

Základy automatického riadenia

Prednáška 8

doc. Ing. Anna Jadlovská, PhD.,
doc. Ing. Ján Jadlovský, CSc.

Katedra kybernetiky a umelej inteligencie
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Technická univerzita v Košiciach

ZS 2015/2016

Frekvenčné kritéria stability: Michajlovo kritérium

Lineárny dynamický systém reprezentovaný fyzikálnym systémom ($f(t) = u(t)$) alebo lineárnym regulačným obvodom ($f(t) = z(t)$, $f(t) = w(t)$), ktorý je vyjadrený LDR:

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \quad (1)$$

s charakteristickou rovnicou:

$$a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (2)$$

je stabilný, ak po substitúcii $s = j\omega$ do charakteristického polynómu $H(s) = 1 + F_0(s)$:

$$H(j\omega) = a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 (j\omega) + a_0 \quad (3)$$

spĺňa dve podmienky:

- pre $\omega = 0$ leží koncový bod vektora $H(j\omega)$ na kladnej polovici reálnej osi
- pri zmene uhlovej frekvencie $\omega \in (0, \infty)$ sa vektor $H(j\omega)$ otočí o uhol $n\frac{\pi}{2}$, teda platí:

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg H(j\omega) = n\frac{\pi}{2} \quad (4)$$

Frekvenčné kritéria stability: Michajlovo kritérium

Uvažujme CHR n-tého stupňa s konšt. reálnymi koeficientami:

$$a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (5)$$

Z ktorej vytvoríme charakteristický polynóm:

$$H(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 \quad (6)$$

Dosadíme do charakteristického polynómu $H(s)$ za $s = j\omega$:

$$H(j\omega) = a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 (j\omega) + a_0 \quad (7)$$

$$H(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \quad (8)$$

$$U(\omega) = a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots \quad (9)$$

$$V(\omega) = a_1 \omega - a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5 - \dots$$

Ak má rovnica $H(s) = 0$ r koreňov v pravej komplexnej polrovine a ďalších $(n-r)$ koreňov v ľavej komplexnej polrovine vieme vyjadriť zmenu argumentu vektora $H(j\omega)$:

$$\Delta_{-\infty < \omega < \infty} \arg H(j\omega) = (n-r)\pi - r\pi = (n-2r)\pi \quad (10)$$

Ak sú všetky korene rovnice $H(s) = 0$ v ľavej časti komplexnej roviny, teda $r = 0$ platí:

$$\Delta_{-\infty < \omega < \infty} \arg H(j\omega) = n\pi \quad (11)$$

Pri uvažovaní zmeny argumentu $\omega \in (0, \infty)$ dostávame:

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg H(j\omega) = n\frac{\pi}{2} \quad (12)$$

Michajlovo kritérium:

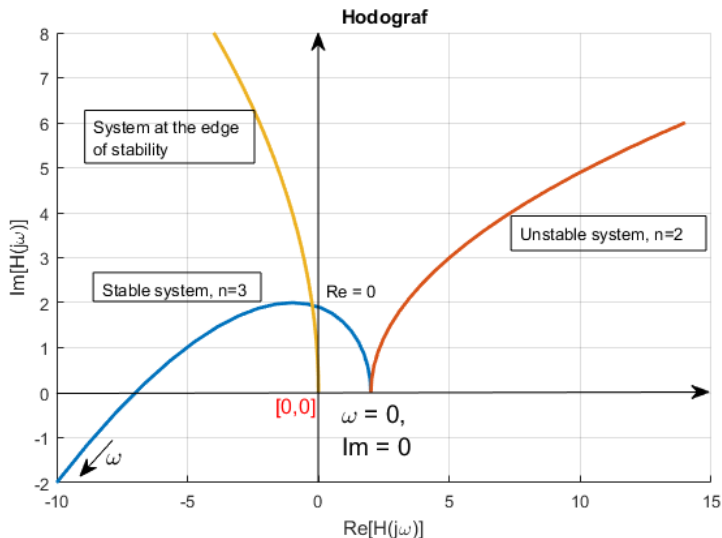
lineárny regulačný obvod n -tého rádu je stabilný, ak sa pri zmene $\omega \in (0, \infty)$ otočí vektor $H(j\omega)$ v kladnom zmysle o uhol $n\frac{\pi}{2}$

Geometrické miesto bodov vektora $H(j\omega)$ pri zmene $\omega \in (0, \infty)$ sa nazýva Michajlov hodograf vektora $H(j\omega)$

Kritérium stability je možné sformulovať:

lineárny regulačný obvod je stabilný, ak Michajlov hodograf $H(j\omega)$ pre $\omega \in (0, \infty)$ začína na reálnej osi a prejde postupne v kladnom zmysle n kvadrantov roviny komplexných čísel, t. j. striedavo pretína reálnu a imaginárnu os.

Frekvenčné kritéria stability - Michajlovo kritérium



Vyšetrovanie stability podľa Michajlovho kritéria: Príklad 1

Príklad:

Podľa Michajlovho kritéria vyšetríte stabilitu lineárneho regulačného obvodu, ak má jeho CHR tvar:

$$0.04s^3 + 0.5s^2 + 2s + 10 = 0$$

Riešenie:

1. Charakteristický polynóm lineárneho regulačného obvodu má tvar:

$$H(s) = 0.04s^3 + 0.5s^2 + 2s + 10 \quad (13)$$

2. Dosadením do charakteristického polynómu $H(s)$ za $s = j\omega$ dostaneme hodograf $H(j\omega)$ uvedeného lineárneho regulačného obvodu:

$$H(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \begin{cases} U(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 & = 10 - 0.5\omega^2 \\ V(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 & = \omega(2 - 0.04\omega^2) \end{cases}$$

3. Následne určíme hodnoty ω , v ktorých budú priesečníky s reálnou a imaginárnou osou.

Priesečníky s reálnou osou: $Im[H(j\omega)] = V(\omega) = 0$

Imaginárnu zložku $V(\omega) = \omega(2 - 0.04\omega^2)$ hodografu $H(j\omega)$ položíme rovnú nule:

$$Im[H(j\omega)] = V(\omega) = 0 \begin{cases} \omega_1 = 0 \\ 2 - 0.04\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega_2 = 7.07 \end{cases}$$

a vypočítané hodnoty ω dosadíme do reálnej zložky $U(\omega) = 10 - 0.5\omega^2$ hodografu $H(j\omega)$:

- $U(\omega_1) = 10$, prvý priesečník s $Re[H(j\omega)]$:
- $U(\omega_2) = -15$, druhý priesečník s $Re[H(j\omega)]$:

Priesečníky s imaginárnou osou: $Re[H(j\omega)] = U(\omega) = 0$

Reálnu zložku $U(\omega) = 10 - 0.5\omega^2$ hodografu $H(j\omega)$ položíme rovnú nule:

$$Re[H(j\omega)] = U(\omega) = 0 \Rightarrow \omega_3 = 4.47$$

a vypočítanú hodnotu ω dosadíme do imaginárnej zložky

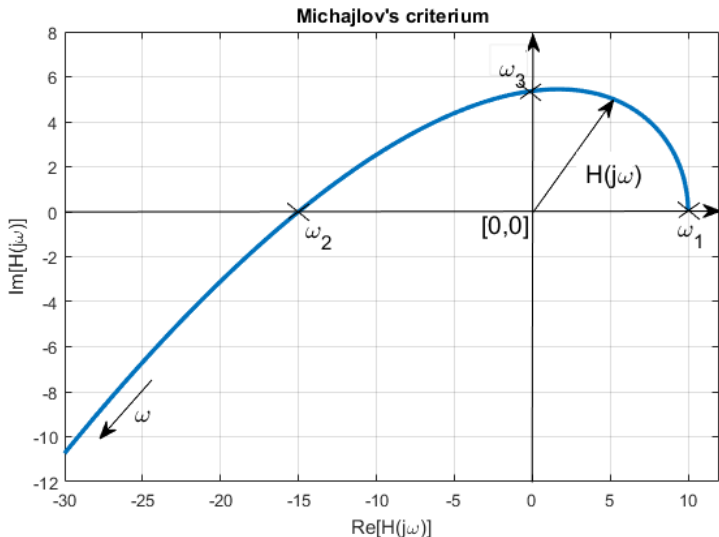
$V(\omega) = \omega(2 - 0.04\omega^2)$ hodografu $H(j\omega)$:

$$V(\omega_3) = 5.364$$

Záver:

Pretože vektor vedený z počiatku ku krivke opíše uhol v kladnom zmysle a prechádza toľkými kvadrantmi akého rádu je systém obvod je stabilný.

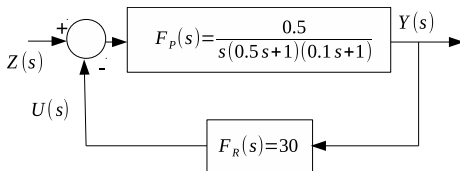
Výšetrenie stability podľa Michajlovho kritéria: Príklad 1



Príklad 2: vyšetrenie stability URO a výpočet kritického parametra P-regulátora využitím Michajlovho kritéria

Príklad:

Je daný regulačný obvod podľa obrázku:



Úlohy:

- 1) vyšetrite stabilitu tohto regulačného obvodu pomocou Michajlovho kritéria
- 2) určte kritické zosilnenie P-regulátora

Riešenie:

1) regulačný obvod je nestabilný

Príklad 2: vyšetrenie stability URO a výpočet kritického parametra P-regulátora využitím Michajlovho kritéria

2) výpočet kritického zosilnenia P-regulátora r_0 :

1. vyjadríme prenos uzavretého regulačného obvodu $F_{Y/Z}(s)$:

$$F_{Y/Z}(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{F_P(s)}{1 + \underbrace{F_P(s)F_R(s)}_{F_0(s)}} = \frac{0.5}{\underbrace{0.05s^3 + 0.6s^2 + s + 0.5r_0}_{H(s)}} \quad (14)$$

2. charakteristický polynóm systému má tvar:

$$H(s) = 0.05s^3 + 0.6s^2 + s + 0.5r_0$$

3. substitúciou $s = j\omega$ do $H(s)$ dostaneme hodograf $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = -0,05j\omega^3 - 0.6\omega^2 + j\omega + 0.5r_0 \begin{cases} U(\omega) & = -0.6\omega^2 + 0.5r_0 \\ V(\omega) & = -0.05\omega^3 + \omega \end{cases}$$

Príklad 2: vyšetrenie stability URO a výpočet kritického parametra P-regulátora využitím Michajlovho kritéria

4. Lineárny regulačný obvod je na hranici stability, ak jeho reálna $Re[H(j\omega)]$ a imaginárna $Im[H(j\omega)]$ zložka prechádza bodom $[0, 0]$ a teda musí platiť $U(\omega) = 0 \wedge V(\omega) = 0$

položením imaginárnej časti $V(\omega)$ hodografu $H(j\omega)$ nule dostaneme hodnoty kritickej frekvencie ω_{KR} :

$$V(\omega) = 0 \Rightarrow \omega_{KR}, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_{KR} = 4.47$$

následne vyjadríme r_0 z reálnej zložky $U(\omega) = 0$ hodografu $H(j\omega)$ a do vyjadreného vzťahu pre r_{0KR} dosadíme vypočítanú hodnotu frekvencie ω_{KR} :

$$U(\omega)_{\omega=\omega_{KR}} = 0 \Rightarrow r_{0KR}, \quad r_{0KR} = \frac{0.6\omega_{KR}^2}{0.5} = 24$$

Nyquistovo kritérium: sformuloval Nyquist v roku 1932

- na vyšetrenie stability uzavretého regulačného obvodu stačí poznať **frekvenčnú charakteristiku otvoreného regulačného obvodu**, ktorú môžeme získať analyticky alebo experimentálne
- CHR URO získame z CHP: $H(s) = 1 + F_0(s)$, ak $1 + F_0(s) = 0$,

kde $F_0(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$ je prenos otvoreného regulačného obvodu

$N(s)$ - CHP otvoreného regulačného obvodu

$M(s), N(s)$ - mnohočleny: $N(s)$ - stupňa n , $M(s)$ - stupňa m

Budeme uvažovať dva prípady:

- 1 obvod v otvorenom stave je stabilný
- 2 obvod v otvorenom stave je nestabilný

1) Obvod v otvorenom stave je stabilný

Ak je systém v otvorenom stave stabilný, potom rovnako ako pri Michajlovovom kritériu platí:

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg N(j\omega) = n \frac{\pi}{2} \quad (15)$$

Ak má byť URO stabilný musí platiť:

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg [N(j\omega) + M(j\omega)] = n \frac{\pi}{2} \quad (16)$$

Na základe vzťahov pre stabilitu otvoreného a uzavretého regulačného obvodu môžeme odvodiť prírastok argumentu charakteristického mnohočlena $1 + F_0(j\omega)$:

$$\begin{aligned}\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg [1 + F_0(j\omega)] &= \Delta_{0 < \omega < \infty} \arg \frac{N(j\omega) + M(j\omega)}{N(j\omega)} = \\ &= \Delta_{0 < \omega < \infty} \arg [N(j\omega) + M(j\omega)] - \Delta_{0 < \omega < \infty} \arg N(j\omega) = n\frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{2} = 0\end{aligned}\quad (17)$$

URO je stabilný, ak je zmena argumentu komplexného výrazu $(1 + F_0(j\omega))$ pre $\omega \in (0, \infty)$ rovná nule.

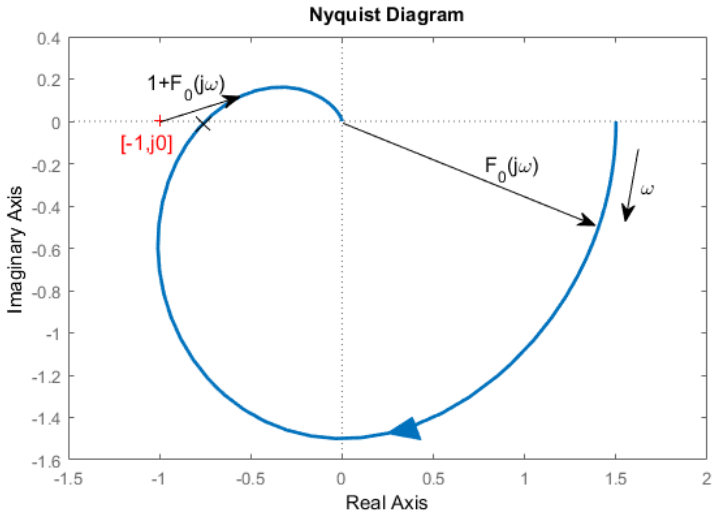
Výraz $(1 + F_0(j\omega))$ možno geometricky znázorniť ako vektor, ktorého začiatok leží v bode $[-1, j0]$ a koncový bod leží na frekvenčnej charakteristike otvoreného regulačného obvodu.

Ak je ORO stabilný, čiže platí $\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg H(j\omega) = n\frac{\pi}{2}$, potom musí bod $[-1, j0]$ ležať mimo frekvenčnej charakteristiky otvoreného regulačného obvodu.

Ak je podmienka pre stabilitu ORO splnená, je stabilný aj URO.

Frekvenčné kritéria stability: Nyquistovo kritérium

Nyquistov diagram otvoreného regulačného obvodu



2) Lineárny regulačný obvod v otvorenom stave je nestabilný nech je obvod v otvorenom stave nestabilný a jeho CHR má r koreňov v pravej časti komplexnej roviny:

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg N(j\omega) = (n - 2r) \frac{\pi}{2} \quad (18)$$

Ak má byť URO stabilný musí platiť:

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg [N(j\omega) + M(j\omega)] = n \frac{\pi}{2} \quad (19)$$

2) Lineárny regulačný obvod v otvorenom stave je nestabilný

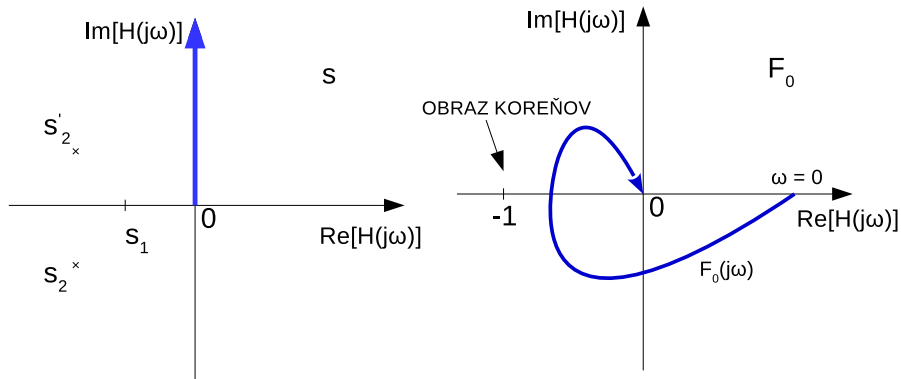
Na základe vzťahov pre stabilitu otvoreného a uzavretého regulačného obvodu môžeme odvodiť prírastok argumentu charakteristického mnohočlena ($1 + F_0(j\omega)$):

$$\begin{aligned}\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg [1 + F_0(j\omega)] &= \Delta_{0 < \omega < \infty} \arg \frac{N(j\omega) + M(j\omega)}{N(j\omega)} = \\ &= \Delta_{0 < \omega < \infty} \arg [N(j\omega) + M(j\omega)] - \Delta_{0 < \omega < \infty} \arg N(j\omega) = n\frac{\pi}{2} - (n - 2r)\frac{\pi}{2} = \frac{r}{2}2\pi\end{aligned}\quad (20)$$

URO je stabilný, ak frekvenčná charakteristika otvoreného obvodu $F_0(j\omega)$ obehne $\frac{r}{2}$ krát bod $(-1, j\omega)$ v kladnom smere.

Frekvenčné kritéria stability: Nyquistovo kritérium

Pri vyšetrení podmienok stability sme určili, že ak má byť URO stabilný, musia korene CHR ($1 + F_0(s) = 0$) ležať vľavo od imaginárnej osi komplexnej roviny s .



Frekvenčné kritéria stability: Nyquistovo kritérium

Pre korene s_1, s_2, \dots, s_n je splnená CHR $F_0(s) = -1$: všetky korene z roviny s sa zobrazia do bodu $(-1, 0j)$ v rovine F_0 .

Imaginárna os je množina bodov, pre ktorú platí $s = j\omega$, kde $\omega \in (-\infty, \infty)$. Pre posúdenie stability berieme do úvahy $\omega \in (0, \infty)$. Teda máme vyšetriť v rovine F_0 krivku, odpovedajúcu vzťahu:

$$F_0(j\omega) = F_R(j\omega)F_P(j\omega) \quad (21)$$

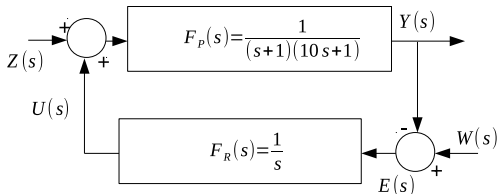
pre $\omega \in (0, \infty)$. Tento vzťah definuje frekvenčnú charakteristiku ORO.

Imaginárna os z roviny s sa zobrazí v rovine F_0 ako frekvenčná charakteristika rozpojeného obvodu: čiže obraz koreňov, t.j. kritický bod, musí ležať vľavo od obrazu imaginárnej osi, teda od frekvenčnej charakteristiky ORO, ak má byť obvod stabilný.

Príklad 3: vyšetrenie stability URO podľa Nyquistovho kritéria

Príklad:

Podľa Nyquistovho kritéria vyšetrite stabilitu lineárneho regulačného obvodu zadaného na obrázku ak $w(t) = 1(t)$:



Riešenie:

1. Určíme prenos otvoreného regulačného obvodu $F_0(s)$:

$$F_0(s) = F_P(s)F_R(s) = \frac{1}{s(s+1)(10s+1)}$$

Príklad 3: vyšetrenie stability URO podľa Nyquistovho kritéria

2. Korene menovateľa $s(s+1)(10s+1)$ sú $s_1 = 0$, $s_2 = -1$, $s_3 = -0.1$. Žiadny z nich neleží v pravej časti komplexnej roviny, preto môžeme použiť Nyquistovo kritérium na vyšetrenie stability.
3. Vyjadríme frekvenčný prenos $F_0(j\omega)$ otvoreného regulačného obvodu:

$$F_0(j\omega) = \frac{-11}{121\omega^2 + (10\omega^2 - 1)^2} + j \frac{10\omega^2 - 1}{\omega(121\omega^2 + (10\omega^2 - 1)^2)}$$

a pre rôzne hodnoty ω vypočítame hodnoty $Re[F_0(j\omega)]$ a $Im[F_0(j\omega)]$ ako aj priesečník s reálnou osou: $Im[F_0(j\omega)] = 0 \rightarrow \omega_{KR} \rightarrow Re[F_0(j\omega)_{\omega=\omega_{KR}}]$

ω	Re	Im
0.2	-2.12	-0.58
0.316	-0.91	0
0.5	-0.34	0.09

ω	Re	Im
0.6	-0.22	0.08
1	-0.05	0.08
2	-0.005	0.01

Príklad 3: vyšetrenie stability URO podľa Nyquistovho kritéria

