

# Nelineární systémy

**2 / Příklady**

# Přehled

1. Úvod

2. Příklady

3. Matematické základy

4. Stabilita a Lyapunovova funkce

5. Řízení NS pomocí přibližné linearizace. Gain scheduling

6. Řízení NS pomocí strukturálních metod – základní pojmy

7. Struktura a řízení NS s jedním vstupem a výstupem

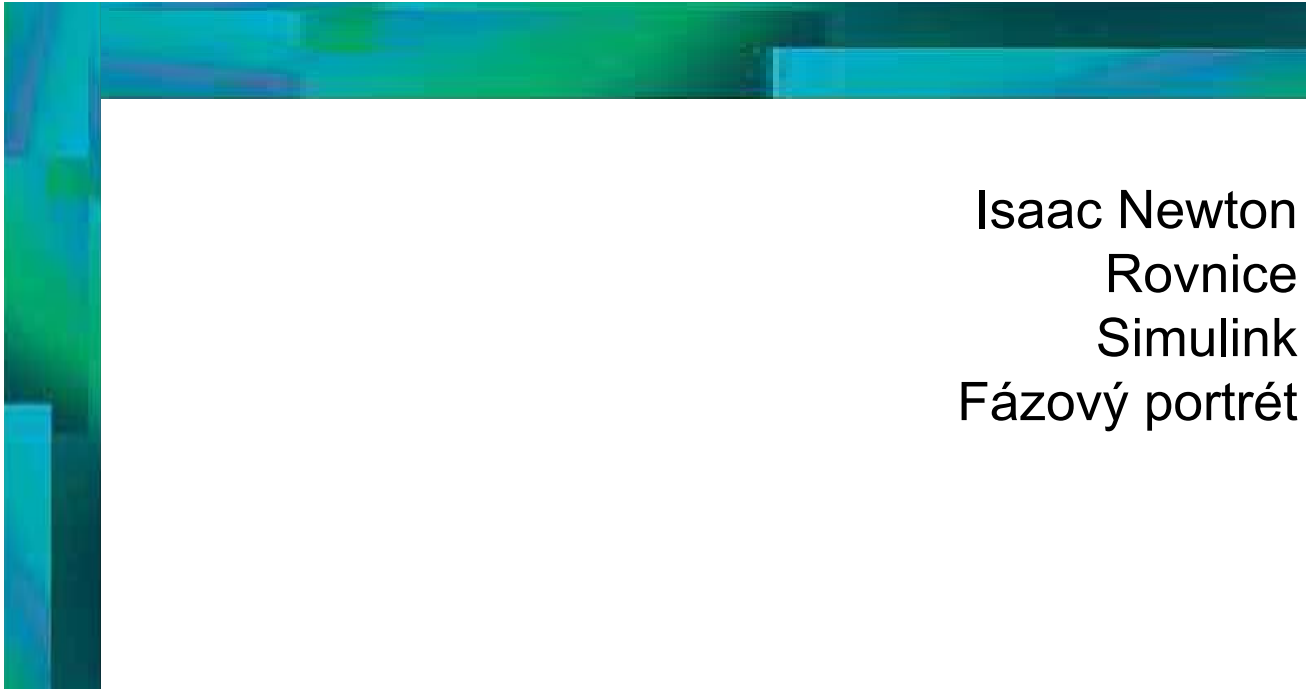
8. Struktura a řízení NS s více vstupy a výstupy

# NS2 - Obsah

## NS2. Příklady

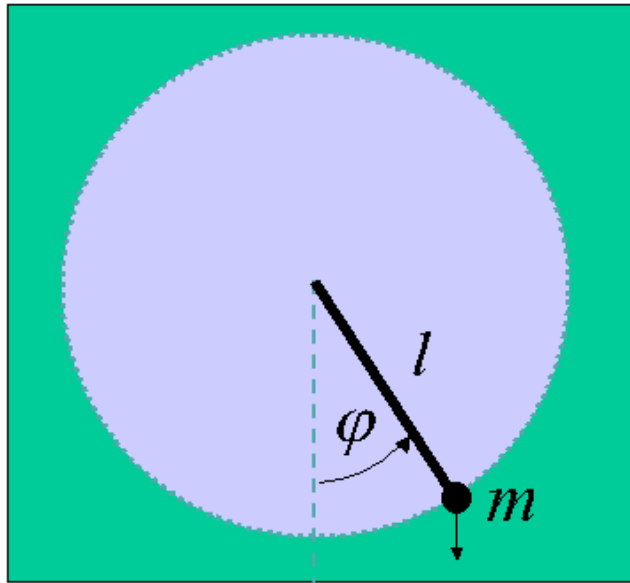
- **Tlumené kyvadlo – podle Newtona**
- **Oscilátor – podle Van der Pola**
- **Nosník – podle Eulera**
- **Dravci a oběti – podle Volterry**
- **DW oscilátor**
- **Příklad řízeného systému „ball and beam“**

# Tlumené kyvadlo – podle Newtona



Isaac Newton  
Rovnice  
Simulink  
Fázový portrét

# Tlumené kyvadlo - rovnice



Pohybová rovnice v tečném směru

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi - kl\dot{\varphi}$$

Pro stavové proměnné

$$x_1 = \varphi, x_2 = \dot{\varphi}$$

dostaneme model

Podobné rovnice:

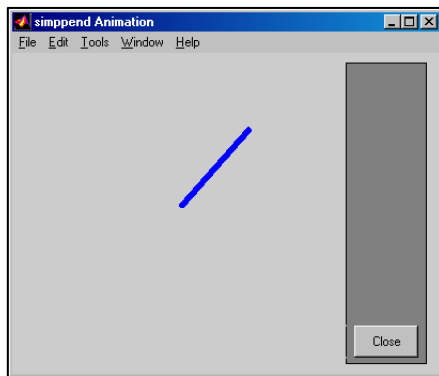
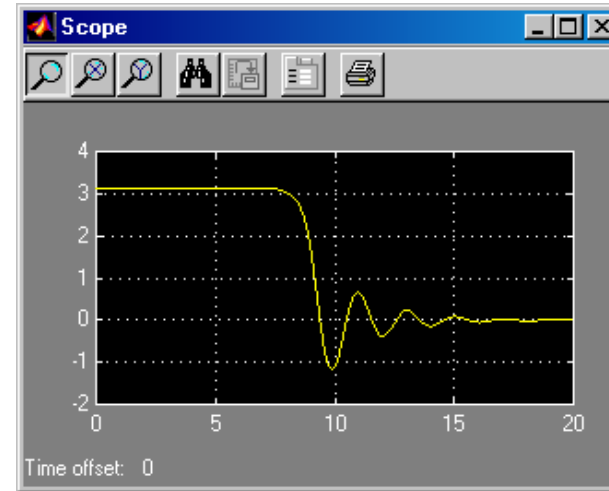
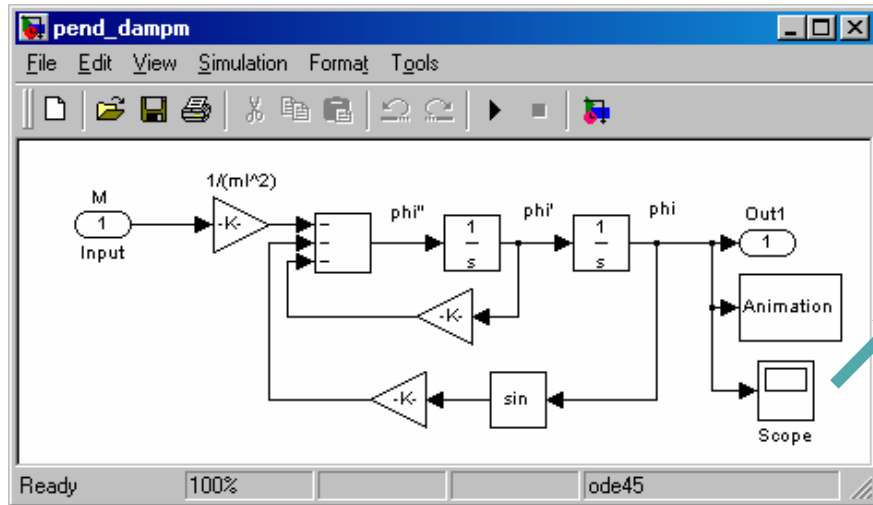
- synchronní generátor připojený na nekonečné vedení
- Josephsonvy obvody

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1) \end{aligned}$$

# Tlumené kyvadlo - Simulink

Model v Simulinku

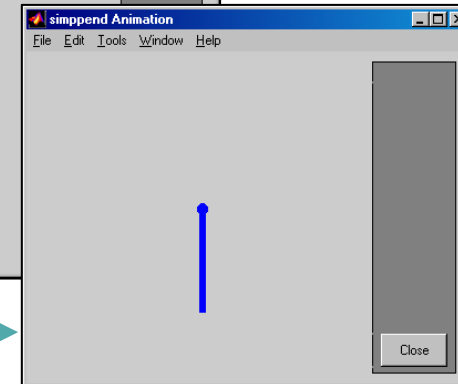
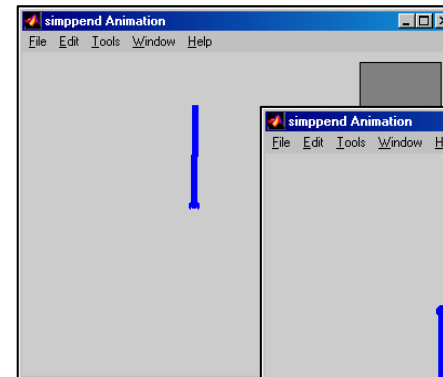
pend\_damp



$$x_1 = \pi, x_2 = 0$$

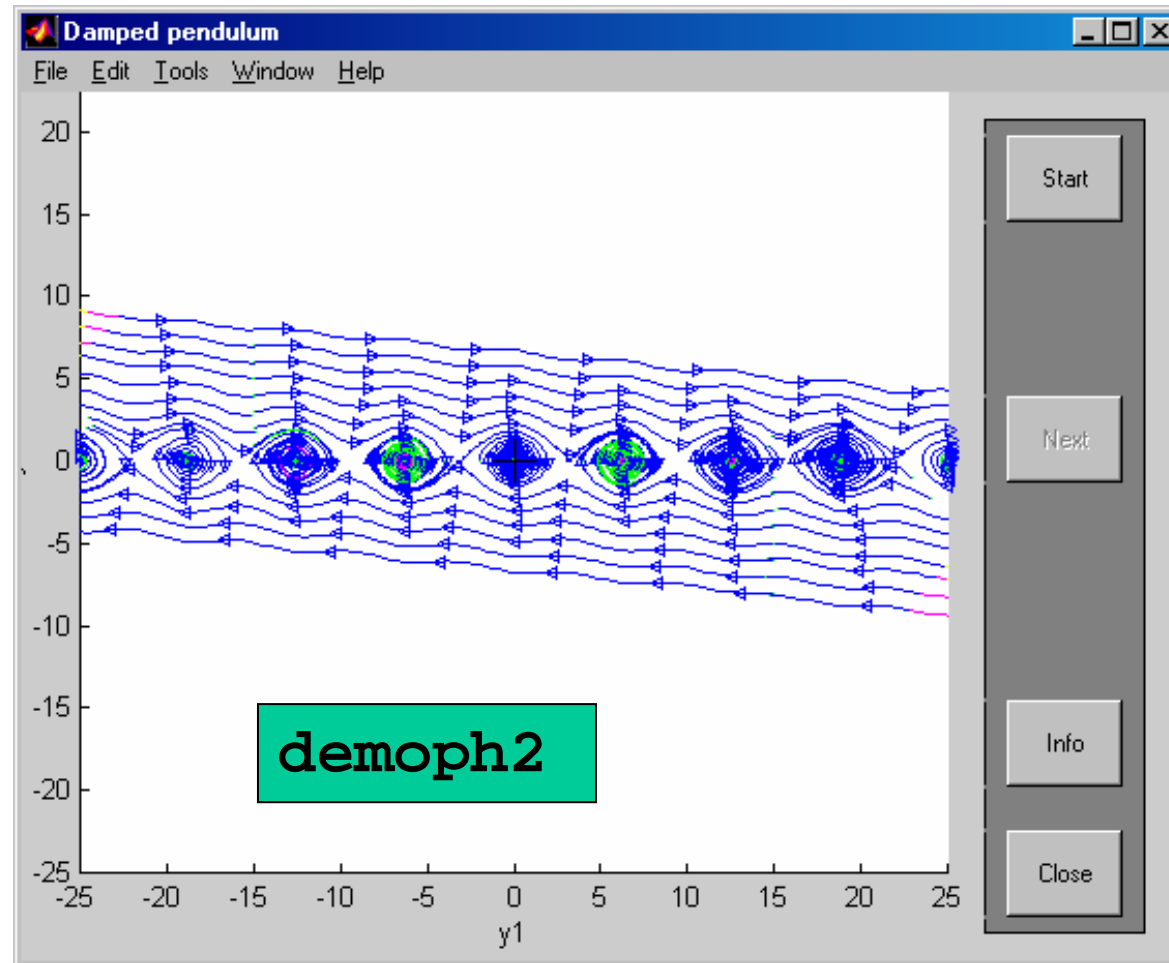


cokoli jiného

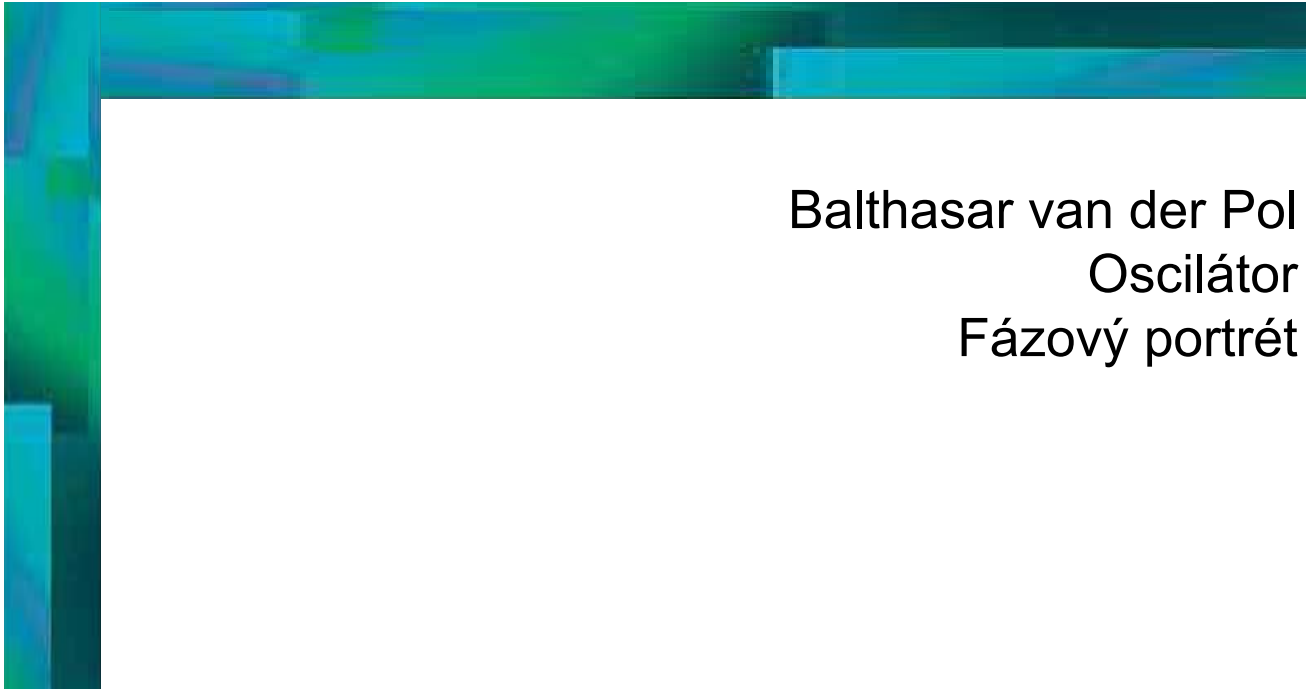


# Tlumené kyvadlo - fázový portrét

fázový portrét tlumeného kyvadla



# Oscilátor – podle van der Pola



Balthasar van der Pol  
Oscilátor  
Fázový portrét

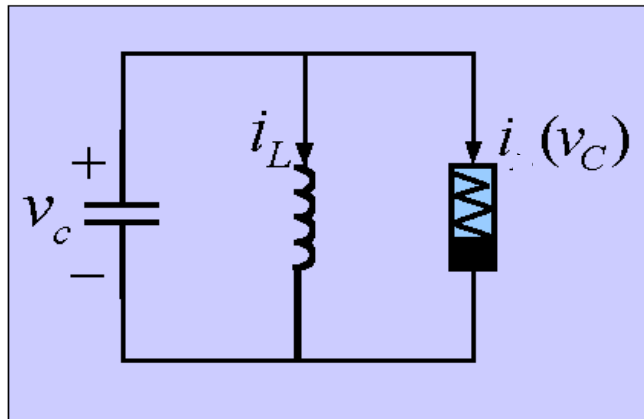


# Balthasar van der Pol

Balthasar van der Pol, 1889-1959

- Holandský elektroinženýr. Jako jeden z prvních studoval experimentálně dynamiku v laboratoři v dvacátých a třicátých letech. Zkoumal elektrické obvody s vakuovými lampami a objevil, že mohou mít stabilní oscilace, dnes nazývané limitní cykly.
- V roce 1927 publikoval (s kolegou van der Markem) v Nature článek o „nepravidelném šumu“, který pozoroval pro některé budící frekvence. Z rekonstrukce jeho pokusů dnes víme, že objevil deterministický chaos.
- Sestrojil mnoho elektronkových modelů lidského srdce a na nich studoval jeho dynamiku. Zkoumal vliv buzení analogický vlivu kardiostimulátoru. Snažil se najít způsob, jak stabilizovat srdeční arytmie.

# Oscilátor

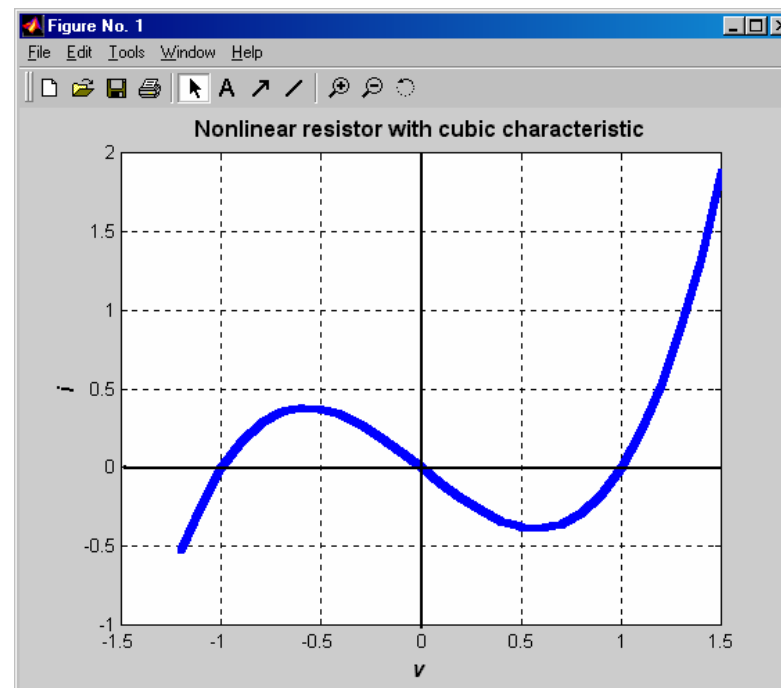


RLC obvod s lineárními  $L$ ,  $C$  a nelineárním rezistorem s kubickou charakteristikou

$$i = \alpha v(v^2 - 1)$$

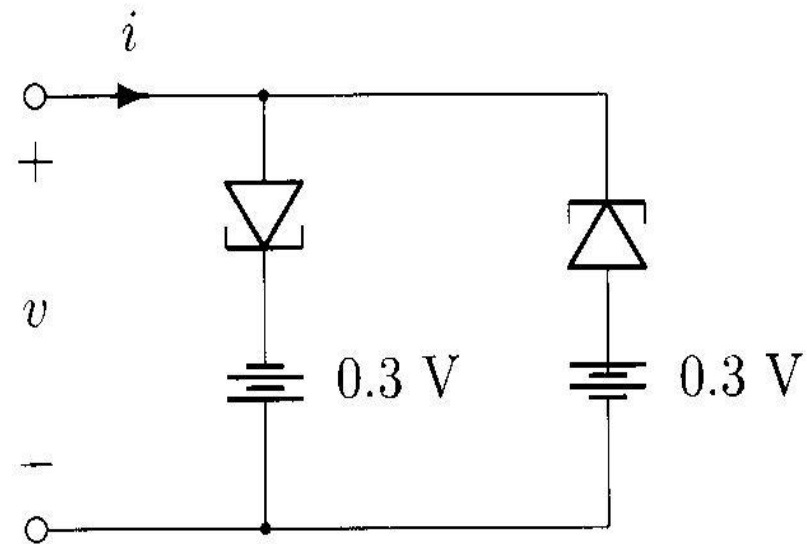
Pro stavy  $x_1 = \dot{i}_L$ ,  $x_2 = v_C$  jsou stavové rovnice

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{L} x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{C} \left( x_1 + \alpha x_2 (x_2^2 - 1) \right) \end{aligned}$$

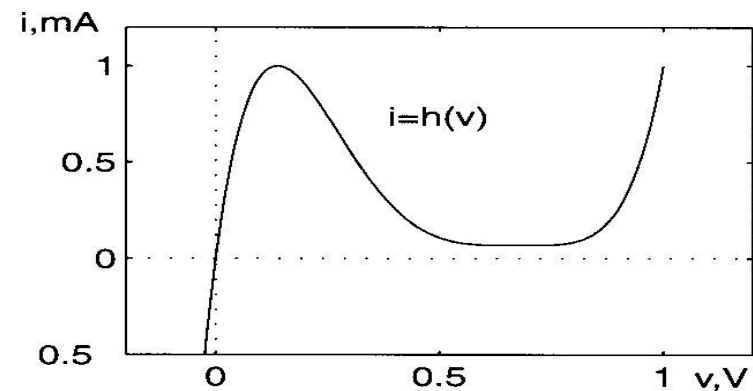


# Realizace aktivního odporu

- pomocí tunelových diod



- charakteristika tunelové diody



# Oscilátor - fázový portrét

Fázový portrét pro

$$L = C = 1$$

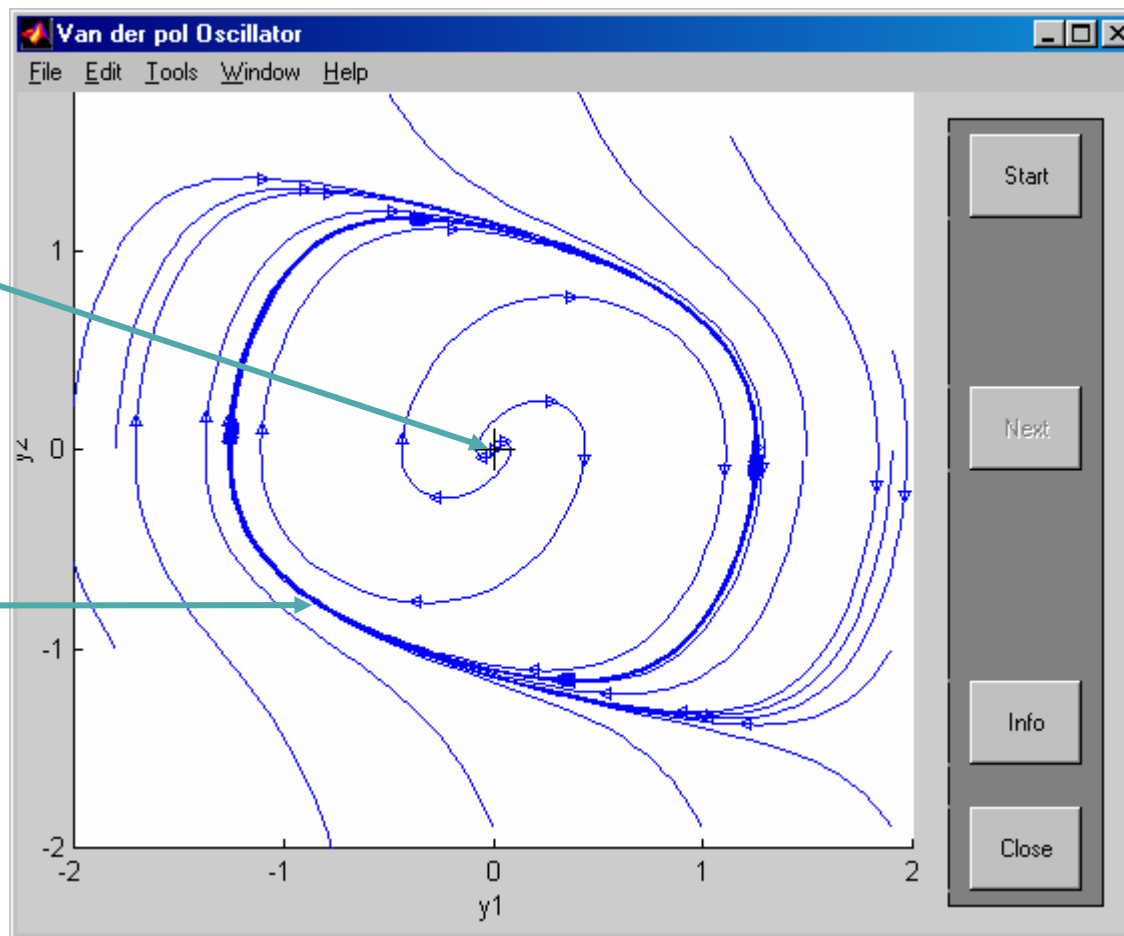
demophVanDerPol

nestabilní  
ekvilibrum

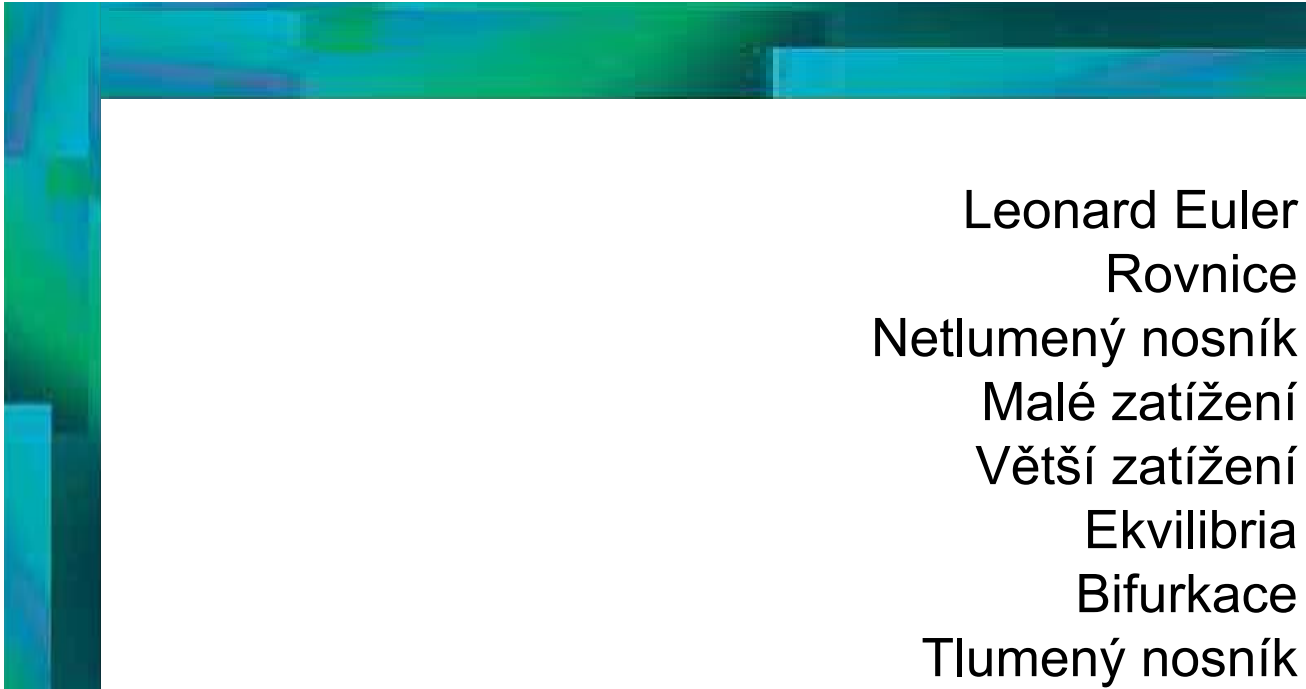
triviální řešení

limitní  
cyklus

periodické řešení



# Nosník – podle Eulera



Leonard Euler

Rovnice

Netlumený nosník

Malé zatížení

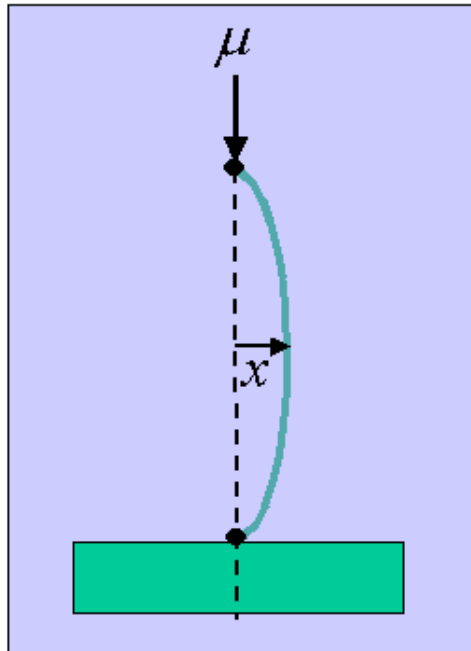
Větší zatížení

Ekvilibria

Bifurkace

Tlumený nosník

# Ohnutý nosník – rovnice



dostaneme model

Pohybová rovnice ve směru  $x$

$$m\ddot{x} + d\dot{x} - \mu x + \lambda x + x^3 = 0$$

tlumení

zatížení

pružná síla  
v nosníku

Pro stavové proměnné

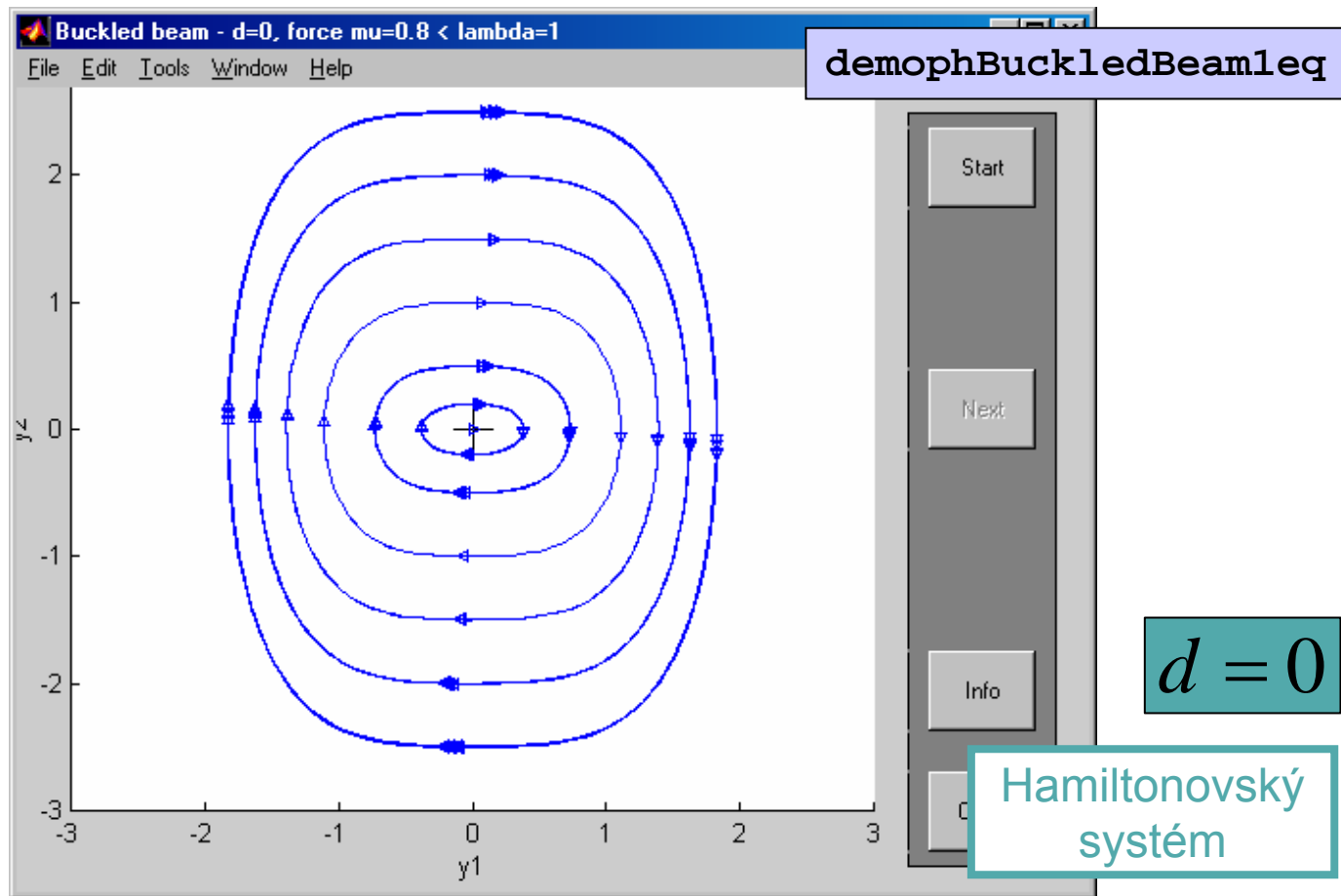
$$x_1 = x, x_2 = \dot{x}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{d}{m}x_2 + \frac{\mu - \lambda}{m}x_1 - \frac{1}{m}x_1^3$$

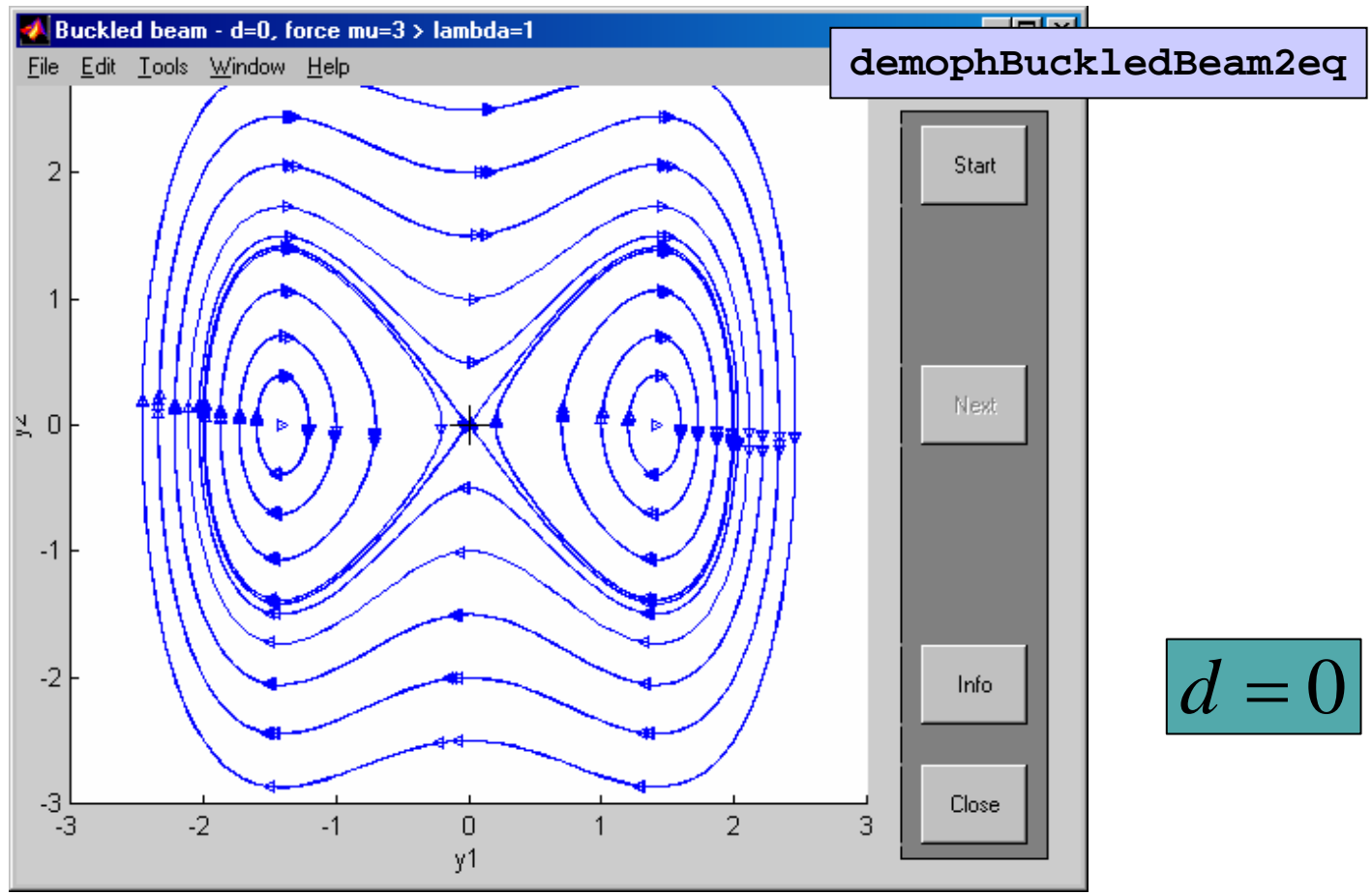
# Nosník netlumený - malé zatížení

Pro malé zatížení  $\mu < \lambda$  se nosník stlačí, ale neprohne



# Nosník netlumený - větší zatížení

Pro velké zatížení  $\mu > \lambda$  se nosník prohne



$$d = 0$$



# Ohnutý nosník - ekvilibria

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{d}{m}x_2 + \frac{\mu - \lambda}{m}x_1 - \frac{1}{m}x_1^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = -dx_2 + (\mu - \lambda)x_1 - x_1^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0, x_1 = 0 \\ x_2 = 0, x_1^2 = \mu - \lambda \end{cases}$$



$$\begin{cases} \mu \leq \lambda : x_1 = x_2 = 0 \\ \mu > \lambda : x_1 = 0, \pm 1; x_2 = 0 \end{cases}$$

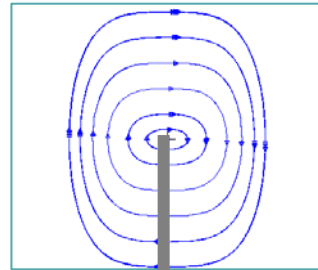
1 ekvilibrium

3 ekvilibria

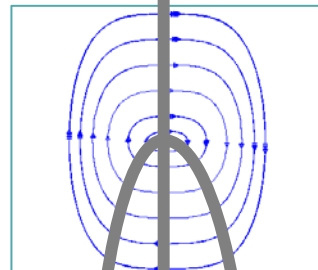
# Nosník - Bifurkace

Přechod mezi neohnutým a ohnutými stavy

$$\mu < \lambda$$

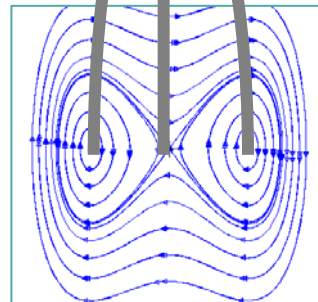


$$\mu = \lambda$$



Bifurkace

$$\mu > \lambda$$



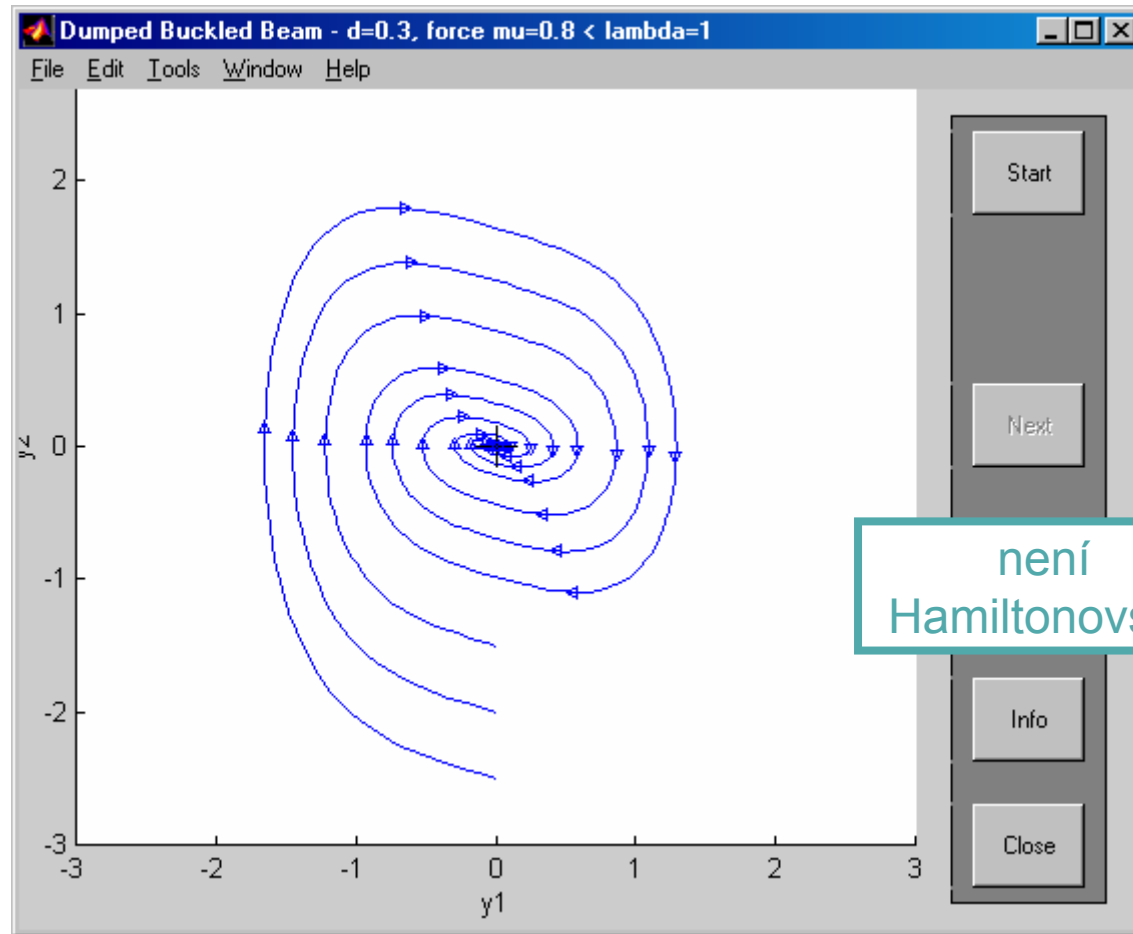
# Nosník - tlumený

demophBuckledBeam1eqDumped

$$d = 0.3$$

$$\lambda = 1$$

$$\mu = 0.8$$



není  
Hamiltonovský

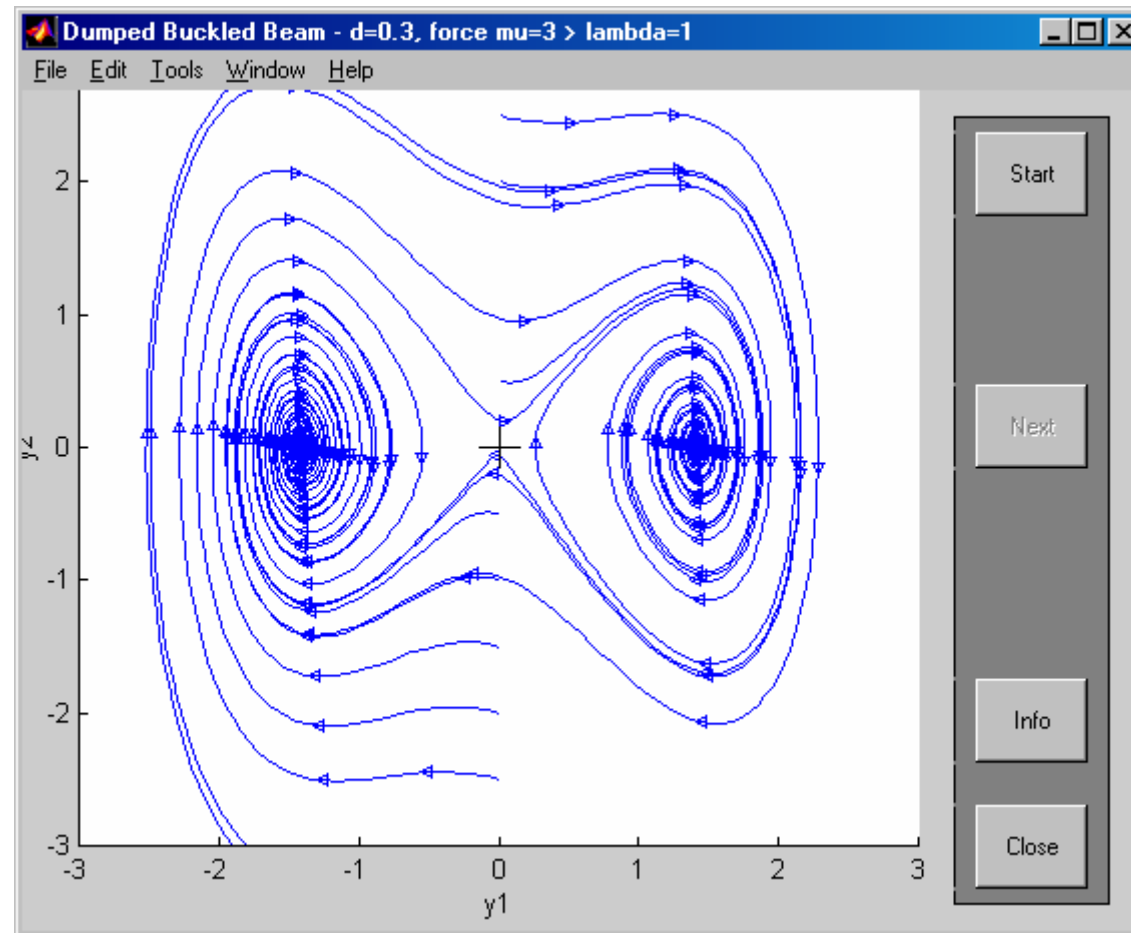
# Nosník – tlumený, větší zatížení

demophBuckledBeam2eqDumped

$$d = 0.3$$

$$\lambda = 1$$

$$\mu = 3$$



# Dravec a oběť

Hrabě Vito Volterra:

Model vývoje dvou populací v Jaderském moři:

$$\begin{array}{l} \text{oběť } x \\ \text{dravec } y \end{array} \quad \begin{array}{l} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = cxy - dy \end{array} \quad a, b, c, d, x, y > 0$$

Model je velmi zjednodušený. Možno přidat např.

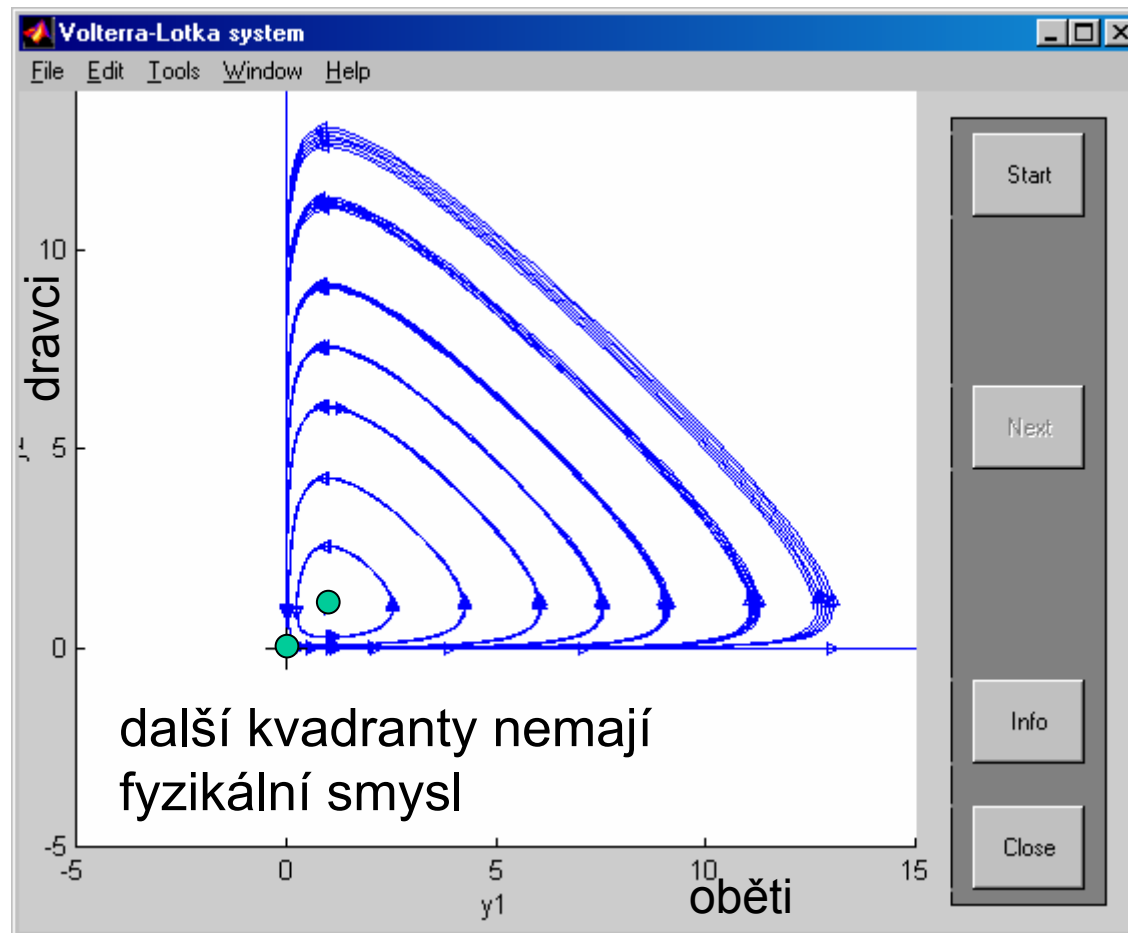
- omezený růst (o. bez d. a d. s o.) kvůli sociálním faktorům

$$\begin{array}{l} \dot{x} = (a - by - \lambda x)x \\ \dot{y} = (cx - d - \mu y)y \end{array} \quad a, b, c, d, \lambda, \mu > 0$$

- soutěžící druhy (každý druh jí ten druhý)

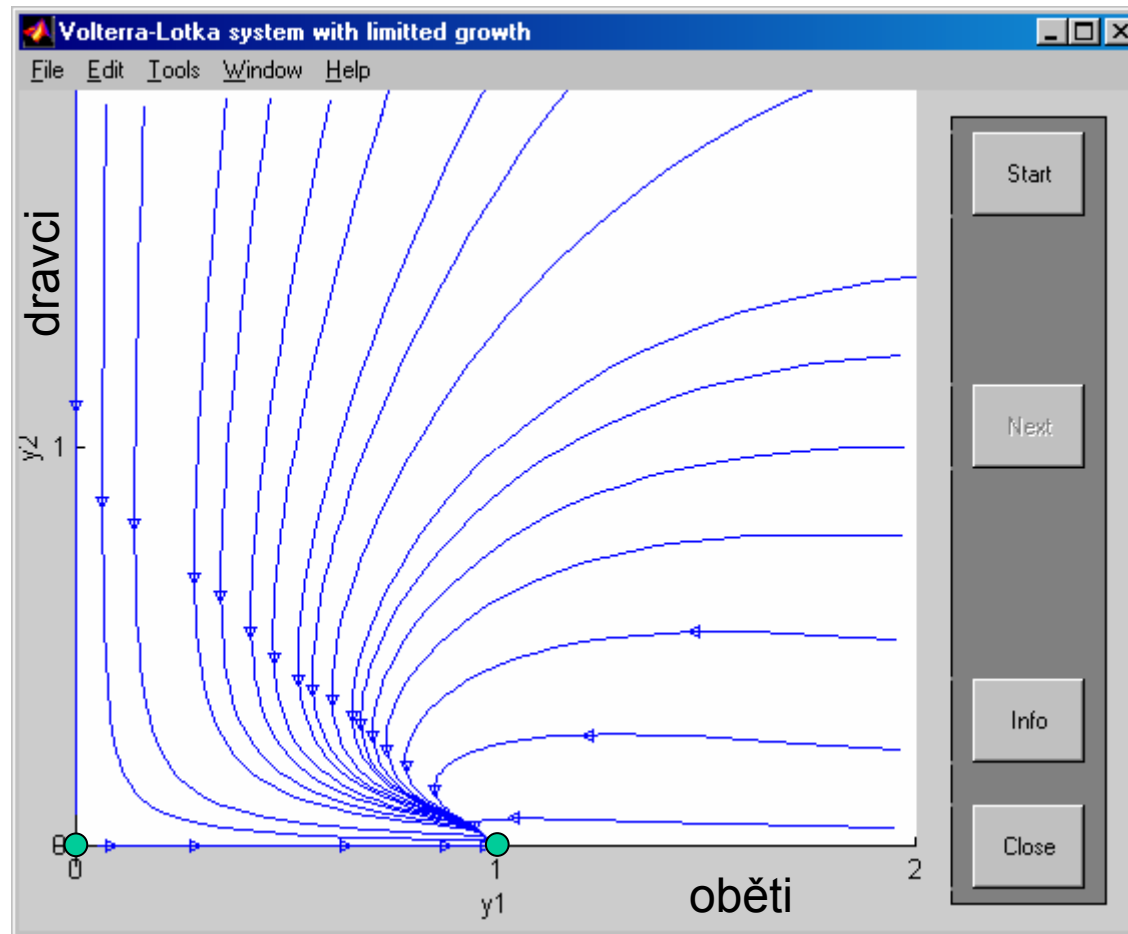
$$\begin{array}{l} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = dy - cxy \end{array}$$

# Dravec a oběť



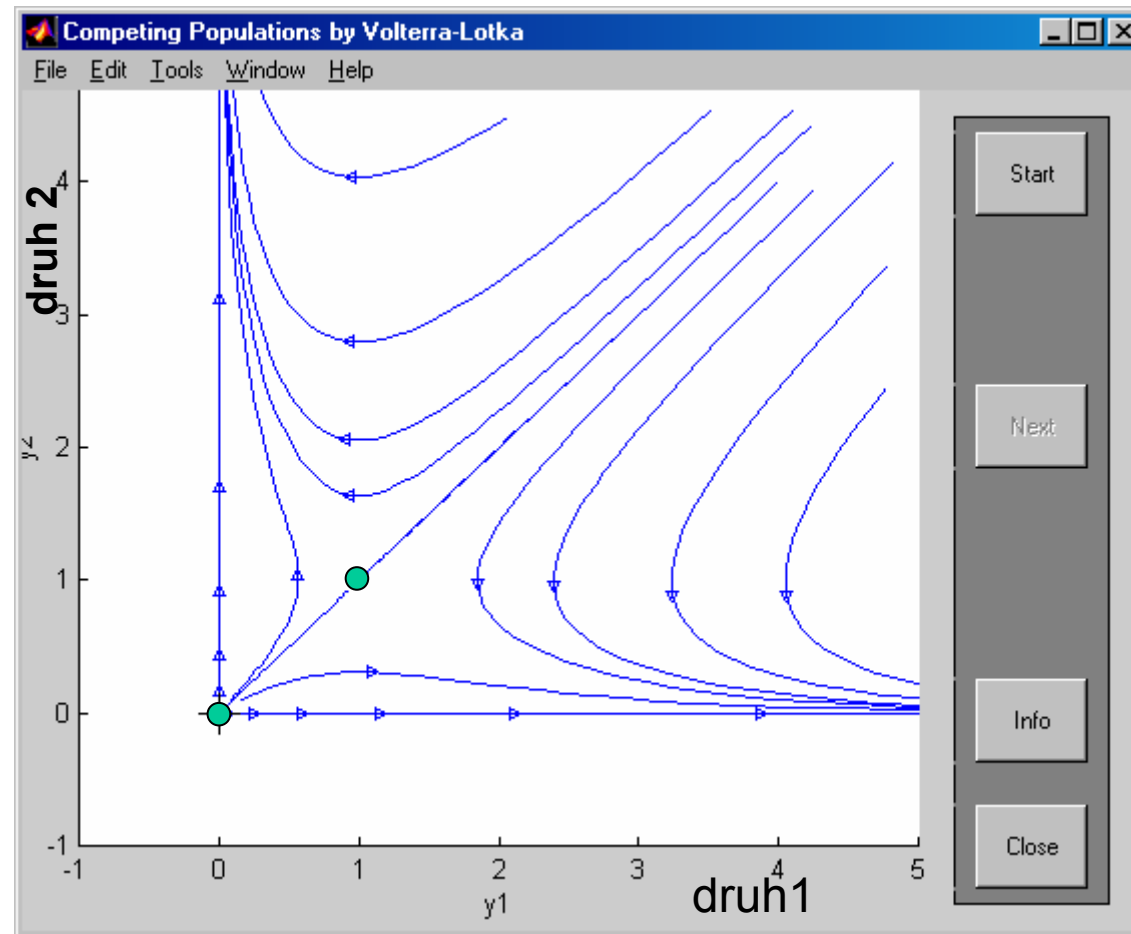
$$x_e = (0, 0); (1, 1);$$

# Dravec a oběť s omezeným růstem



$$x_e = (0, 0); (1, 0); (0, -1)$$

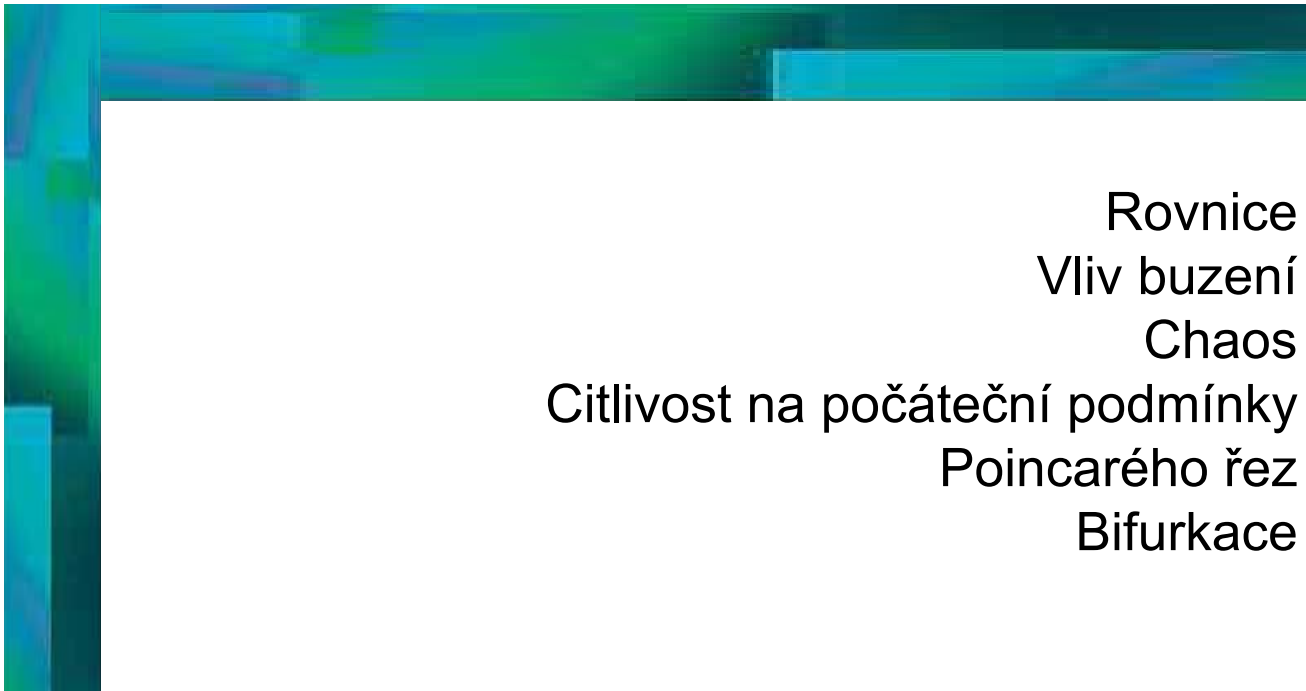
# Soutěžící populace



$$x_e = (0, 0); (1, 1);$$



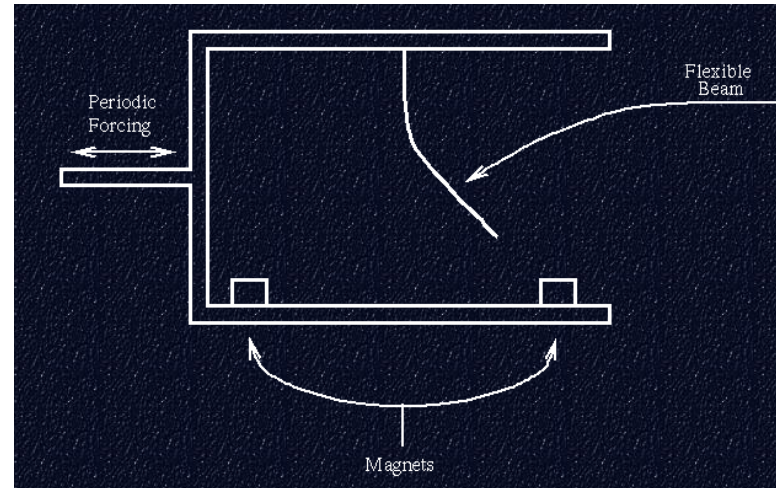
# Double Well oscilátor



Rovnice  
Vliv buzení  
Chaos  
Citlivost na počáteční podmínky  
Poincarého řez  
Bifurkace

# Double Well oscilátor

- magneto-elastický mechanický systém
- v klidu má 2 ustálené stavy
- periodická budící síla
- popsán Duffingovou rovnicí



$$\ddot{x} + b\dot{x} - x + x^3 = F \cos(\omega t)$$

$b$  tlumení  
 $F$  amplituda budící síly  
 $\omega$  budící frekvence

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + x_1 - x_1^3 + F \cos(\omega t)\end{aligned}$$

# DW Oscilátor - bez buzení

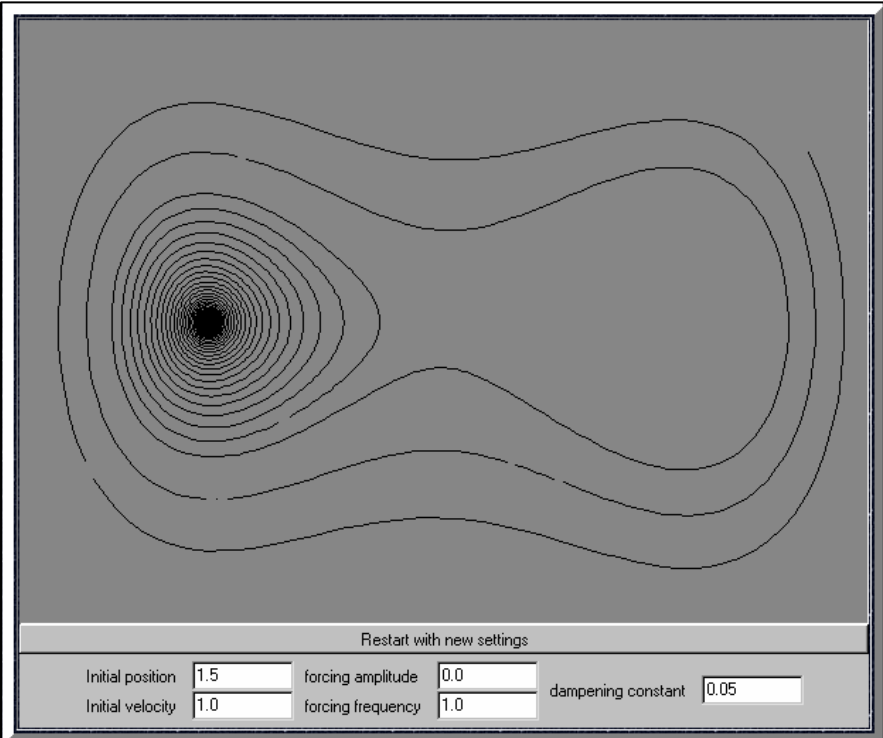
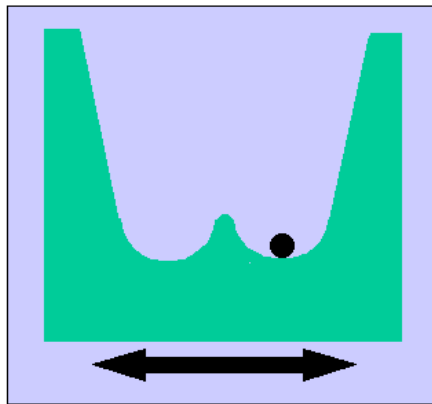
Bez buzení

$$b = 0.05$$

$$F = 0$$

$$\omega = 1$$

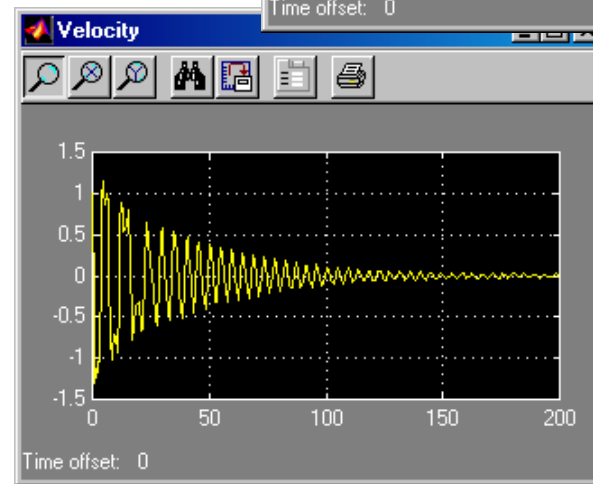
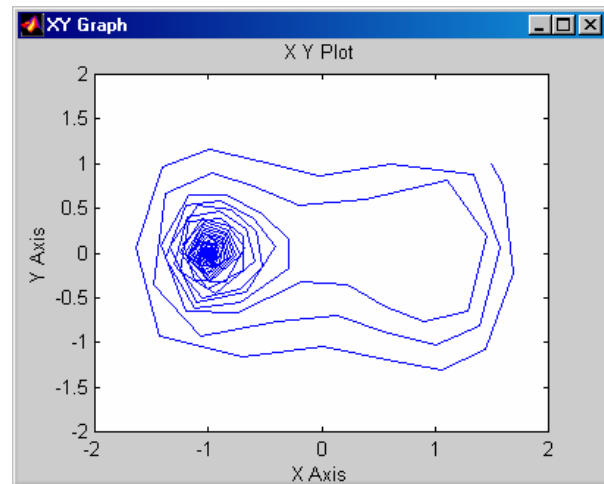
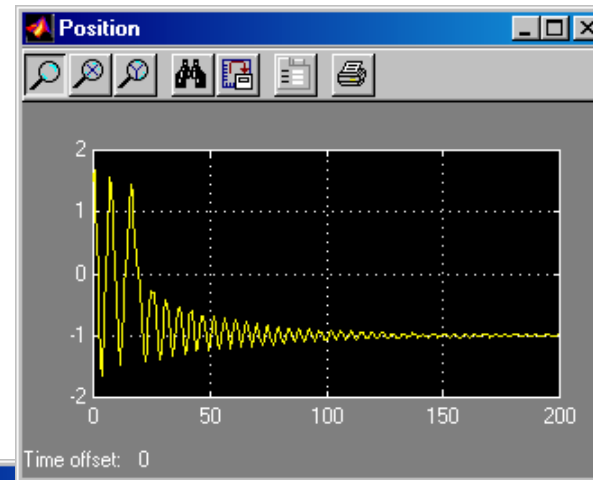
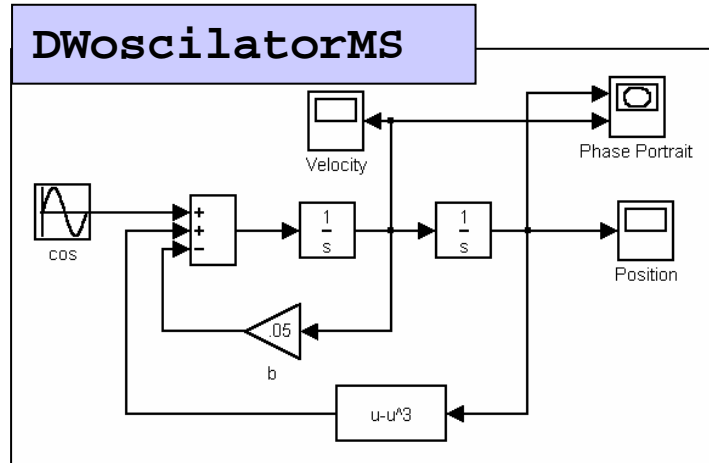
double well =  
dvojitá jáma



$$x_e = 0, \pm 1$$

# DW Oscilátor

Bez buzení  $b = 0.05, F = 0, \omega = 1$  ( $x_1(0) = 1.5, x_2(0) = 1$ )  $x_e = 0, \pm 1$



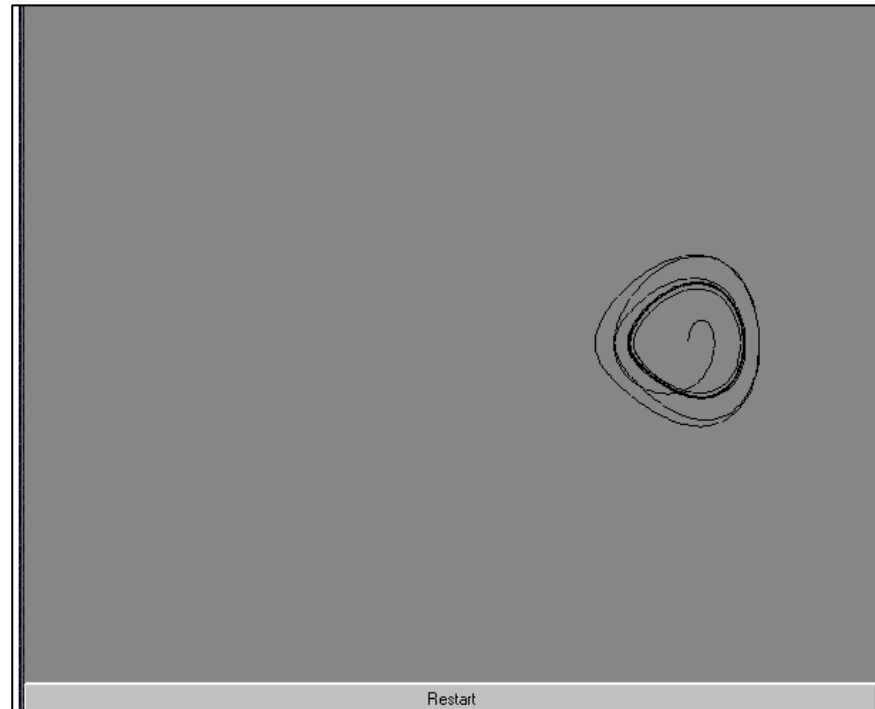
# DW Oscilátor - malé buzení

Malé buzení

$$b = 0.25$$

$$F = 0.22$$

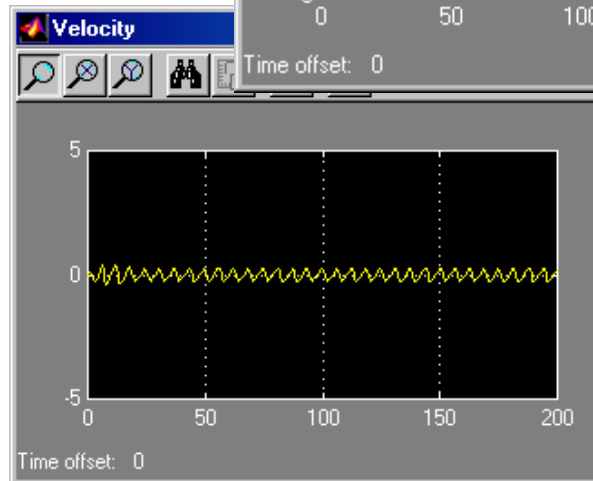
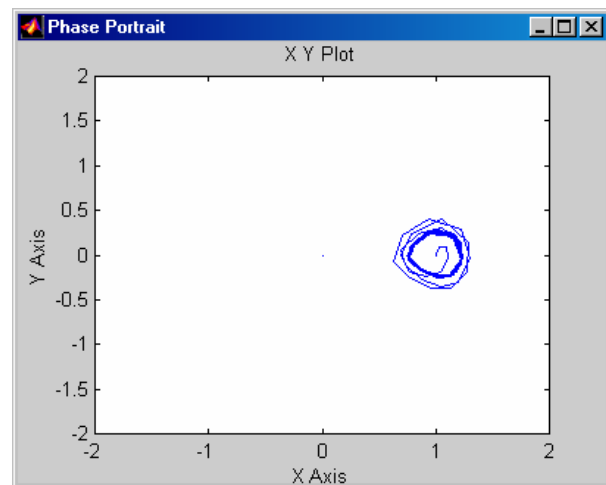
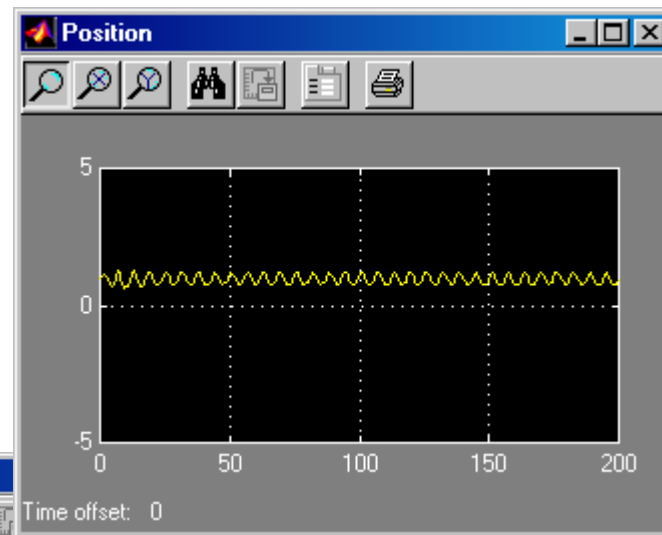
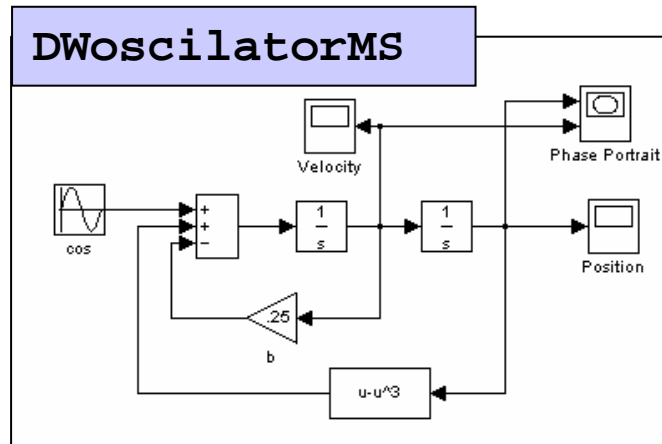
$$\omega = 1$$



- 2 stabilní limitní cykly

# DW Oscilátor

Malé buzení  $b = 0.25, F = 0.22, \omega = 1$        $(x_1(0) = 1, x_2(0) = 0)$



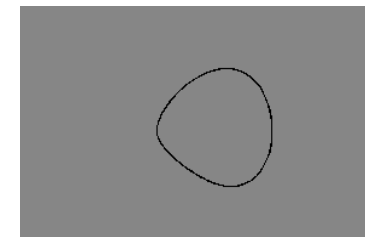
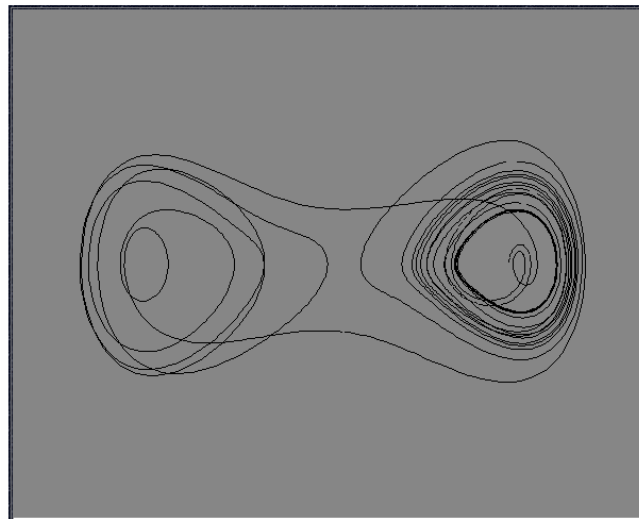
Stabilní limitní cyklus

je tam ještě jeden

# DW Oscilátor - větší buzení

## Větší buzení – přechodný chaos

$$b = 0.25$$
$$F = 0.245$$
$$\omega = 1$$

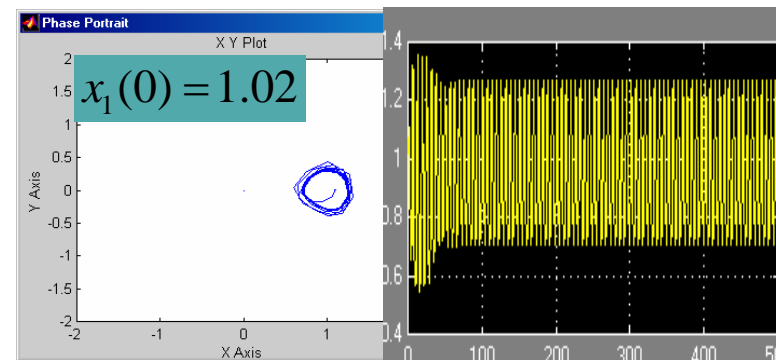
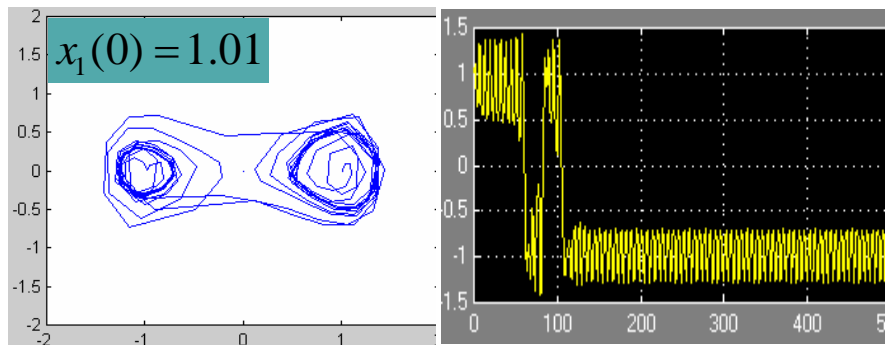
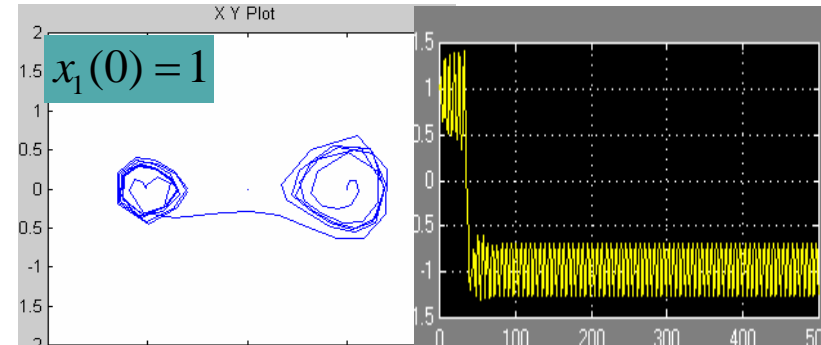
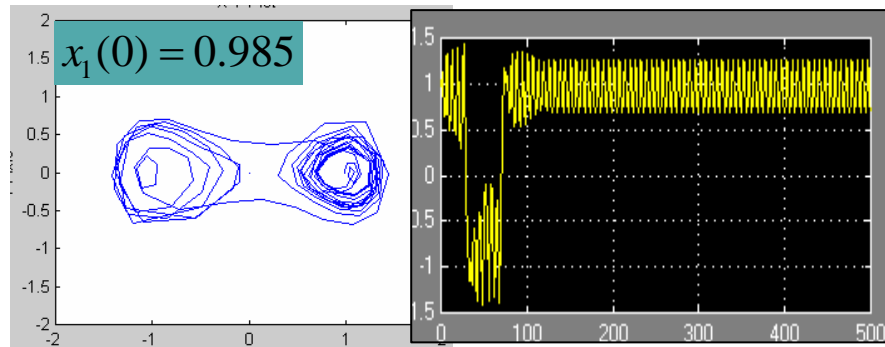


- jako dříve 2 stabilní limitní cykly
- ale přechodový jev je chaotický
- při malé změně počát. podmínek může skončit na druhé straně
- hranice oblastí počátečních podmínek vedoucích k jednotlivým cyklům jsou složité: mají **fraktální charakter**

# DW Oscilátor

Větší buzení  $b = 0.25, F = 0.245, \omega = 1$

$(x_1(0) \cong 1, x_2(0) = 0)$

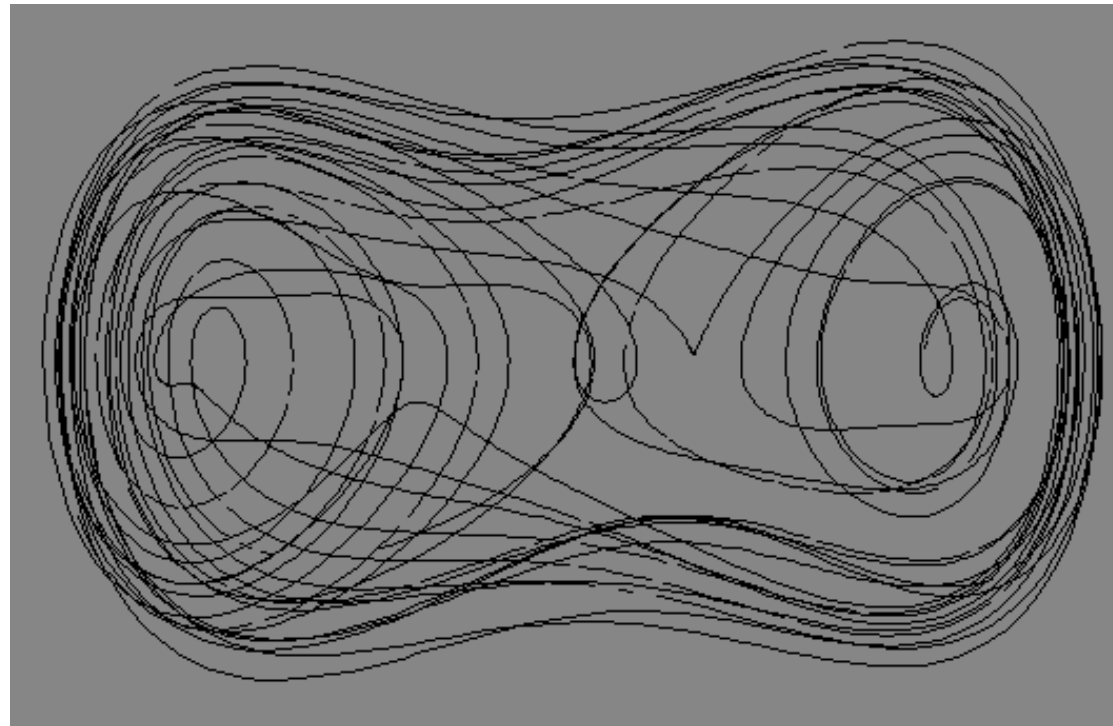




# DW Oscilátor

Ještě větší buzení - chaos

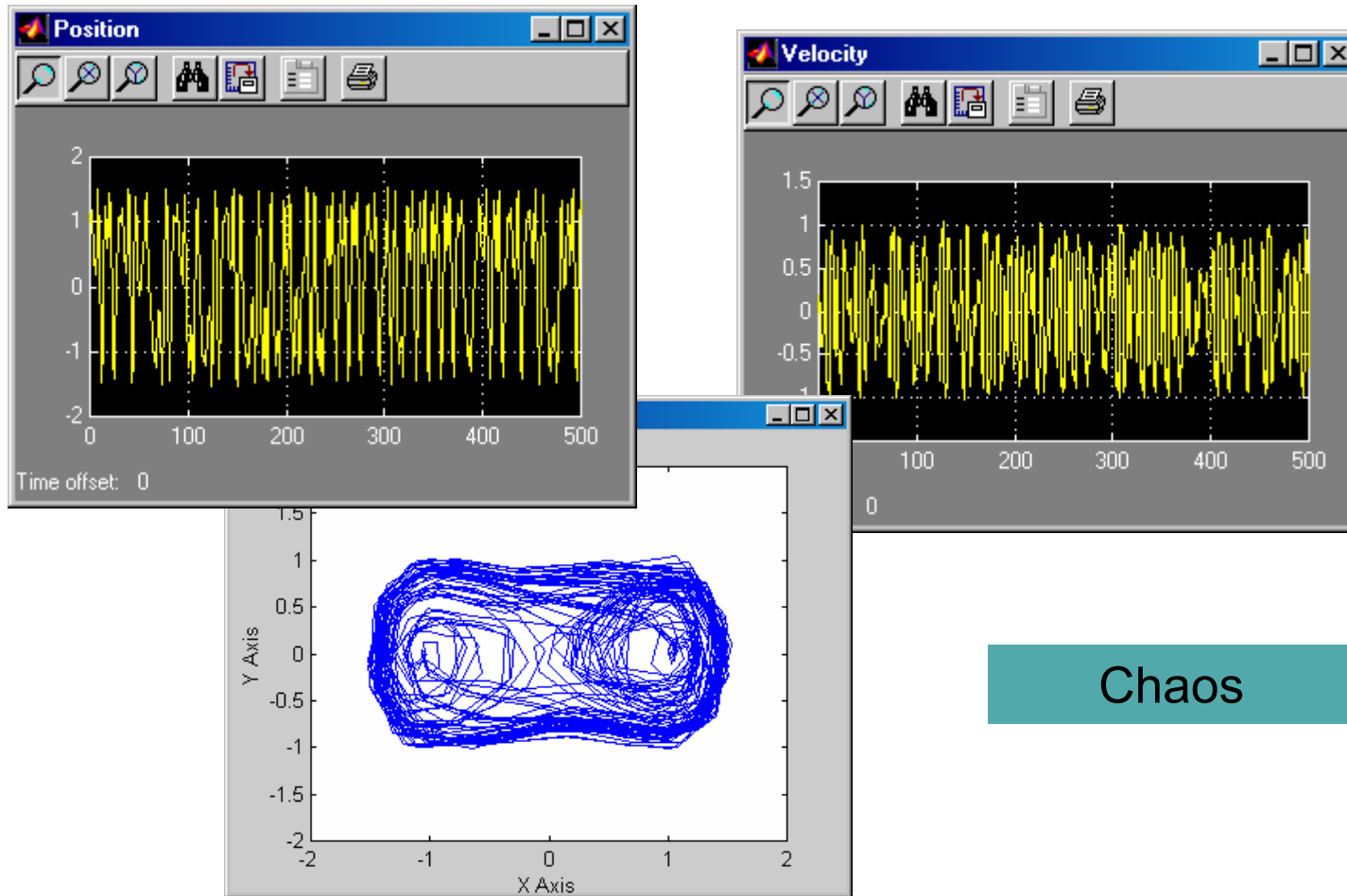
$$b = 0.25$$
$$F = 0.4$$
$$\omega = 1$$



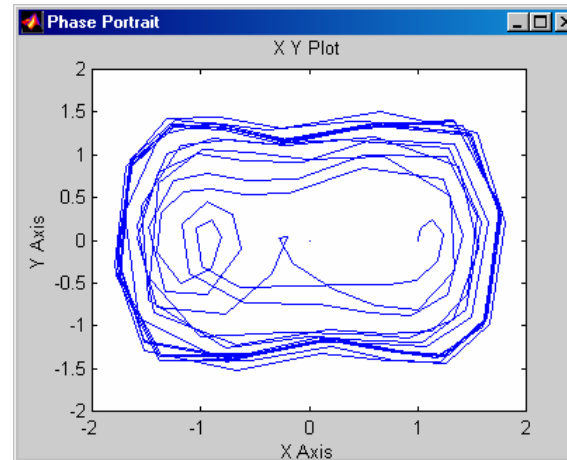
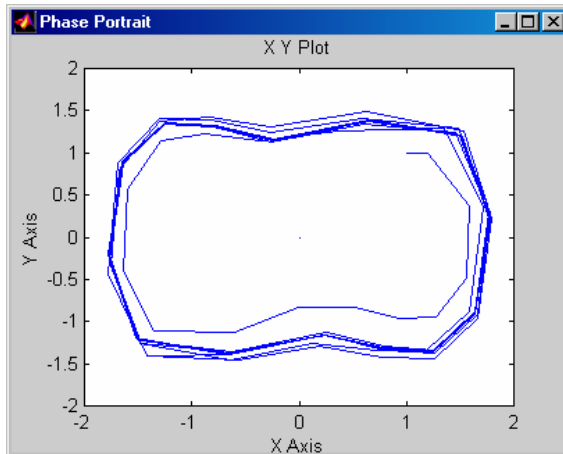
■ chaotické chování

# DW Oscilátor

Ještě větší buzení  $b = 0.25, F = 0.4, \omega = 1$  ( $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$ )



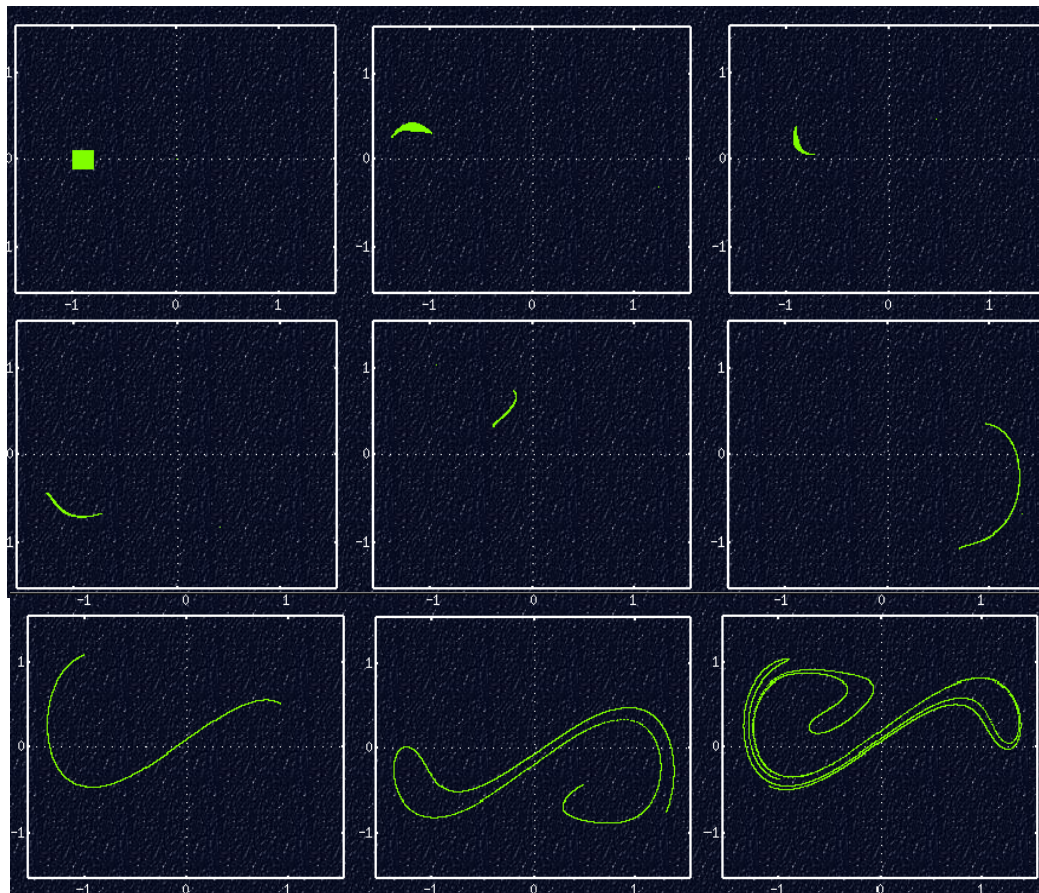
- Při dalším zvětšování buzení se chování zase mění
- Např. pro  $F = 0.5$  se zdá být zase limitní cyklus



- obdobně při změnách dalších parametrů
- zkuste sami  $b = 0.15, F = 0.3, \omega = 1$

# DW Citlivost na počáteční podmínky

Co to znamená velká citlivost na počáteční podmínky?



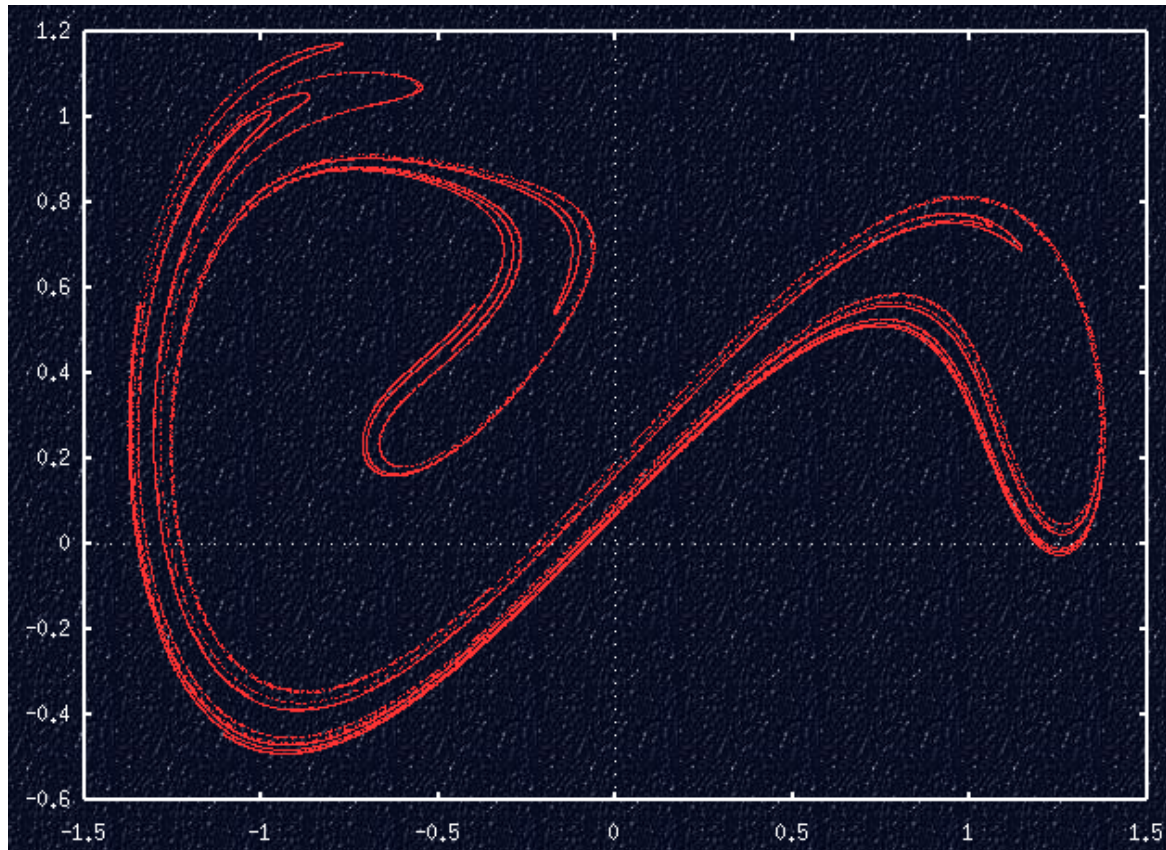
Jak se rozplíznou  
blízké počáteční  
stavy po

0, 0.5, 1.0,  
1.5, 2.0, 2.5,  
3.0, 3.5 a 4.0

cyklech délky  
 $2\pi$

# DW Citlivost na počáteční podmínky

A takhle to vypadá po 25 cyklech:

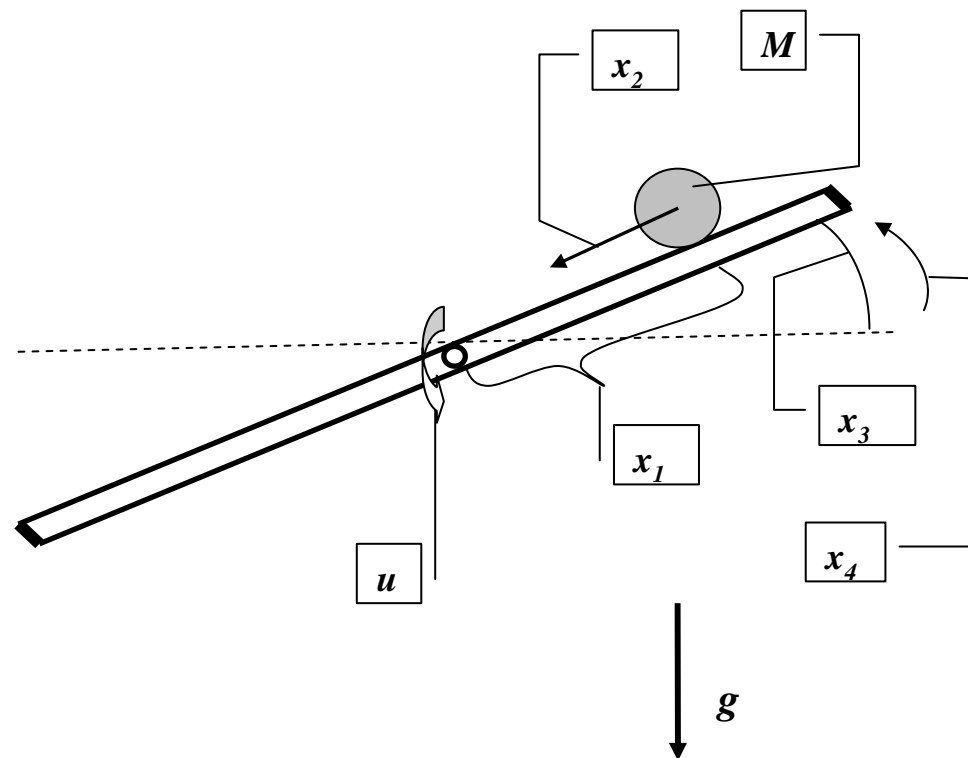


Poznámka:  
Výpočet těchto 25  
cyklů při 200  
krocích integrace  
v cyklu pro 40000  
počátečních  
podmínek trval  
přes 7 hodin na  
rychlém počítači  
s 9000 mips!

[www.apmaths.uwo.ca/  
~bfraser/](http://www.apmaths.uwo.ca/~bfraser/)

Poznáte, kde to začalo?

# Řízení – příklad „benchmark ball and beam“



Kulička volně se kutálející po dráze s řízeným náklonem;  $M$  hmotnost,  $G$  gr. zrychl.,  $J_d$  moment setr. dráhy,  $J_b$  mom. setr. kuličky,  $R$  průměr kulicky,



# Řízení – příklad „benchmark ball and beam“

- Kulička volně se kutálející po dráze s řízeným náklonem;  $M$  hmotnost,  $G$  gr. zrychl.,  $J_d$  moment setr. dráhy,  $J_b$  mom. setr. kuličky,  $R$  průměr kulicky,

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = M(M + J_b R^{-2})^{-1} x_1 x_4^2 - M(M + J_b R^{-2})^{-1} G \sin(x_3)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -2J(x_1)^{-1} x_1 x_2 x_4 - J(x_1)^{-1} M G x_1 \cos(x_3) + J(x_1)^{-1} u,$$

$$J(x_1) = J = (J_b + J_d + M x_1^2),$$

$$a = M(M + J_b R^{-2})^{-1}, b = aG, c = 2J^{-1}, d = J^{-1}MG, e = J^{-1}$$

- Přibližná linearizace – příliš zjednodušená!!!

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -b x_3, \dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = -d(0)x_1 + e(0)u$$

- Kompromis

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -b \sin(x_3), \dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = -c x_1 x_2 x_3 - d x_1 \cos(x_3) + e u$$

- Přesná linearizace: je možné z  $y, v$  jednoznačně určit  $x, u$  a naopak

$$\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = y_3, \dot{y}_3 = y_4, \dot{y}_4 = v$$

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = -b \sin(x_3),$$

$$y_4 = \dot{y}_3 = -b \cos(x_3) \dot{x}_3 = -b \cos(x_3) x_4,$$

$$v = \dot{y}_4 = b \sin(x_3) \dot{x}_3 x_4 - b \cos(x_3) \dot{x}_4 = b \sin(x_3) x_4^2 - b \cos(x_3) (-c x_1 x_2 x_3 - d x_1 \cos(x_3) + e u)$$

# Řízení – příklad „benchmark ball and beam“ 2.

- Proč nelze exaktně linearizovat tento model?
- Odpověď – nemá dobře definovaný tzv. **relativní stupeň**

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = ax_1x_4^2 - b\sin(x_3)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -cx_1x_2x_4 - dx_1\cos(x_3) + eu$$

$$a = M(M + J_bR^{-2})^{-1}, b = aG, c = 2J^{-1}M, d = J^{-1}MG, e = J^{-1}$$

- Zkusme zopakovat předchozí postup: řízení  $u$  se objevuje příliš brzy a **singulárně**

$$\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = y_3, \dot{y}_3 = y_4, \dot{y}_4 = v$$

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = ax_1x_4^2 - b\sin(x_3),$$

$$y_4 = \dot{y}_3 = -b\cos(x_3)\dot{x}_3 + a\dot{x}_1x_4^2 + 2ax_1x_4\dot{x}_4 =$$

$$-b\cos(x_3)x_4 + ax_2x_4^2 + 2ax_1x_4(-cx_1x_2x_3 - dx_1\cos(x_3) + eu),$$

$$v = \dot{y}_4 = ???$$