Základy automatického riadenia

Prednáška 7

doc. Ing. Anna Jadlovská, PhD.,
doc. Ing. Ján Jadlovský, CSc.

Katedra kybernetiky a umelej inteligencie
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Technická univerzita v Košiciach

ZS 2015/2016

Stabilita lineárneho regulačného obvodu

Stabilita je základnou a nevyhnutnou podmienkou správneho fungovania regulačného obvodu.

Lineárny regulačný obvod je stabilný, ak sa po vychýlení z rovnovážneho stavu a po doznení vzruchu, ktorý vychýlenie spôsobil, dokáže opäť ustáliť v rovnovážnom stave.
Nový rovnovážny stav nemusí byť totožný s pôvodným rovnovážnym stavom.

Stabilita je teda schopnosť lineárneho regulačného obvodu ustáliť regulovanú veličinu $y(t)$(respektíve jej prechodovú zložku $y_h(t)$) na pôvodnej hodnote po vychýlení poruchovou veličinou $z(t)$ alebo na novej hodnote pri vychýlení riadiacou veličinou $w(t)$.

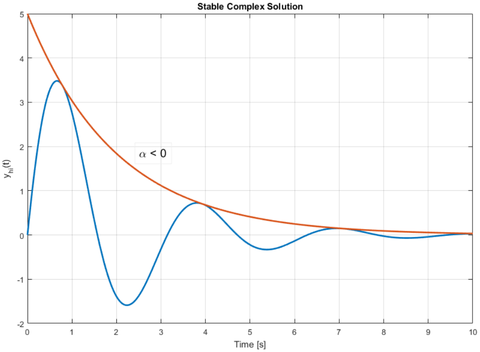
Matematické vyjadrenie stability:

$$\lim_{t \to \infty} y_h(t) = 0 \qquad (1)$$

Stabilita lineárneho regulačného obvodu

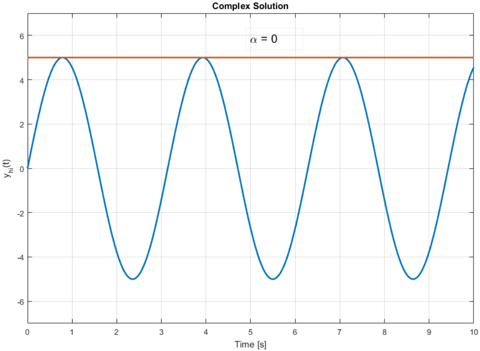
Kmitavý tlmený prechodový dej

Priebeh prechodovej zložky regulovanej veličiny $y_h(t)$ stabilného lineárneho regulačného obvodu je znázornený na obrázku:



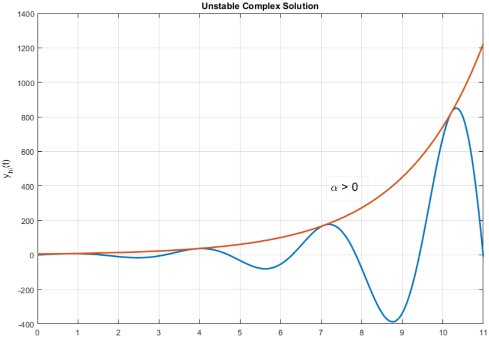
$$s_{1,2} = \alpha \pm j\beta, \longrightarrow y_h(t) = ce^{\alpha t}\sin(\beta t + \phi), \alpha < 0$$

Priebeh prechodovej zložky regulovanej veličiny $y_h(t)$ lineárneho regulačného obvodu na hranici stability je znázornený na obrázku:



$$s_{1,2} = \pm j\beta, \longrightarrow y_h(t) = c \sin(\beta t + \phi), \alpha = 0$$

Priebeh prechodovej zložky regulovanej veličiny $y_h(t)$ nestabilného lineárneho regulačného obvodu je znázornený na obrázku:



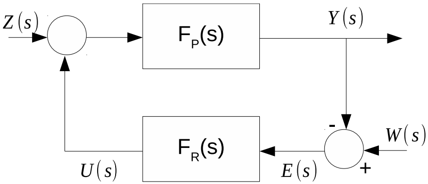
$$s_{1,2} = \alpha \pm j\beta, \longrightarrow y_h(t) = ce^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi), \alpha > 0$$

Stabilita lineárneho regulačného obvodu

Ak má byť uzavretý regulačný obvod stabilný, musí mať charakteristická rovnica odpovedajúca diferenciálnej rovnici regulačného obvodu korene reálne záporné alebo komplexne združené s reálnou zápornou časťou.

Stabilita lineárneho regulačného obvodu

Zatiaľ čo parametre regulovaného systému $F_P(s)$ sú dané jeho konštrukciou a nemôžeme ich teda meniť, môžeme meniť parametre regulátora, prípadne zvoliť vhodnejší typ regulátora tak, aby bola dosiahnutá stabilita lineárneho regulačného obvodu.



Prenos URO vzhľadom na zmenu riadiacej alebo poruchovej veličiny:

$$F_{Y/W}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{F_0(s)}{1+F_0(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0} \tag{2}$$

$$F_{Y/Z}(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{F_P(s)}{1+F_0(s)} = \frac{c_m s^m + \ldots + c_1 s + c_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0} \tag{3}$$

Stabilita lineárneho regulačného obvodu

Prenos riadenia $F_{Y/W}(s)$ a prenos poruchy $F_{Y/Z}(s)$ môžeme previesť na rovnicu regulačného obvodu.
Pravá strana rovnice je modifikovaná podľa toho, ktorá z veličín, t. j. riadiaca $w(t)$ alebo poruchová veličina $z(t)$ vyvolala regulačný pochod:

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \begin{cases} b_m w^{(m)}(t) + \ldots + b_1 w'(t) + b_0 w(t) \\ c_m z^{(m)}(t) + \ldots + c_1 z'(t) + c_0 z(t) \end{cases} \tag{4}$$

Na základe týchto rovníc vieme určiť priebeh regulovanej veličiny $y(t)$ pri rôznych zmenách riadiacej alebo poruchovej veličiny.

Stabilita lineárneho regulačného obvodu

Prechodový dej uzavretého regulačného obvodu je zložený z dvoch častí:

$$y(t) = y_n(t) + y_h(t), \tag{5}$$

- $y_h(t)$ je všeobecné riešenie homogénnej rovnice
- $y_n(t)$ je partikulárne riešenie dané pravou stranou rovníc (4)

Partikulárne riešenie $y_n(t)$ závisí čiste na vstupnej veličine a na stabilitu nemá vplyv, pretože stabilita je posudzovaná až po doznení prechodového deja, ktorý bol získaný poruchovou $z(t)$ alebo riadiacou veličinou $w(t)$.

Stabilita lineárneho regulačného obvodu

Lineárny regulačný obvod je stabilný, ak riešenie homogénnej rovnice

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 y^{'}(t) + a_0 y(t) = 0 \tag{6}$$

sa s rastúcim časom blíži k nule:

$$\lim_{t \to \infty} y_h(t) = 0 \tag{7}$$

Lineárny regulačný obvod je nestabilný, ak riešenie neobmedzene rastie:

$$\lim_{t \to \infty} y_h(t) = \infty \tag{8}$$

a keď ani neobmedzene nerastie, ani neklesá k nule, tak regulačný obvod je na hranici stability.

Podmienky stability - príklad

Uvažujme statický dynamický systém vyjadrený prenosovou funkciou:

$$F_P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0} \tag{9}$$

v spätnej väzbe uvažujeme PD regulátor s prenosom:

$$F_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K(1 + T_D s) \tag{10}$$

Podmienky stability - príklad

Vyjadríme diferenciálnu rovnicu lineárneho regulačného obvodu pre prípad poruchy $z(t)$ na vstupe uzavretého regulačného obvodu:

$$
\begin{aligned}
F_{Y/Z}(s) &= \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{F_P(s)}{1 + F_P(s)F_R(s)} = \\
&= \frac{1}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0 + K + KT_D s} = \\
&= \frac{1}{b_2 s^2 + (b_1 + KT_D)s + (b_0 + K)},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

kde $a_2 = b_2$, $a_1 = b_1 + KT_D$, $a_0 = b_0 + K$
Po substitúcii a_0, a_1, a_2 a prechodom do časovej oblasti dostávame DR lineárneho regulačného obvodu:

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) = Z(s) \tag{12}$$

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = z(t), \tag{13}$$

ktorá je analogická s DR (4).

Riešenie LDR

Charakter prechodovej zložky $y_h(t)$ závisí od charakteru koreňov charakteristickej rovnice $\cong$ od parametrov regulačného obvodu $a_0, a_1, \ldots, a_n$

- ak prechodová zložka $y_h(t)$ je taká, že s rastúcim časom zaniká, tak regulačný obvod je stabilný

$$\lim_{t \to \infty} y_h(t) = 0 \tag{14}$$

- ak platí:

$$\lim_{t \to \infty} y_h(t) = \infty \tag{15}$$

  tak regulačný obvod je nestabilný

Riešenie LDR

Z teórie riešenia LDR je riešenie homogénnej rovnice v tvare:

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{s_i t}, \tag{16}$$

kde c_i sú konštanty určené PP a budiacou funkciou $w(t), z(t)$ a s_i sú korene CHR:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{17}$$

Riešenie LDR

Ak má CHR reálne korene $s_i = \alpha_i$, potom čiastkové riešenie výrazu (16) má tvar:

$$y_{hi} = c_i e^{\alpha_i t} \tag{18}$$

Ak má CHR dvojicu komplexne združených koreňov $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, potom riešenie LDR má tvar:

$$y_{hi} = ce^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi) \tag{19}$$

Ak má CHR dvojicu komplexne združených koreňov $s_{1,2} = \pm j\beta, \alpha = 0$, potom riešenie LDR má tvar:

$$y_{hi} = c \sin(\beta t + \phi) \tag{20}$$

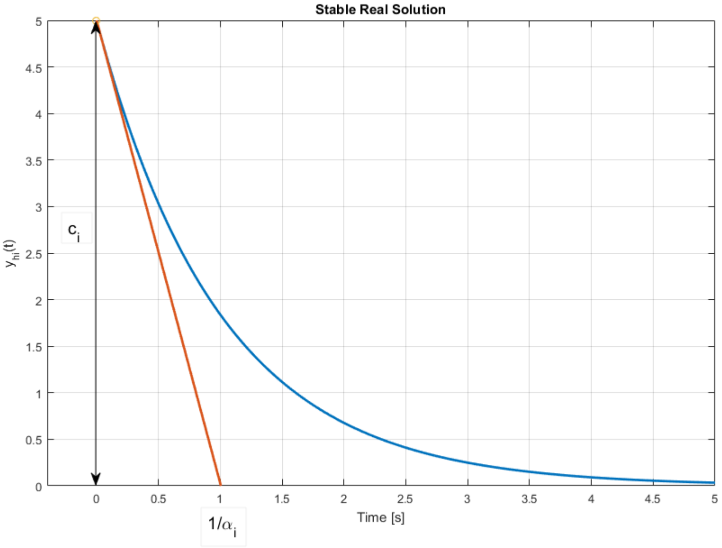
Riešenie LDR - podmienky stability

Výraz $y_{hi} = c_i e^{\alpha_i t}$ predstavuje exponenciálu, ktorá je klesajúca, ak $\alpha_i < 0$, alebo stúpajúca ak $\alpha_i > 0$.

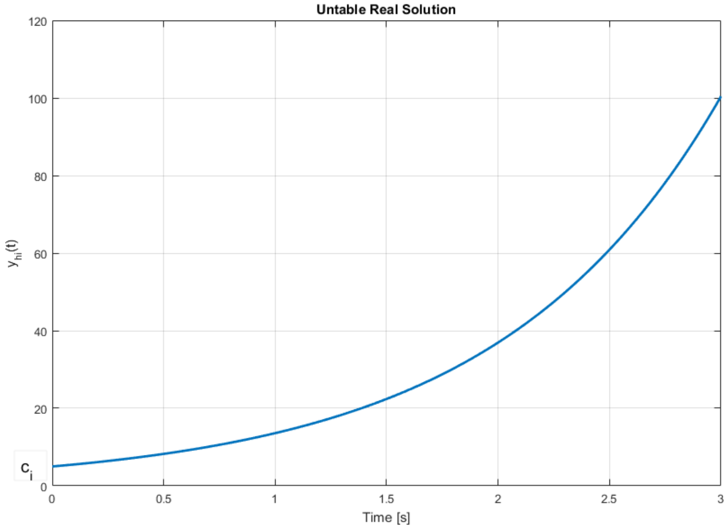
Ak má platiť podmienka:

$$\lim_{t \to \infty} y_h(t) = 0 \tag{21}$$

nesmie mať CHR ani jeden reálny koreň kladný $\Rightarrow$ - všetky reálne korene musia byť záporné.


Stable Real Solution
$y_{hi}(t)$
c_i
$1/\alpha_i$
Time [s]
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Riešenie LDR - podmienky stability



Riešenie LDR - podmienky stability

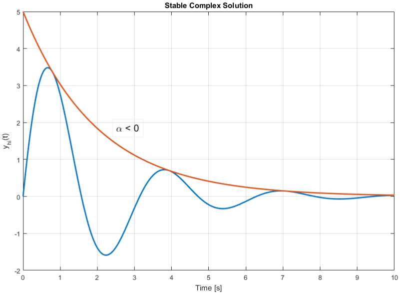
Výraz $y_{hi} = ce^{\alpha t}\sin(\beta t + \phi)$ predstavuje kmitavý harmonický pohyb, ktorý je obmedzený exponenciálou $ce^{\alpha t}$.

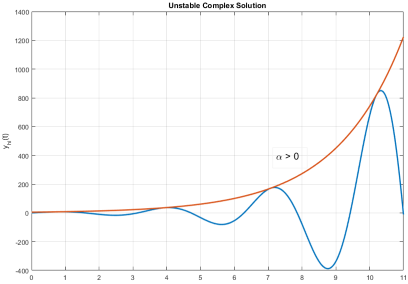
- ak $\alpha < 0 \Rightarrow$ kmity s rastúcim časom klesajú - vznikne kmitavý pochod tlmený (slide 3)
- ak $\alpha > 0 \Rightarrow$ kmity s rastúcim časom budú narastať - kmitavý pohyb netlmený (slide 5)

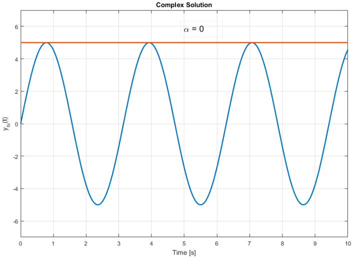
Ak má platiť podmienka stability musia mať všetky komplexne združené korene zápornú reálnu časť.

Výrazu $y_{hi} = c\sin(\beta t + \phi)$ odpovedá harmonický priebeh s konštantnou amplitúdou c (podmienka stability nie je splnená). Regulačný obvod je v tomto prípade neutrálny a nachádza sa na hranici stability(slide 4).

Riešenie LDR - podmienky stability



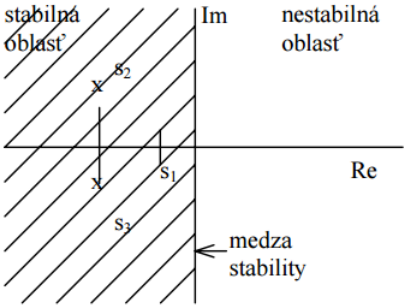




Lineárny regulačný obvod - podmienky stability

Nutná a postačujúca podmienka stability pre lineárny regulačný obvod:

Ak má byť regulačný obvod stabilný musí mať CHR odpovedajúca LDR regulačného obvodu korene reálne záporné alebo komplexne združené s reálnou zápornou časťou.



Kritéria stability

- nepotrebujú k určeniu stability lineárneho regulačného obvodu výpočet koreňov CHR

- algebraické
  - Hurwitzovo kritérium
  - Routh-Shurovo kritérium

- frekvenčné
  - Michajlov-Leonhardovo kritérium
  - Nyquistovo kritérium

Algebraické kritéria stability

Algebraické kritéria (AK) stability:

- vychádzajú z koeficientov charakteristickej rovnice
- dajú sa aplikovať iba v lineárnych regulačných obvodoch, kde CHR je algebraická.

Najpoužívanejšie AK stability:

- Hurwitzovo kritérium
- Routh-Shurovo kritérium

Hurwitzovo kritérium

-pre posúdenie stability vytvoríme z koeficientov CHR: $1 + F_0(s)$ Hurwitzov determinant (HD) n-tého stupňa

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

Postup pre zostavenie HD:

- do HD zapíšeme koeficienty CHR
- stĺpce doplníme tak, aby ich indexy klesali(nahor)
- na mieste, kde by sa nachádzali koeficienty s indexami >n alebo zápornými doplníme 0

Algebraické kritéria stability - HD, n=1, n=2

Podľa Hurwitzovho kritéria je lineárny RO stabilný práve vtedy, ak sú pri splnení podmienky $a_n > 0$ hlavný Hurwitzov determinant a všetky jeho subdeterminanty $D_i > 0$ pre $i = 1, 2, \dots, n$

n = 1:

$$CHR : H(s) = a_1 s + a_0 = 0 \tag{22}$$

Podmienky stability: $a_1 > 0$, $D_1 = a_0 > 0$
n = 2:

$$CHR : H(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \tag{23}$$

Podmienky stability: $a_2 > 0$, $D_1 = a_1 > 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 a_0 > 0$

$D_2 > 0$, ak $D_1 > 0 \leftrightarrow a_0 > 0 : a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$

Algebraické kritéria stability - HD, n=3

n = 3:

$$CHR : H(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \tag{24}$$

Podmienky stability: $a_3 > 0,\ D_1 = a_2 > 0,$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,\ D_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 D_2 > 0$$

Podmienka $D_3 > 0$ pri splnení $D_2 > 0$ je ekvivalentná $a_0 > 0$
Podmienka $D_2 > 0$ pri $a_3 > 0, a_2 > 0, a_0 > 0$ je splnená len pri $a_1 > 0$

Pre $n = 3$ sú podmienky stability:
$a_3 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$

n = 4:

$$CHR : H(s) = a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \tag{25}$$

Podmienky stability: $a_4 > 0$, $D_1 = a_3 > 0$,

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 a_3 - a_1 a_4 > 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 D_3 > 0$$

Algebraické kritéria stability - HD, n=4

Podmienka $D_3 > 0$ možno splniť pri $a_0 > 0, D_2 > 0$ ak platí $a_1 > 0$
Podmienka $D_2 > 0$ pri $a_4 > 0, a_3 > 0, a_1 > 0$ je splnená len pri $a_2 > 0$

Pre $n = 4$ sú podmienky stability:
$a_4 > 0, a_3 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0, a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0$

Algebraické kritéria stability - HD

Záver:
Nevyhnutnou podmienkou stability regulačného obvodu je, aby koeficienty CHR $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$ boli kladné, pričom táto podmienka je pre systémy $n = 1$, $n = 2$ postačujúcou podmienkou.

Podľa Hurwitzovho kritéria je lineárny RO na hranici stability vtedy, ak $D_n = a_0 D_{n-1} = 0$:

1. $a_0 = 0$ - na hranici aperiodickej stability
2. $D_{n-1} = 0$ - na hranici kmitavej stability