

# Základy automatického riadenia

## Prednáška 9

doc. Ing. Anna Jadlovská, PhD.,  
doc. Ing. Ján Jadlovský, CSc.

Katedra kybernetiky a umelej inteligencie  
Fakulta elektrotechniky a informatiky  
Technická univerzita v Košiciach

ZS 2015/2016

1. Pre praktickú použiteľnosť regulačného obvodu je nevyhnutnou podmienkou jeho **STABILITA**.

2. Kvalita lineárneho regulačného obvodu:

- regulovaná veličina  $y(t)$  má sledovať zmeny riadiacej veličiny  $w(t) \rightarrow F_{Y/W}(s)$
- potlačanie vplyvu poruchy  $z(t)$  na regulovanú veličinu  $y(t) \rightarrow F_{Y/Z}(s)$

Kvalita riadenia URO v ustálenom stave charakterizuje **trvalá regulačná odchýlka**  $e(\infty)$ :

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (1)$$

vid' **prednáška 6**:

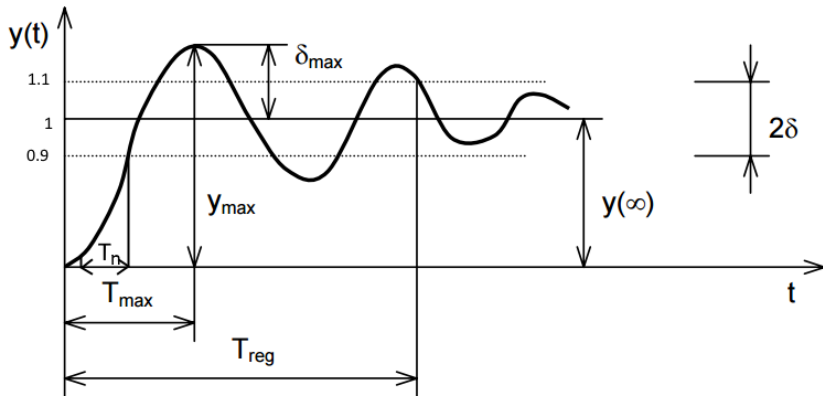
$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + F_P(s)F_R(s)} W(s) - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{F_P(s)}{1 + F_P(s)F_R(s)} Z(s) = \quad (2) \\ &= e_w(\infty) - e_z(\infty) \end{aligned}$$

Pri vyhodnocovaní kvality riadenia v prechodovom deji lineárneho dynamického systému vychádzame z odozvy uzavretého regulačného obvodu na jednotkový skok riadiacej veličiny  $w(t) = 1(t)$ .

Ako príklad uvažujme kmitavý typ prechodovej charakteristiky lineárneho spojitého regulačného obvodu. K ustáleniu prechodového deja dôjde až po nekonečnom čase. Priebeh riadenej veličiny  $y(t)$  budeme považovať za ustálený, ak sa dostane do určitého pásma necitlivosti okolo svojej skutočnej ustálenej hodnoty  $y(\infty)$  a už z daného pásma nevybočí.

# Lineárne spojité systémy riadenia, kvalita riadenia

## Kvalita riadenia v prechodových dejoch



$T_{\text{reg}}$  - čas regulácie

$\delta_{\max}$  - maximálne preregulovanie

$\delta$  - pásmo necitlivosti

$y(\infty)$  - ustálená hodnota riadenej veličiny

### Čas regulácie $T_{reg}$

časový interval vymedzený okamihom jednotkového skoku riadiacej veličiny  $w(t)$  a okamihom, kedy riadená veličina  $y(t)$  poslednýkrát vchádza do pásma necitlivosti  $\pm\delta$  (spravidla maximálne 5%) okolo  $y(\infty)$

čím je čas regulácie kratší, tým je kvalita regulácie lepšia (voľba typu regulátora, jeho štruktúry a parametrov)

### Čas nábehu $T_n$

čas, ktorý uplynie pri nábehu prechodovej charakteristiky od 10% do 90% jej ustálenej hodnoty

### Maximálne preregulovanie $\delta_{max}$

rozdiel maximálnej hodnoty prechodovej charakteristiky a jej ustálenej hodnoty

$$\delta_{max} = y_{max} - y(\infty) \quad (3)$$

Obyčajne ho vyjadrujeme v percentách:

$$\delta_{max} = \frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} 100\% \quad (4)$$

V praxi sa často povoľuje 5% až 50% maximálne preregulovanie

Typ regulátora:

- P regulátor - vhodný pre menej náročné aplikácie, ak nevadí trvalá regulačná odchýlka
- I regulátor - pracuje bez trvalej regulačnej odchýlky, nie je vhodný pre astatické systémy
- PI regulátor - zlepšuje stabilitu oproti I regulátoru a pracuje bez trvalej regulačnej odchýlky
- PD regulátor - zanecháva trvalú regulačnú odchýlku, zložka D je citlivá na šum a zlepšuje stabilitu oproti P regulátoru
- PID regulátor - vhodný pre náročné aplikácie, pracuje bez trvalej regulačnej odchýlky, D zložka zlepšuje stabilitu obvodu a je citlivá na šum, oproti PD regulátoru dokáže lepšie regulovať rýchle deje



Pod návrhom regulačného obvodu rozumieme určenie jeho štruktúry a parametrov tak, aby vyhovovali určitým požiadavkám. Sú to hlavne stabilita, predpísaná presnosť regulácie v ustálenom režime a požadovaná kvalita prechodového procesu pri riadení a pri potláčaní porúch.

Pri návrhu regulačného obvodu môžeme mať rôzne východiskové podmienky:

- 1 nemáme žiadne obmedzenia pri voľbe štruktúry a parametrov RO až na fyzikálnu realizovateľnosť
- 2 časť štruktúry a parametrov RO je zadaná
- 3 štruktúra je úplná zadaná a treba určiť len niektoré parametre RO

Okrem východiskových podmienok pri návrhu RO potrebujeme poznať:

- vlastnosti riadeného systému
- predpokladaný priebeh riadiacej veličiny  $w(t)$
- predpokladaný priebeh poruchových veličín  $z(t)$
- obmedzenia akčných veličín
- požiadavky na kvalitu riadenia

Metódy návrhu PID regulátora:

- metóda Ziegler-Nichols
- metóda Naslin
- metóda optimálneho modulu
- metóda voľby pólov

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy Ziegler-Nichols

Využívaná v praxi pre svoju jednoduchosť.

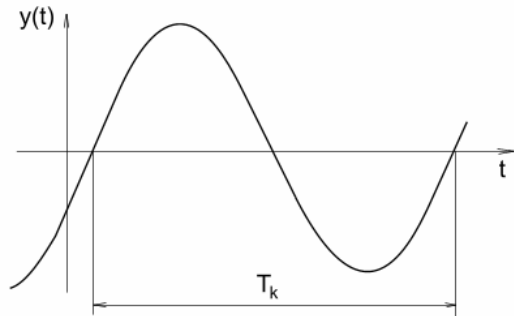
Metóda Z-N je založená na výpočte kritického zosilnenia  $r_{0KR}$  a kritickej periódy  $T_K$  v URO

Poznáme tri spôsoby zistenia kritických parametrov systému v URO:

- experimentálne určenie kritických parametrov  $r_{0KR}$ ,  $T_K$  z prechodovej charakteristiky systému (z doby nábehu a doby prietahu)
- použiť relé bez hysterézie v spätnej väzbe
- určenie kritických parametrov na základe známeho prenosu URO s využitím Nyquistovho alebo Michajlovho kritéria

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy Ziegler-Nichols, analytický výpočet

Metóda vychádza z hranice stability URO. Ak z prenosu regulátora  $F_R(s)$  vyradíme integračnú a derivačnú zložku ( $r_{-1} = r_1 = 0$ ) a vypočítame zosilnenie regulátora  $r_{0KR}$ , obvod sa dostane na hranicu stability (v obvode nastanú trvalé kmity s periódou  $T_K$ )



$y(t)$  - regulovaná veličina URO

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy Ziegler-Nichols, analytický výpočet

Výpočet kritického zosilnenia  $r_{0KR}$ :

1. vychádzame z CHR URO:

$$1 + F_S(s)F_R(s) = 0 \quad (5)$$

2. do CHR dosadíme zadaný prenos sústavy  $F_S(s)$  a prenos proporcionálneho regulátora  $F_R(s) = r_0$ :

$$\begin{aligned} 1 + F_S(s)r_0 &= 0 \\ a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

kde  $a_0 = f(r_0)$

3. následne použijeme v CHR substitúciu  $s = j\omega$ :

$$a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega) + a_0 = 0 \quad (7)$$

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy Ziegler-Nichols, analytický výpočet

Na výpočet kritického zosilnenia použijeme Michajlovo kritérium (kritický bod  $[0, 0] \Rightarrow U(\omega) = 0 \wedge V(\omega) = 0$ )

4. CHR vyjadríme v zložkovom tvare:

$$U(\omega) + jV(\omega) = 0 \quad (8)$$

5. výpočet  $T_K$ :

$$V(\omega) = 0 \Rightarrow \omega_{KR} \Rightarrow T_K = \frac{2\pi}{\omega_{KR}} \quad (9)$$

6. kritické zosilnenie  $r_{0KR}$  získame:

$$U(\omega)_{\omega=\omega_{KR}} = 0 \Rightarrow r_{0KR} \quad (10)$$

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy Ziegler-Nichols, analytický výpočet

7. konštanty P, PI, PID regulátora vypočítame na základe kritických hodnôt  $T_K$  a  $r_{0KR}$  využitím Tab.1

Regulátor	$r_0$	$r_{-1}$	$r_1$
P	$r_0 = 0.5r_{0KR}$	—	—
PI	$r_0 = 0.45r_{0KR}$	$r_{-1} = \frac{r_0}{T_i} = \frac{r_0}{0.85T_K}$	—
PID	$r_0 = 0.6r_{0KR}$	$r_{-1} = \frac{r_0}{T_i} = \frac{r_0}{0.5T_K}$	$r_1 = r_0 T_D = 0.125 T_K r_0$

Tab. 1

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy Ziegler-Nichols, príklad

## Úloha:

Na základe Ziegler-Nicholsovej metódy vypočítajte parametre P, PI a PID regulátora, ak je daný prenos regulovaného systému  $F_P(s)$ :

$$F_P(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

## Riešenie:

1. vychádzame z CHR URO ( $F_{Y/W}(s), F_{Y/Z}(s)$ ) a dosadíme do nej prenos systému  $F_P(s)$  a prenos proporcionálneho regulátora  $F_R(s) = r_{0KR}$ :

$$1 + F_0(s) = 0$$

$$1 + \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} r_{0KR} = 0$$

$$s^3 + 6s^2 + 11s + \underbrace{6 + r_{0KR}}_{a_0} = 0$$



# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy Ziegler-Nichols, príklad

2. následne použijeme v CHR substitúciu  $s = j\omega$ :

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 11(j\omega) + 6 + r_{0KR} = 0$$

3. s využitím Michajlovho kritéria vyjadríme CHR v zložkovom tvare:

$$U(\omega) + jV(\omega) = 0$$

$$U(\omega) = -6\omega^2 + 6 + r_{0KR}, \quad V(\omega) = -\omega^3 + 11\omega$$

4. získame kritickú frekvenciu  $\omega_{KR}$  na základe podmienky:

$$V(\omega) = 0 \Rightarrow \omega(-\omega_{KR}^2 + 11) = 0 \Rightarrow \omega_{KR} = 3.317$$

a vypočítame periódu kmitov na hranici stability:

$$T_K = \frac{2\pi}{\omega_{KR}} = 1.89s$$

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy Ziegler-Nichols, príklad

5. kritické zosilnenie  $r_{0KR}$  získame na základe podmienky:

$$U(\omega)_{\omega=\omega_{KR}} = 0 \Rightarrow -6\omega_{KR}^2 + 6 + r_{0KR} = 0 \Rightarrow r_{0KR} = 60$$

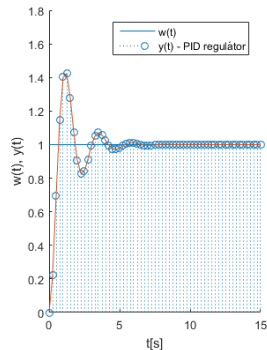
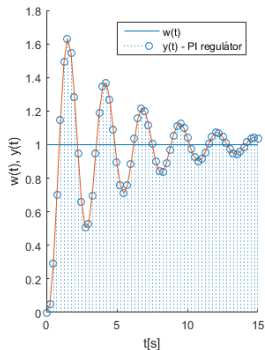
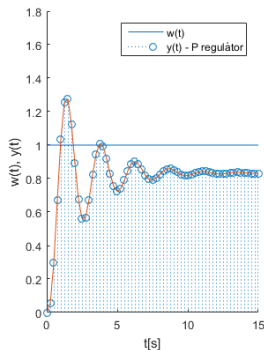
6. konštanty P, PI a PID regulátora vypočítame dosadením vypočítaných kritických hodnôt  $T_K$  a  $r_{0KR}$  do vzorcov v tabuľke:

Regulátor	$r_0$	$r_{-1}$	$r_1$
P	30	—	—
PI	27	17,2	—
PID	36	38	8,52

$$P : F_R(s) = 30, \quad PI : F_R(s) = 27 + \frac{17.2}{s}, \quad PID : F_R(s) = 36 + \frac{38}{s} + 8.52s$$

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy Ziegler-Nichols, príklad

Odozva riadenej veličiny  $y(t)$  na zmenu  $w(t) = 1(t)$



# Návrh parametrov PID regulátora pomocou Naslinovej metódy

Naslinová metóda pre výpočet parametrov  $r_0, r_{-1}, r_1$  PID regulátora vychádza z CHR URO ( $F_{Y/W}(s), F_{Y/Z}(s)$ ):

$$1 + F_S(s)F_R(s) = 0 \quad (11)$$
$$a_n s^n + \dots + a_{i+1} s^{i+1} + a_i s^i + a_{i-1} s^{i-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0,$$

kde  $a_0, \dots, a_n$  sú koeficienty lineárneho RO.

Medzi trojicami za sebou idúcich koeficientov CHR platí Naslinov vzťah:

$$a_i^2 = \alpha a_{i+1} a_{i-1} \quad (12)$$

konštantu  $\alpha$  treba voliť na základe prípustného preregulovania  $\delta_{max}$

$\delta_{max}[\%]$	16	12	8	5	3	1
$\alpha$	1.75	1.8	1.9	2	2.2	2.4

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou Naslinovej metódy, príklad

## Úloha:

Na základe Naslinovej metódy vypočítajte parametre PI regulátora, ak je daný prenos regulovaného systému  $F_P(s)$ :

$$F_P(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}, \quad F_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s}$$

a prípustné preregulovanie je  $\delta_{max} = 5\%$

## Riešenie:

1. Vyjadríme prenos URO  $F_{Y/W}(s), F_{Y/Z}(s)$ :

$$F_{Y/W}(s) = \frac{F_0(s)}{1 + F_0(s)} = \frac{Y(s)}{W(s)}$$

2. zostavíme CHR:

$$1 + F_0(s) = 1 + \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \left( r_0 + \frac{r_{-1}}{s} \right) = 0$$

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + (6 + r_0)s + r_{-1} = 0$$

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou Naslinovej metódy, príklad

3. Pre zadané prípustné preregulovanie  $\delta_{max} = 5\%$  na základe tabuľky určíme hodnotu konštanty  $\alpha = 2$ . Koeficienty CHR si zapíšeme do pomocnej tabuľky:

$a_i$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
Hodnota:	$r_{-1}$	$6 + r_0$	11	6	1

4. Pre prvú trojicu koeficientov  $a_1, a_2, a_3$  na základe Naslinovho vzťahu získame hodnotu proporčionálnej konštanty  $r_0$ :

$$a_2^2 = 2a_1a_3 \Rightarrow 11^2 = 2(6 + r_0)6 \Rightarrow r_0 = 4.083$$

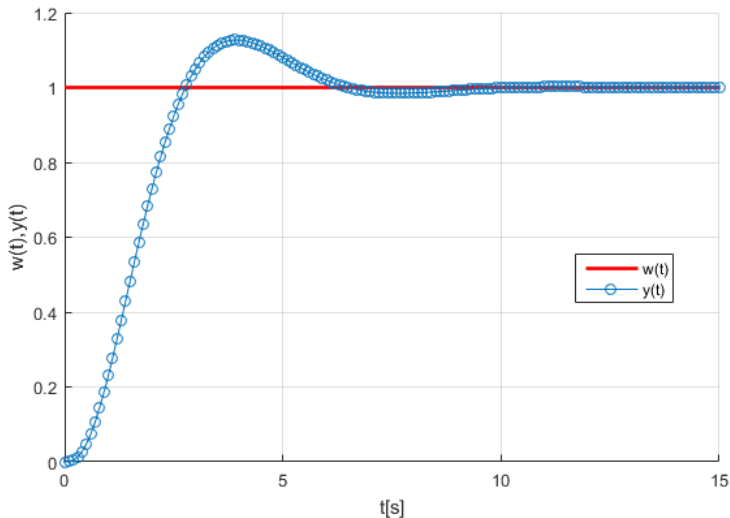
Pre druhú trojicu  $a_0, a_1, a_2$  dostávame hodnotu integračnej konštanty:

$$a_1^2 = 2a_0a_2 \Rightarrow (6 + r_0)^2 = 2r_{-1}11 \Rightarrow r_{-1} = 4.62$$

Tým máme určené parametre PI regulátora:

$$F_R(s) = 4,083 + \frac{4,62}{s}$$

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou Naslinovej metódy, príklad



# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy voľby pólův

Ide o analytickú metódu, pomocou ktorej je možné zabezpečiť aby CHR lineárneho RO, ktorá odpovedá CHP:  $N_{URO}(s)$ :

$$a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (13)$$

mala žiadané korene  $s_i = \alpha + j\beta$ :

$$N_{ref}(s) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = d_n s^n + \dots + d_1 s + d_0 \quad (14)$$

Porovnaním charakteristického polynómu  $N_{URO}(s)$  s referenčným polynómom  $N_{ref}(s)$  pri odpovedajúcich mocninách vieme určiť parametre PID regulátora.

Pre zaistenie stability URO musia ležať všetky korene CHR v ľavej časti komplexnej roviny, t.j.  $\alpha_i < 0, i = 1, \dots, n$

Ideálnemu PID regulátoru je možné nastaviť maximálne tri parametre:  $r_0, r_{-1}$  a  $r_1$ , teda nie je možné vždy dosiahnuť ľubovoľné korene CHR URO.



# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy voľby pólův

Pri voľbe koreňov CHR URO vychádzame z určitých odporúčaní:  
pri voľbe viacerých koreňov CHR URO je vhodné zvoliť násobné korene:

- $n = 2$ 
  - pre kmitavý URO zvoliť  $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$
  - pre nekmitavý URO zvoliť  $s_1 = s_2 = \alpha$
- $n = 3$ 
  - pre kmitavý URO zvoliť  $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta, s_3 = \gamma$
  - pre nekmitavý URO zvoliť  $s_1 = s_2 = s_3 = \alpha$
- $n = 4$ 
  - pre kmitavý URO zvoliť  $s_{1,2} = s_{3,4} = \alpha \pm j\beta$
  - pre nekmitavý URO zvoliť  $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = \alpha$

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy voľby pólov

A) Pre požadovaný **nekmitavý priebeh regulačného pochodu** sú všetky korene CHR URO reálne, ktoré volíme ako viacnásobné korene

B) Pre požadovaný **kmitavý priebeh regulačného pochodu** je možné imaginárnu zložku koreňa  $\beta$  voliť nasledovne:

B1) **ak je dynamický systém nekmitavý**, tak volíme imaginárnu časť požadovaného koreňa  $\beta$  primerane k dominantnej časovej konštante  $T$  systému:

$$\beta = \frac{2\pi}{T}\kappa, \quad (15)$$

kde pre dynamický systém 1. rádu  $\kappa \in \langle 1; 2 \rangle$  a pre dynamický systém 2. rádu  $\kappa \in \langle 0,5; 1,5 \rangle$

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy voľby pólov

B2) ak je dynamický systém kmitavý, tak volíme imaginárnu časť požadovaného koreňa  $\beta$  primerane k netlmenej frekvencii  $\omega_0$  systému:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 K_u u(t) \quad (16)$$

a to:

$$\beta = \kappa\omega_0, \quad \kappa \in \langle 1; 2 \rangle \quad (17)$$

Hodnotu reálnej zložky  $\alpha$  požadovaného koreňa CHR URO je možné pre oba prípady: B1) aj B2) určiť pomocou súčiniteľa pomerného tlmenia:

$$\eta = \frac{|\alpha|}{\beta} \Rightarrow |\alpha| = \beta\eta, \quad (18)$$

kde  $\eta \in \langle 0.5; 1 \rangle$

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy voľby pólov, príklad

## Úloha:

Určte parametre PI regulátora pre systém popísaný prenosom:

$$F_P(s) = \frac{0.1}{s^2 + 0.7s + 0.1}, \quad F_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s}$$

tak aby výsledný URO bol:

- a) kmitavý
- b) nekmitavý

## Riešenie:

Zostavíme CHR URO:

$$s^3 + 0.7s^2 + (0.1 + 0.1r_0) + (0.1r_{-1}) = 0 \quad (19)$$

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy voľby pólov, príklad

a) pre kmitavý URO sú zvolené korene CHR

$$s_{1,2} = \alpha \pm j\beta, s_3 = \gamma \quad (20)$$

kde  $\alpha, \beta, \gamma$  sú reálne čísla. Charakteristický polynóm URO má potom tvar:

$$\begin{aligned} (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) &= (s - \alpha - j\beta)(s - \alpha + j\beta)(s - \gamma) = \\ &= s^3 + s^2(-2\alpha - \gamma) + s(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\gamma) - (\alpha^2 + \beta^2)\gamma \end{aligned} \quad (21)$$

Charakteristický polynóm URO uvedený v (19) musí byť rovný charakteristickému polynómu URO (21):

$$s^0 : 0.1r_{-1} = -(\alpha^2 + \beta^2)\gamma \quad (22)$$

$$s^1 : 0.1 + 0.1r_0 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\gamma \quad (23)$$

$$s^2 : 0.7 = -2\alpha - \gamma \quad (24)$$

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy voľby pólov, príklad

Z (24) je zrejmé, že nie je možné voliť ľubovoľné  $\alpha$  a  $\beta$ , pretože medzi nimi existuje väzba. Pri voľbe koreňov CHR URO budeme vychádzať z vlastností samotného systému a z jeho CHR:

$$s^2 + 0.7s + 0.1 = 0 \quad (25)$$

pre korene  $s_1, s_2$  a časové konštanty  $T_1, T_2$  platí:

$$s_1 = -0.2, \quad T_1 = \frac{1}{|s_1|} = 5s, \quad s_2 = -0.5, \quad T_2 = \frac{1}{|s_2|} = 2s \quad (26)$$

Dominantný koreň CHR systému je ten, ktorý leží najbližšie k imaginárnej osi, teda:  $s_1$ , ku ktorému sa vzťahuje časová konštanta  $T_1$ . Zvolíme parameter  $\kappa = 1$ :

$$\beta = \frac{2\pi}{T_1} = 1.256[\text{rad} * s^{-1}] \quad (27)$$

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy voľby pólov, príklad

Pre voľbu  $\alpha = \beta$  zo vzťahu (24) plynie:

$$\alpha \doteq 0.233 \quad (28)$$

Následne za základe vzťahov (22) a (23) dostávame parametre PI regulátora  $r_0$  a  $r_{-1}$  :

$$r_0 \doteq 16.4, \quad r_{-1} \doteq 3.8s^{-1} \quad (29)$$

Prenos PI regulátora pre požadovaný kmitavý priebeh URO je:

$$F_R(s) = 16.4 + \frac{3.8}{s} \quad (30)$$

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy voľby pólov, príklad

b) pre nekmitavý prechodový dej URO volíme viacnásobné reálne korene:

$$s_1 = s_2 = s_3 = \alpha \quad (31)$$

Charakteristický polynóm URO má potom tvar:

$$(s - \alpha)^3 = s^3 - 3\alpha s^2 + 3\alpha^2 s - \alpha^3 \quad (32)$$

Charakteristický polynóm URO uvedený v (19) musí byť rovný charakteristickému polynómu URO (32):

$$s^0 : 0.1r_{-1} = -\alpha^3 \quad (33)$$

$$s^1 : 0.1 + 0.1r_0 = 3\alpha^2 \quad (34)$$

$$s^2 : 0.7 = -3\alpha \quad (35)$$



# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy voľby pólov, príklad

Zo vzťahu (35) plynie:

$$\alpha \doteq -0.233 \quad (36)$$

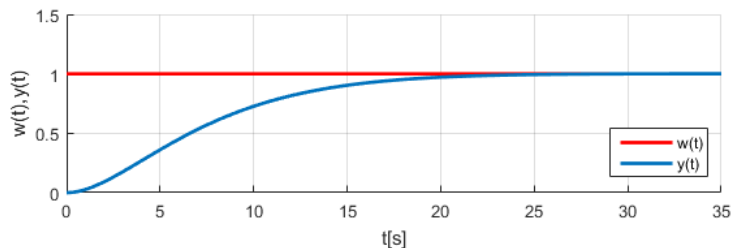
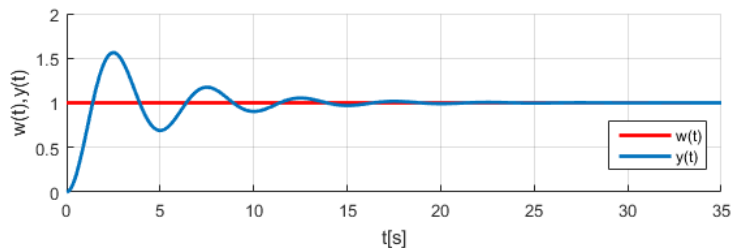
Následne za základe vzťahov (33) a (34) dostávame parametre PI regulátora  $r_0$  a  $r_{-1}$  :

$$r_0 \doteq 0.63, \quad r_{-1} \doteq 0.13s^{-1} \quad (37)$$

Prenos PI regulátora pre požadovaný kmitavý priebeh URO je:

$$F_R(s) = 0.63 + \frac{0.13}{s} \quad (38)$$

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy voľby pólov, príklad



# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy optimálneho modulu

metóda optimálneho modulu vychádza z ideálnej prenosovej funkcie URO  $F_{Y/W}(s)$ , ktorá by sa mala rovnať jednej:

$$F_{Y/W}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{F_0(s)}{1 + F_0(s)} \stackrel{!}{=} 1 \quad (39)$$

v tomto prípade by platilo  $y(t) = w(t)$  pre všetky  $t$ . Autori tejto metódy vychádzali z kvadrátu modulu frekvenčnej prenosovej funkcie URO:

$$|F_{Y/W}(j\omega)|^2 = M^2(\omega) = M(\omega)M(-\omega) \stackrel{!}{=} 1 \quad (40)$$

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy optimálneho modulu

Ak rozdelíme prenosovú funkciu URO  $F_{Y/W}(s)$  na jej reálnu a imaginárnu zložku:

$$F_{Y/W}(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \quad (41)$$

potom pre kvadrát modulu tiež platí:

$$\begin{aligned} M^2(\omega) &= \left| \frac{F_0(j\omega)}{1 + F_0(j\omega)} \right|^2 = \left| \frac{U(\omega) + jV(\omega)}{1 + U(\omega) + jV(\omega)} \right|^2 = \\ &= \frac{U^2(\omega) + V^2(\omega)}{1 + 2U(\omega) + U^2(\omega) + V^2(\omega)} \stackrel{!}{=} 1 \end{aligned} \quad (42)$$

táto podmienka je splnená pre:

$$1 + 2U(\omega) = 0 \quad (43)$$

odkiaľ vyplýva podmienka pre reálnu zložku prenosovej funkcie URO:

$$U(\omega) = -\frac{1}{2} \quad (44)$$

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy optimálneho modulu

Štruktúru regulátora volíme teda tak, aby sa frekvenčná charakteristika ORO v čo najširšom rozsahu frekvencií nachádzala v blízkosti priamky  $U(\omega) = -1/2$  alebo sa s ňou stotožnila.

Pri určovaní optimálnych parametrov  $r_0, r_{-1}, r_1$  vychádzame z prenosovej funkcie regulovaného systému:

$$F_P(s) = \frac{K}{1 + a_1s + a_2s^2 + \dots} \quad (45)$$

potom pre frekvenčnú prenosovú funkciu ORO  $F_0(s)$  platí:

$$F_0(j\omega) = F_P(j\omega)F_R(j\omega) = \frac{K [r_0 + j(r_1\omega - r_{-1}/\omega)]}{1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots + j(a_1\omega - a_3\omega^3 + \dots)} \quad (46)$$

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy optimálneho modulu

Frekvenčnú prenosovú funkciu ORO

$$F_0(j\omega) = \frac{K [r_0 + j(r_1\omega - r_{-1}/\omega)]}{1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots + j(a_1\omega - a_3\omega^3 + \dots)} \quad (47)$$

rozdelíme na reálnu  $U(\omega)$  a imaginárnu  $V(\omega)$  časť. Reálnu časť  $U(\omega)$  položíme rovnú  $-0.5$  a po odstránení zlomku dostaneme:

$$\begin{aligned} K(r_0 - a_1r_{-1}) + K(r_1a_1 + a_3r_{-1} - r_0a_2)\omega^2 + K(r_0a_4 - r_1a_3 - r_{-1}a_5)\omega^4 + \dots = \\ = -0.5 [1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega^2 + (a_2^2 + 2a_4 - 2a_1a_3)\omega^4 + \dots] \end{aligned} \quad (48)$$

# Návrh parametrov PID regulátora pomocou metódy optimálneho modulu

Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách  $\omega$  na oboch stranách tejto rovnice pre PID regulátor dostaneme systém lineárnych rovníc:

$$\begin{bmatrix} a_1 & -1 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 \\ a_5 & -a_4 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{-1} \\ r_0 \\ r_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2K} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_1^2 + 2a_2 \\ a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_4 \end{bmatrix} \quad (49)$$

a ich riešením dostaneme optimálne parametre PID regulátora  $r_0, r_{-1}, r_1$