



Prenosovú funkciu PID regulátora (27) môžeme uviesť aj s využitím časových konštánt T_D a T_i :

$$F_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s = r_0 \left(1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_{-1}} s} + \frac{r_1}{r_0} s \right) = r_0 \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_D s \right) \quad (31)$$

- $r_0[-]$ - zosilnenie regulátora, $r_0 = K$
 - $T_i[s]$ - integračná časová konštanta, $T_i = \frac{r_0}{r_{-1}}$
 - $T_D[s]$ - derivačná časová konštanta, $T_D = \frac{r_1}{r_0}$
-
- r_0 - proporcionálne zosilnenie
 - r_{-1} - integračné zosilnenie
 - r_1 - derivačné zosilnenie

Fyzikálny význam T_i a T_D :

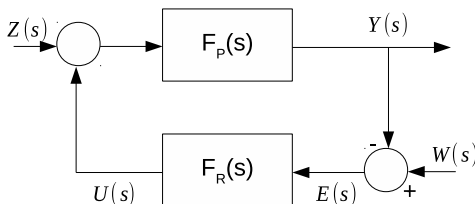
T_i - integračná časová konštanta predstavuje čas, ktorý by potreboval **I-regulátor**, aby prestavil akčný zásah $u(t)$ do polohy, ktorú dosiahne **PI-regulátor** v čase $t = 0$ vplyvom svojej proporcionálnej zložky

T_D - derivačná časová konštanta je čas, ktorý by potreboval **P-regulátor**, aby prestavil akčný zásah $u(t)$ do polohy, ktorý dosiahne **PD-regulátor** v čase $t = 0$ vplyvom svojej derivačnej zložky

Namiesto zosilnenia r_0 sa používa aj termín **pásмо proporcionality** pp : udáva o koľko percent z celého rozsahu sa musí zmeniť vstupný signál regulátora $e(t)$, aby sa výstup $u(t)$ zmenil v celom rozsahu:

$$pp = \frac{1}{r_0} * 100\% \quad (32)$$

Presnosť regulácie- presnosť regulácie v ustálenom režime regulačného obvodu: $t \rightarrow \infty$



Riešime dve úlohy v uzavretom regulačnom obvode:

- eliminácia poruchovej veličiny $z(t)$
- zabezpečiť, aby výstup URO $y(t)$ sledoval zmeny riadiacej veličiny $w(t)$

Požiadavky na presnosť regulácie:

- pri zmene poruchovej veličiny $z(t)$ sa regulovaná veličina $y(t)$ opäť ustáli na pôvodnej hodnote $y(\infty) = y(0)$ a regulačná odchýlka by mala byť:

$$e_z(\infty) = 0 \quad (33)$$

- pri zmene riadiacej veličiny $w(t)$ sa regulovaná veličina $y(t)$ po ukončení prechodového deja zmení na hodnotu riadiacej veličiny $y(\infty) = w(t)$ a regulačná odchýlka by mala byť:

$$e_w(\infty) = 0 \quad (34)$$

Avšak môže nastať prípad, že pri pôsobení poruchy $z(t)$ nebude mať regulovaná veličina $y(t)$ pôvodnú hodnotu. Podobne, po zmene riadiacej veličiny $w(t)$ sa regulovaná veličina $y(t)$ podľa nej nenastaví ani v čase $t \rightarrow \infty$. Opísaný jav v oboch prípadoch nazývame **trvalá regulačná odchýlka**.

Zmeny poruchovej $z(t)$ alebo riadiacej veličiny $w(t)$ sú v praxi úplne bežné, avšak je ťažké ich konkretizovať. Preto zavedieme normovaný testovací vstupný signál:

Jednotkový skok riadiacej/poruchovej veličiny:

$$w(t) = 1, \quad z(t) = 1, \quad t \geq 0 \quad (35)$$

Pri odvodení vzťahov pre trvalé regulačné odchýlky $e_w(\infty)$ a $e_z(\infty)$ budeme vychádzať z definície regulačnej odchýlky:

$$\begin{aligned} E(s) &= W(s) - Y(s) = W(s) - F_P(s)[U(s) + Z(s)] = \\ &= W(s) - F_P(s)F_R(s)E(s) - F_P(s)Z(s) \\ [1 + F_P(s)F_R(s)]E(s) &= W(s) - F_P(s)Z(s) \end{aligned} \quad (36)$$

a teda

$$E(s) = \underbrace{\frac{1}{1 + F_P(s)F_R(s)}}_{F_{E/W}(s)} W(s) - \underbrace{\frac{F_P(s)}{1 + F_P(s)F_R(s)}}_{F_{E/Z}(s)} Z(s) \quad (37)$$

$$E_w(s) = F_{E/W}(s)W(s), \quad E_z(s) = F_{E/Z}(s)Z(s) \quad (38)$$

Následne použitím vety o konečnej hodnote funkcie v LT dostaneme:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + F_P(s)F_R(s)} W(s) - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{F_P(s)}{1 + F_P(s)F_R(s)} Z(s) = \quad (39) \\ &= e_w(\infty) - e_z(\infty) \end{aligned}$$

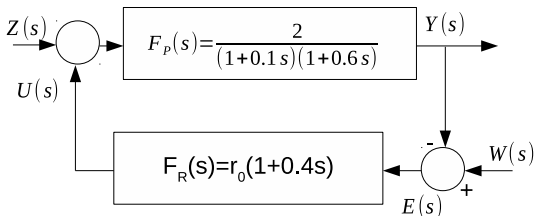
Trvalá regulačná odchýlka spôsobená skokovými zmenami poruchovej $z(t)$ a riadiacej veličiny $w(t)$ sa skladá z dvoch zložiek: trvalej regulačnej odchýlky spôsobenej poruchovou $e_z(\infty)$ a riadiacou veličinou $e_w(\infty)$

$$e_w(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_w(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + F_P(s)F_R(s)} W(s) \quad (40)$$

$$e_z(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_z(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{F_P(s)}{1 + F_P(s)F_R(s)} Z(s) \quad (41)$$

Úloha:

Určte zosilnenie r_0 PD regulátora tak, aby v regulačnom obvode na uvedenom obrázku nebola trvalá regulačná odchýlka pri zmene riadiacej veličiny alebo pri pôsobení poruchy väčšia ako 5%.



Riešenie:

Prenos otvoreného regulačného obvodu $F_O(s)$ je:

$$F_O(s) = \frac{2r_0(1 + 0.4s)}{(1 + 0.1s)(1 + 0.6s)} = \frac{0.8r_0s + 2r_0}{0.06s^2 + 0.7s + 1} \quad (42)$$

CHR otvoreného regulačného obvodu:

$$0.06s^2 + (0.8r_0 + 0.7)s + 2r_0 + 1 = 0 \quad (43)$$

Následne vypočítame trvalú regulačnú odchýlku spôsobenú zmenou riadiacej $w(t)$ a poruchovej veličiny $z(t)$:

$$e_w(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + F_P(s)F_R(s)} W(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{2r_0(1+0.4s)}{(1+0.1s)(1+0.6s)}} = \frac{1}{1 + 2r_0}$$

$$e_z(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{F_P(s)}{1 + F_P(s)F_R(s)} W(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{(1+0.1s)(1+0.6s)}}{1 + \frac{2r_0(1+0.4s)}{(1+0.1s)(1+0.6s)}} = \frac{2}{1 + 2r_0}$$

Aby bola $e_w(\infty) < 5\%$, musí platiť: $\frac{1}{1+2r_0} < 0.05 \Rightarrow r_0 > 9.5$

Aby bola $e_z(\infty) < 5\%$, musí platiť: $\frac{2}{1+2r_0} < 0.05 \Rightarrow r_0 > 19.5$

Presnosť regulácie

Trvalá regulačná odchýlka - príklad

Ak chceme aby bola trvalá regulačná odchýlka rovná nule, musíme použiť regulátor s integračnou zložkou, teda použijeme PID regulátor s integračným zosilnením $T_i = 3s$ a proporcionálnym zosilnením $r_0 = 10$:

$$F_R(s) = 10\left(1 + \frac{1}{3s} + 0.4s\right) \quad (44)$$

Trvalá regulačná odchýlka na zmenu žiadanej veličiny

$$\begin{aligned} e_w(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + 10\left(1 + \frac{1}{3s} + 0.4s\right) \frac{2}{(1+0.1s)(1+0.6s)}} \frac{1}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s(1 + 0.1s)(1 + 0.6s)}{3s(1 + 0.1s)(1 + 0.6s) + 20(3s + 1 + 1.2s^2)} = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

Vyjadrenie prenosov v uzavretom regulačnom obvode s využitím podielu polynómov

Riadený systém $F_P(s)$ a regulátor $F_R(s)$ môžeme vyjadriť ako podiel polynómov:

$$F_P(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad F_R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (46)$$

Z **prednášky 5** vieme, že LO regulovanej veličiny $Y(s)$ v uzavretom regulačnom obvode má tvar:

$$Y(s) = \frac{F_R(s)F_P(s)}{1 + F_R(s)F_P(s)}W(s) + \frac{F_P(s)}{1 + F_R(s)F_P(s)}Z(s) \quad (47)$$

a po dosadení príslušných prenosov systému $F_P(s)$ a regulátora $F_R(s)$ v polynomiálnom tvare dostaneme:

$$Y(s) = \frac{\frac{P(s)}{Q(s)} \frac{B(s)}{A(s)}}{1 + \frac{P(s)}{Q(s)} \frac{B(s)}{A(s)}}W(s) + \frac{\frac{B(s)}{A(s)}}{1 + \frac{P(s)}{Q(s)} \frac{B(s)}{A(s)}}Z(s) \quad (48)$$

Vyjadrenie prenosov v uzavretom regulačnom obvode s využitím podielu polynómov

Po úpravách dostaneme LO regulovanej veličiny systému $Y(s)$ v polynomiálnom tvare:

$$Y(s) = \frac{B(s)P(s)}{A(s)Q(s) + B(s)P(s)}W(s) + \frac{B(s)Q(s)}{A(s)Q(s) + B(s)P(s)}Z(s) \quad (49)$$

polynóm v menovateli: $A(s)Q(s) + B(s)P(s) = 1 + F_0(s)$ nazývame *charakteristický polynóm* uzavretého regulačného obvodu.

Úloha:

Určte Nyquistovu a Bodeho charakteristiky pre PI regulátor.

Riešenie:

Prenos PI regulátora je zadáný v interaktívnom tvare:

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K(1 + \frac{1}{T_i s}) \quad (50)$$

Úpravou LO prenosu regulátora do frekvenčnej oblasti dostaneme:

$$F_R(j\omega) = K(1 + \frac{1}{T_i j\omega}) = K - j\frac{K}{T_i \omega} \quad (51)$$

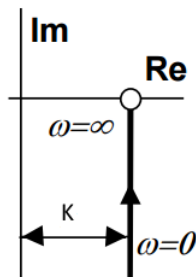
Nyquistova frekvenčná charakteristika

Na základe prenosu regulátora vo frekvenčnej oblasti môžeme priamo určiť *Nyquistovu charakteristiku*:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Im}\{F_R(j\omega)\} = \lim_{\omega \rightarrow 0} (-j) \frac{K}{T_i \omega} = -\infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Im}\{F_R(j\omega)\} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (-j) \frac{K}{T_i \omega} = 0$$

ω	Re	Im
0	K	$-\infty$
∞	K	0
$1/T_i$	K	-K



Bode-ho frekvenčné charakteristiky

Následnou úpravou frekvenčného prenosu PI regulátora vypočítame amplitúdu a fázu frekvenčného prenosu $F_R(j\omega)$:

$$|F_R(j\omega)| = \sqrt{K^2 + \frac{K^2}{T_i^2 \omega^2}} = K \sqrt{\frac{1}{(T_i \omega)^2} + 1} \quad (52)$$

$$\Phi = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im}\{F_R(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{F_R(j\omega)\}} = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{T_i \omega}\right) \quad (53)$$

Vyšetrenie špeciálnych prípadov Bode-ho charakteristiky:

$$20 \log |F_R(j\omega)| = 20 \log K \sqrt{\frac{1}{(T_i\omega)^2} + 1} = 20 \log K \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 + 1} \quad (54)$$

pričom $\omega_0 = 1/T_i$

1. prípad: $\omega \gg \omega_0$:

$$\begin{aligned} 20 \log |F_R(j\omega)| &= 20 \log K \\ \Phi &= 0^\circ \end{aligned} \quad (55)$$

2. prípad: $\omega \ll \omega_0$:

$$\begin{aligned} 20 \log |F_R(j\omega)| &= 20 \log K - 20 \log \omega + 20 \log \omega_0 \\ \Phi &= -\pi/2 = -90^\circ \end{aligned} \quad (56)$$

Regulátory - dynamické vlastnosti: ilustratívny príklad

Bode-ho amplitúdová a fázová frekvenčná charakteristika PI regulátora:

