Nelineární systémy

1 / Úvod

Web:

http://staff.utia.cas.cz/celikovsky/tea.html

Skriptum:

S. Čelikovský, Nelineární systémy, ČVUT 2006.

Přehled

1. Úvod
2. Příklady
3. Matematické základy
4. Stabilita a Lyapunovova funkce
5. Řízení NS pomocí přibližné linearizace. Gain scheduling
6. Řízení NS pomocí strukturálních metod – základní pojmy
7. Struktura a řízení NS s jedním vstupem a výstupem
8. Struktura a řízení NS s více vstupy a výstupy

Přehled / 2

1. Úvod

- Spojitý nelineární model
- Nelineární jevy – co není u lineárních systémů
- Lorenzův atraktor
- Filosofie

Spojitý nelineární model

Nelineární stavový model
Neautonomní systémy
Fázový portrét
Řešitelnost
No intersection
Linearizace a meze její použitelnosti

Nelineární stavový model – spojitý čas

Stavová rovnice

$$\boxed{\dot{x} = f(x, u, t)}$$

n-dimensionální vektorová nelineární diferenciální rovnice prvního řádu

stav

vstup

čas

výstup

Výstupní rovnice

$$\boxed{y = h(x, u, t)}$$

Též <u>nelineární dynamický systém ve spojitém čase</u>

Všechno jsou vektory $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \; u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \; y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}$

Nelineární stavový model – diskrétní čas

Stavová rovnice

$$\boxed{x_{k+1} = g(x_k, u_k, k)}$$

n-dimensionální vektorová nelineární diferenční rovnice prvního řádu

Výstupní rovnice

$$\boxed{y_k = h(x_k, u_k, k)}$$

Autonomní časově invariantní

$$\boxed{x_{k+1} = g(x_k)}$$

Nelineární dynamický systém - spojitý čas

- modely s vyššími derivacemi můžeme na první derivace přepočítat
- většinou se budeme zabývat jen stavovou rovnicí

Zvláštní případy:

- rovnice bez vstupu (unforced)

$$\boxed{\dot{x} = f(x,t)}$$

dostaneme když $u \equiv 0;\ u = \gamma(t);\ u = \gamma(x);\ u = \gamma(x,t);$

- autonomní, neproměnná v čase (time invariant)

$$\boxed{\dot{x} = f(x)}$$

chování nezávisí na posunu v čase $\tau = t - a$

Periodický neautonomní model

- periodický neautonomní model řádu n s periodou T můžeme vždy převést autonomní model řádu $n+1$ přidáním další proměnné

$$\boxed{\tau = \frac{2\pi t}{T}}$$

- složený model pak má rovnice

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{x} = f(x,\tau),\ x(t_0) = x_0 \\ &\dot{\tau} = \frac{2\pi}{T}, \qquad \tau(t_0) = \frac{2\pi t_0}{T} \end{aligned}}$$

- a tedy je autonomní

Obecný neautonomní model

- obecný neautonomní model řádu n můžeme vždy převést autonomní model řádu $n+1$ přidáním další proměnné

$$\boxed{\tau = t}$$

- složený model pak má rovnice

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dot{x} = f(x,\tau), & x(t_0) = x_0 \\ \dot{\tau} = 1, & \tau(t_0) = t_0 \end{array}}$$

- a tedy je autonomní

Fázový prostor

- pro model $\dot{x} = f(x,u,t)$ s $x(t) \in D \subset R^n$
- říkáme množině D také fázový prostor
- většinou je $D = R^n$
- funkce f definuje zobrazení $f : R^n \to R^n$, tzv. vektorové pole
  funkce závisí na souřadnicové soustavě, pole ne
- nelineární systém je tedy zobrazení $\Phi(x_0,t) : R^n \times R \to R^n$ definované řešením $x(t)$
- někdy explicitně vyjadřujeme závislost na počátečních podmínkách $\Phi_t(x_0)$
- jednoparametrická rodina zobrazení $\Phi_t : R^n \to R^n$ je tok
- grafické zobrazení trajektorií typických Φ_t se nazývá fázový portrét systému
- 2-D fázové portréty budeme často používat

Jemnosti analýzy nelineárních systémů

Na rozdíl od lineárních systémů

- málokdy najdeme řešení v uzavřeném tvaru
- proto obvykle nutná kvalitativní analýza a současně
- kvantitativní verifikace opakovanými simulacemi
- matematické nástroje jsou pokročilejší a složitější
- a celkově se toho méně umí

Řešitelnost

Uvažme systém $\boxed{\dot{x} = f(x,u,t)}$

a nechť jsou dány $x(t_0) = x_0 \in D \subset R^n, \; u(t): R \to R^m$

Pokud je lineární v *x* i *u* pro všechna *t*,
pak pro každé *u*(.) očekáváme:

- aspoň jedno řešení z nějaké rozumné třídy: **existence**
- právě jedno řešení z té třídy: **jednoznačnost**
- právě jedno řešení pro všechna *t* , tj. na [0,∞): **prodloužení až do nekonečna**

požadavky

Pro nelineární obecně neplatí ani jedno !

Řešení neexistuje

Rovnice

$$\boxed{\dot{x} = -\operatorname{sign}(x), \quad x(0) = 0}$$

kde

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \dots \quad x \geq 0 \\ -1 & \dots \quad x < 0 \end{cases}$$

nemá žádné řešení.

- žádná spojitě diferencovatelná funkce rovnici nesplňuje
- i když rovnice není zas tak nesmyslná – třeba zjednodušený model termostatu

Řešení není jednoznačné

Rovnice

$$\boxed{\dot{x} = 3x^{2/3}} \qquad x(0) = 0$$

je řešitelná každou funkcí

$$\boxed{x_a = \begin{cases} (t-a)^3 & \dots \; t \geq a \\ 0 & \dots \; t < a \end{cases}}$$

kde *a* je libovolné.

Řešení existuje pro některá *t*, ale ne pro všechna

Rovnice

$$\boxed{\dot{x} = 1 + x^2} \quad x(0) = 0$$

má řešení

$$\boxed{x(t) = \tan(t)}$$

ale jen na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$.

Vně tohoto intervalu řešení neexistuje.

(tzv. únik v konečném čase)

No Intersection Theorem

Zřejmý fakt (pro autonomní systém)

Pokud má systém jednoznačné řešení, tak

- žádné dvě různé trajektorie ve fázovém prostoru nemohou protínat (v konečném čase)
- žádná trajektorie se nemůže protínat sama se sebou

- determinismus

Trajektorie se mohou křížit jen

- asymptoticky
- nebo v průmětu fázového prostoru do nižších dimenzí (typicky 3-D do 2-D)
- u neautonomního systému (ale to je vlastně předchozí případ)

Lineární model

Speciální tvar rovnic - lineární

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$
$$y = C(t)x + D(t)u$$

Lineární systémy

- princip superposice a další „zřejmá pravidla“
- malá příčina/vzdálená má obvykle malé důsledky
- složité důsledky mají složité příčiny
- k disposici jsou účinné metody analýzy a návrhu
- obvykle první krok při analýze nelineárního systému je
- Přibližná linearizace v nominálním pracovním bodě + lineární analýza

Meze využití přibližné linearizace

Linearizace sama často nestačí protože

- Popisuje pouze lokální chování v okolí jednoho pracovního bodu a nikoli nelokální nebo dokonce globální chování
- Dynamika nelineárních systémů je mnohem bohatší, protože
- existuje mnoho podstatně nelineárních jevů, které
- nemohou u lineárních systémů nastat a proto
- nemohou být linearizovaným modelem předpovězeny, popsány ani vysvětleny.

Nelineární jevy

Co není u lineárních systémů
Únik v konečném čase
Rovnovážný stav
Oscilace
Bifurkace
Složité jevy

Ryze nelineární jevy

Jevy, které nemohou nastat u lineárních systémů:

- Únik v konečném čase
  NL systém může jít do nekonečna v konečném čase
- Mnohonásobná izolovaná ekvilibria
  NL systém může mít víc izolovaných rovnovážných stavů
- Limitní cykly
  NL systém může mít stabilní oscilace s pevnou amplitudou a frekvencí nezávislé na počátečním stavu
- Bifurkace
  Kvalitativní rysy NL systémů se mohou měnit se změnou parametrů
- Synchronizace
  Vázané oscilátory synchronizují frekvenci a fázi.
- Složité dynamické chování
  chaos, turbulence, malá změna počátečních podmínek může výrazně změnit výsledné chování: „efekt motýlího křídla“

Co není u lineárních systémů 1

U lineárních systémů nemůže nastat:

Únik v konečném čase (finite escape time)

Nestabilní lineární systém jde do nekonečna asymptoticky (nejvýše exponenciálně), nelineární se tam může dostat už v konečném čase.

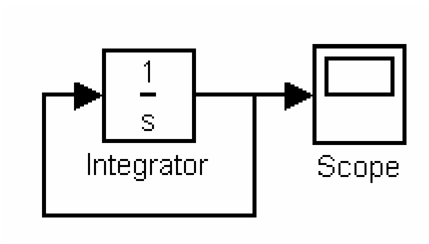
Matematika:

- Řešení lineární diferenciální rovnice lze vždy prodloužit do nekonečna
- U nelineární diferenciální rovnice to nemusí jít (mluvíme o maximálním řešení)

Únik v konečném čase

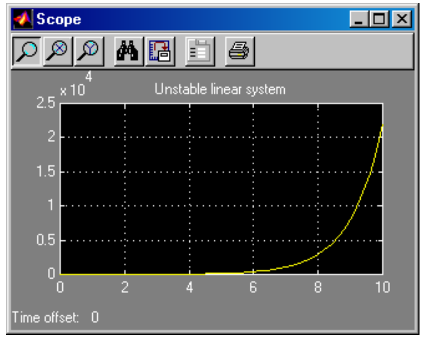
Lineární systém

- výstup jde do nekonečna nejvýše asymptoticky



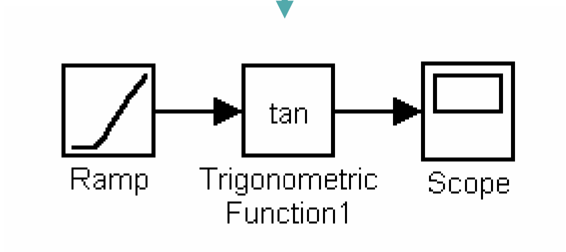
$$\dot{x} = x$$

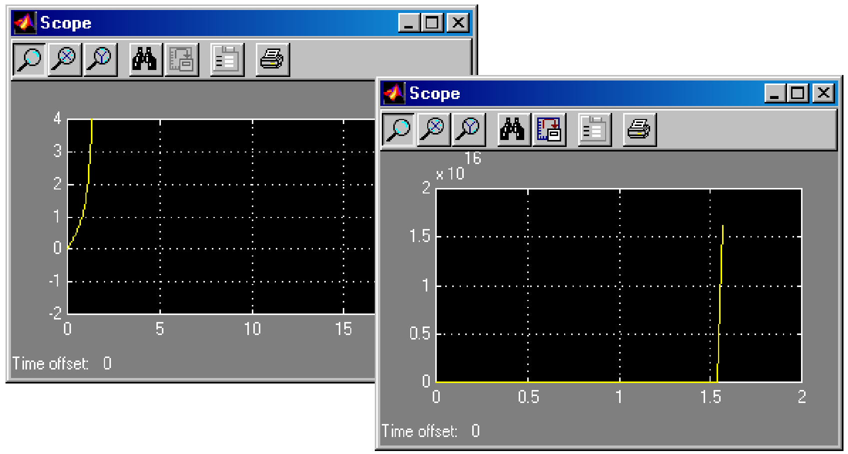
$$\boxed{x(t) = e^{t} x_0}$$



- výstup může jít do nekonečna i v konečném čase

nelinearita sama je taková

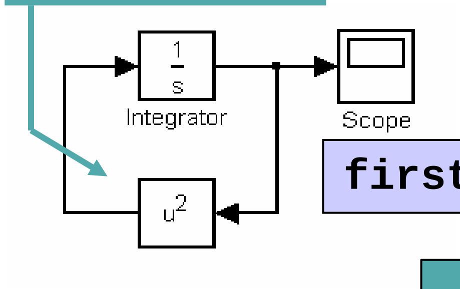




Únik v konečném čase

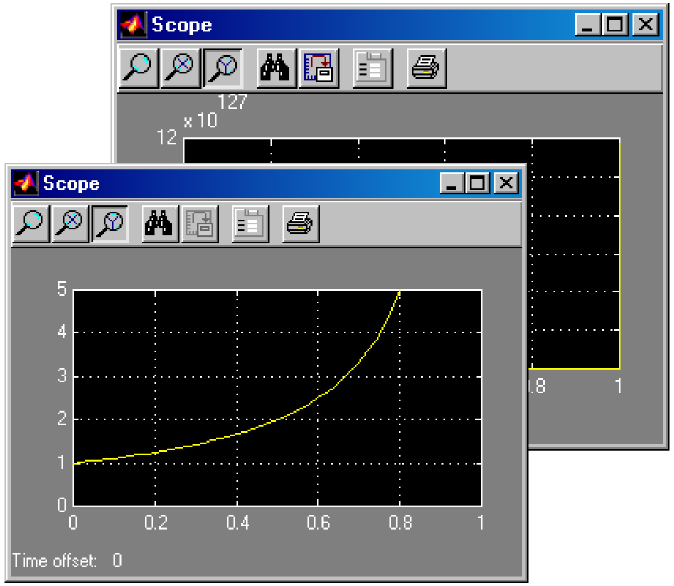
nevinná nelinearita

$$\dot{x} = x^2$$



firstorderMS

$$t_0 = 0, x_0 = 1 \longrightarrow x(t) = \frac{1}{1-t} \longrightarrow$$



separace proměnných

$$t_0, x(t_0) = x_0 \neq 0$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \longrightarrow \frac{dx}{x^2} = dt \xrightarrow{\int_{t_0}^{t}} x(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x_0} + t_0\right) - t}$$

```
dsolve('Dx=x^2','x(0)=1')
ans = -1/(t-1)
```

Co není u lineárních systémů 2

U lineárních systémů ještě nemohou nastat:

Mnohonásobné izolované rovnovážné stavy

(multiple equilibria)

Nelineární systém může mít víc izolovaných rovnovážných stavů.

Lineární systém má jen jeden, nebo ve výjimečném (negenerickém) případě kontinuum.

Intermezzo: Rovnovážný stav

Rovnovážný stav = ekvilbrium = pevný bod = kritický b.

Definice:

$x_0 \in R^n$ je ekvilibrium systému $\dot{x} = f(x,t)$ v čase t_0

$\Longleftrightarrow \quad f(x_0,t) = 0 \quad \forall t \geq t_0$

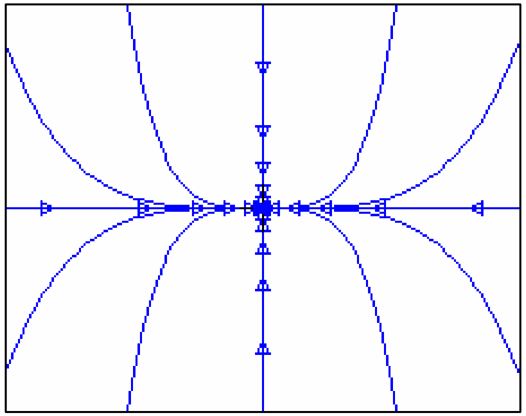
Význam

Pokud má systém jediné řešení a x_0 je jeho ekvilibrium v čase t_0 a $x(t_0) = x_0$, pak $x(t) \equiv x_0 \quad \forall t \geq t_0$, tj. zůstává v rovnovážném stavu.

Pokud $f(x_0,t) \equiv 0 \quad \forall t$, pak x_0 nazýváme jednoduše ekvilibrium

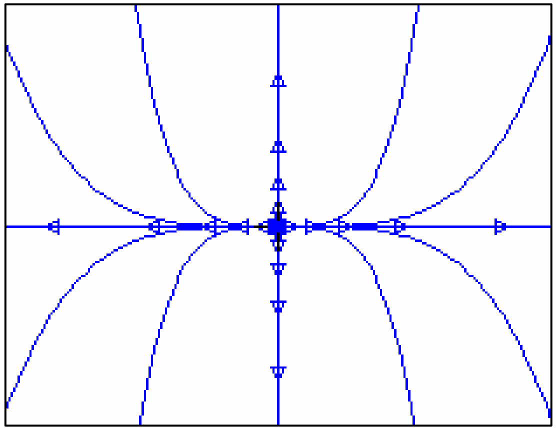
Rovnovážný stav - 2

- Rovnovážný stav $x_0 \in R^n$ se nazývá atraktor (přitahovač) pokud pro nějaké jeho okolí *O* platí platí, že



$$x(t_0) \in O \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = x_0$$

- Rovnovážný stav se nazývá repeler (odpuzovač) pokud má výše uvedenou vlastnost pro $t \to -\infty$



- Obecněji definice platí i pro podmnožiny fázového prostoru

Počet rovnovážných stavů

Jak najít ekvilibrium?

Pokud je systém autonomní, jeho ekvilibria najdeme řešením (vektorové) nelineární algebraické rovnice

$$\boxed{f(x) = 0}$$

Tato rovnice může mít

- žádné řešení
- jedno řešení nebo více izolovaných řešení
- kontinuum řešení

Například digitální obvody pro binární logiku – mají aspoň dva stabilní rovnovážné stavy

Lineární systém

$$\boxed{Ax = 0}$$

má buď jediné řešení $x = 0$ (*A* nesingulární) nebo kontinuum řešení $x \in \operatorname{null} A$ (*A* singulární), ale to je nerobustní. Takže genericky má je jedeno.

Rovnovážné stavy – systémy prvního řádu

Lineární systém prvního řádu

$$\boxed{\dot{x} = ax}$$

- má tolik e., kolik má řešení rovnice $\boxed{0 = ax}$ tedy
- jedno e. $x_e = 0$ pro $a \neq 0$ neboť $x(t) = x_0 e^{-at}$
- kontinuum e. $x_e = x_0 \ \forall x_0$ pro $a = 0$ ($x(t) = x_0$)

Nelineární systém prvního řádu

$$\boxed{\dot{x} = f(x)}$$

- má tolik e., kolik má řešení rovnice $\boxed{0 = f(x)}$
- tedy jejich počet záleží na nulových bodech funkce *f*

Systémy prvního řádu - 2

Nelineární systém $\boxed{\dot{x} = (1 - x^2)x}$

- 3 ekvilibria: $0 = (1 - x_e^{\,2})x_e \rightarrow \boxed{x_e = 0, \pm 1}$
- řešení

$$\boxed{x(t) = \frac{\mathrm{sign}(x_0)}{\sqrt{1 - \dfrac{e^{-2t}(x_0^{\,2} - 1)}{x_0^{\,2}}}}}$$

kde

$$\mathrm{sign}(x_0) = \begin{cases} 1 & \cdots & x_0 > 0 \\ 0 & \cdots & x_0 = 0 \\ -1 & \cdots & x_0 < 0 \end{cases}$$

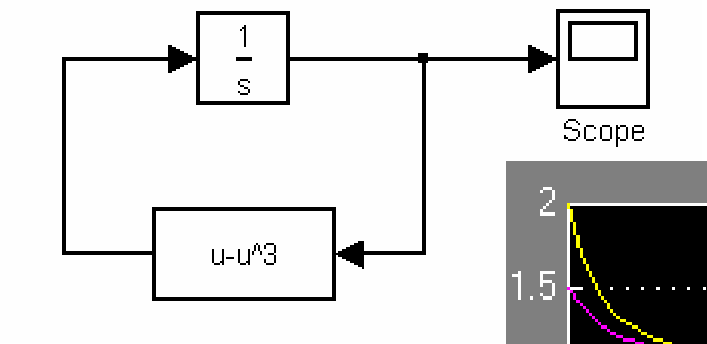
- zřejmě $\lim_{t \to \infty} \sqrt{.} = 1$

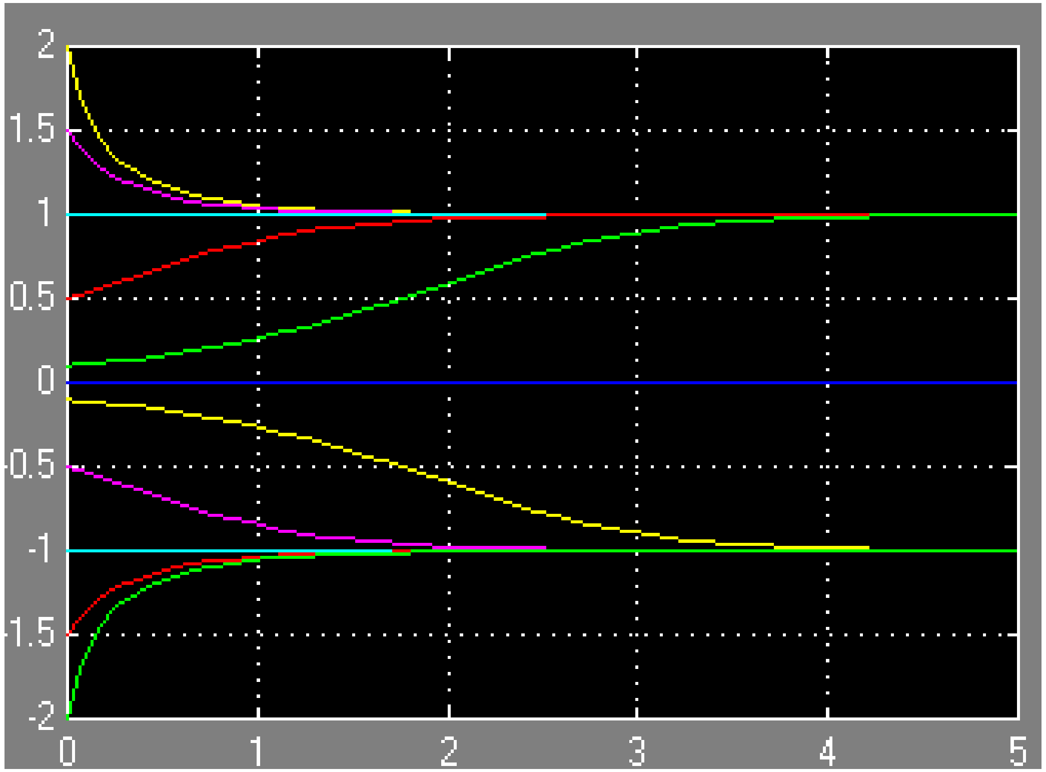
```
» syms x0
» dsolve('Dx=(1-x^2)*x','x(0)=x0')
ans =
[-1/(1-exp(-2*t)*(x0^2-1)/x0^2)^(1/2)]
[ 1/(1-exp(-2*t)*(x0^2-1)/x0^2)^(1/2)]
```

```
» dsolve('Dx=(1-x^2)*x','x(0)=0')
ans = 0

» dsolve('Dx=(1-x^2)*x','x(0)=1')
ans = 1

» dsolve('Dx=(1-x^2)*x','x(0)=-1')
ans = -1
```

Systémy prvního řádu – 3

Pokračování příkladu: simulace pro různé počáteční stavy

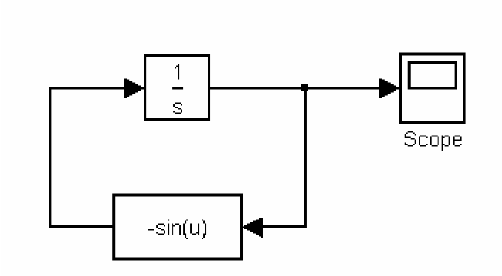


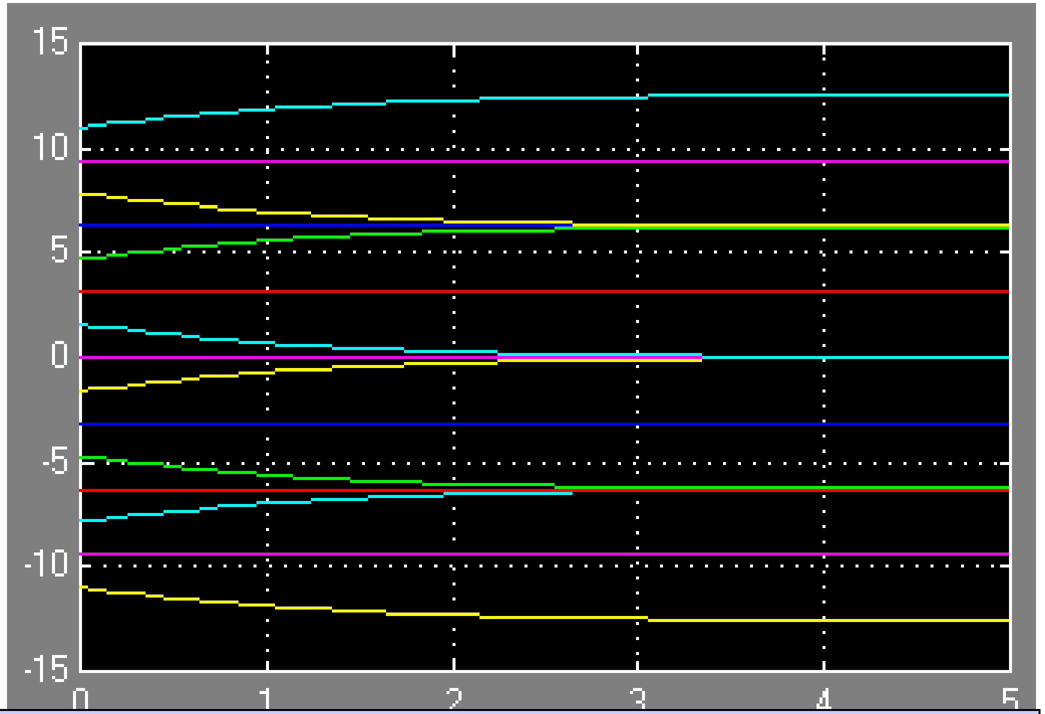


Systémy prvního řádu – 4

Izolovaných e. může být i nekonečně mnoho:

Systém $\dot{x} = -\sin(x)$ má $x_e = k\pi,\ k = 0, \pm 1, \ldots$ $\left(0 = \sin(x)\right)$






```
» dsolve('Dx=-sin(x)')
ans =
atan2(2*exp(-t-C1)/(1+exp(-2*t-2*C1)),(-exp(-2*t-2*C1)+1)/(1+exp(-2*t-2*C1)))
```

Co není u lineárních systémů 3

U lineárních systémů ještě nemůže nastat:

Limitní cykly (limit cycles)

Stabilní oscilace s pevnou amplitudou a frekvencí nezávisle na počátečním stavu. Např.

- Van der Polovy rovnice mají jeden stabilní limitní cyklus (modelují tlukot srdce, nervové pulsy, stahy svalů v jícnu a střevech)
- obvody digitálních hodin a astabilních multivibrátorů produkují cyklické změny mezi 0 a 1 (degenerované van der Polovy rovnice).

Oscilace

Lineární systém

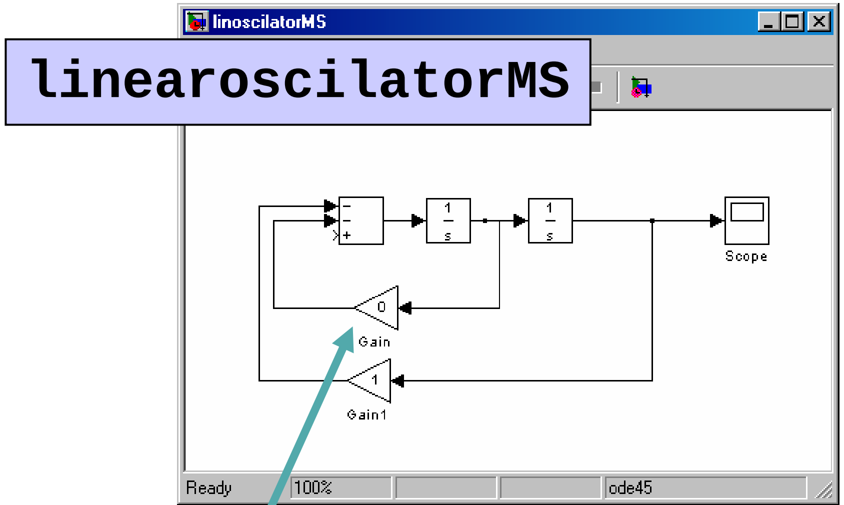
- může oscilovat (když má póly na imaginární ose), ale
- oscilace jsou nestabilní (póly na mezi stability) a
- jejich amplituda závisí na počátečních podmínkách

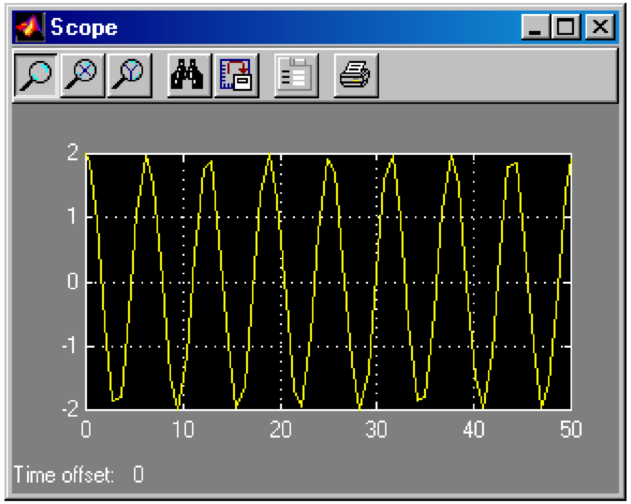
Nelineární systém

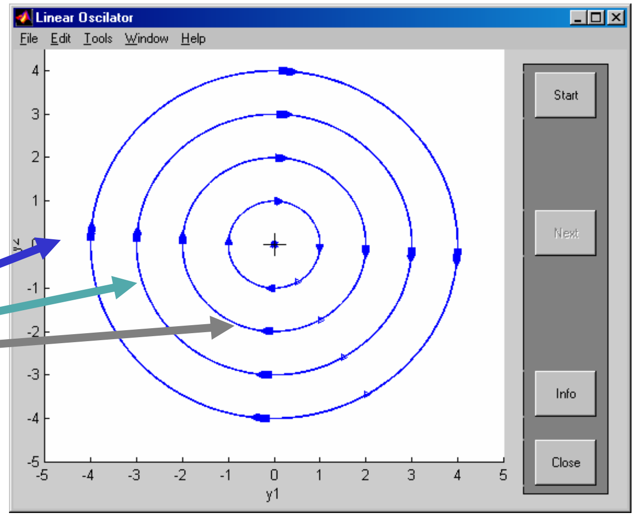
- limitní cykly (limit cycles), což jsou stabilní oscilace
- s pevnou amplitudou a frekvencí nezávisle na poč. stavu.
- Např.
  - van der Polovy rovnice (modelují tlukot srdce, nervové pulsy, stahy svalů v jícnu a střevech) mají jeden stabilní limitní cyklus
  - obvody digitálních hodin a astabilních multivibrátorů produkují cyklické změny mezi 0 a 1 (degenerované van der Polovy rov.)

Lineární oscilace

- rovnice $\ddot{x} + x = 0$







- změna ničí oscilace
- různé počáteční podmínky

Lineární oscilace / 2

- perturbovaná rovnice

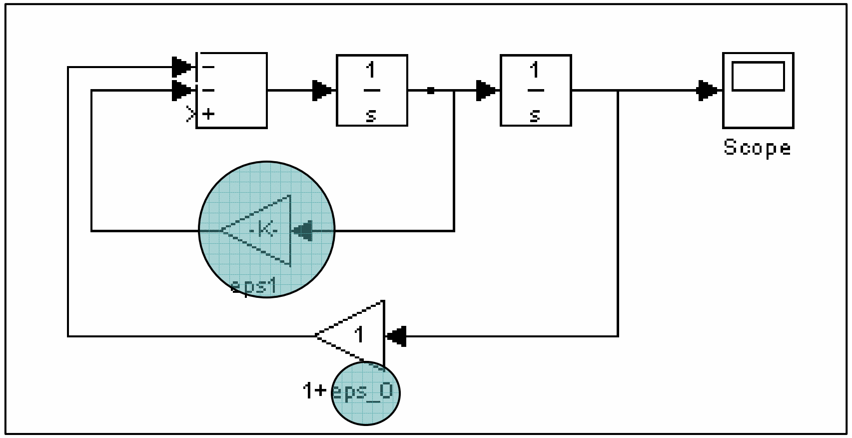
$$\boxed{\ddot{x} + \varepsilon_1 \dot{x} + (1 + \varepsilon_0) x = 0}$$

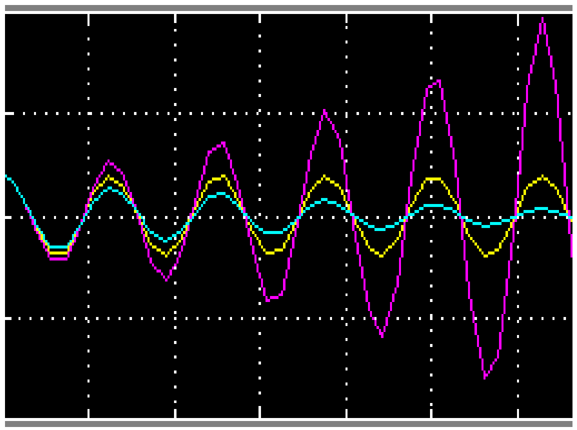
- má vlastní čísla

$$-\frac{\varepsilon_1}{2} \pm i \frac{\sqrt{4 + 4\varepsilon_0 - \varepsilon_1^2}}{2} \quad \text{pokud} \quad \varepsilon_1^2 < 4 + 4\varepsilon_0$$

ničí ustálené oscilace

$$\varepsilon_1 = 0, -1, +1$$

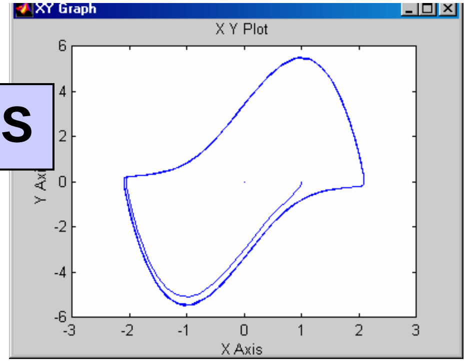


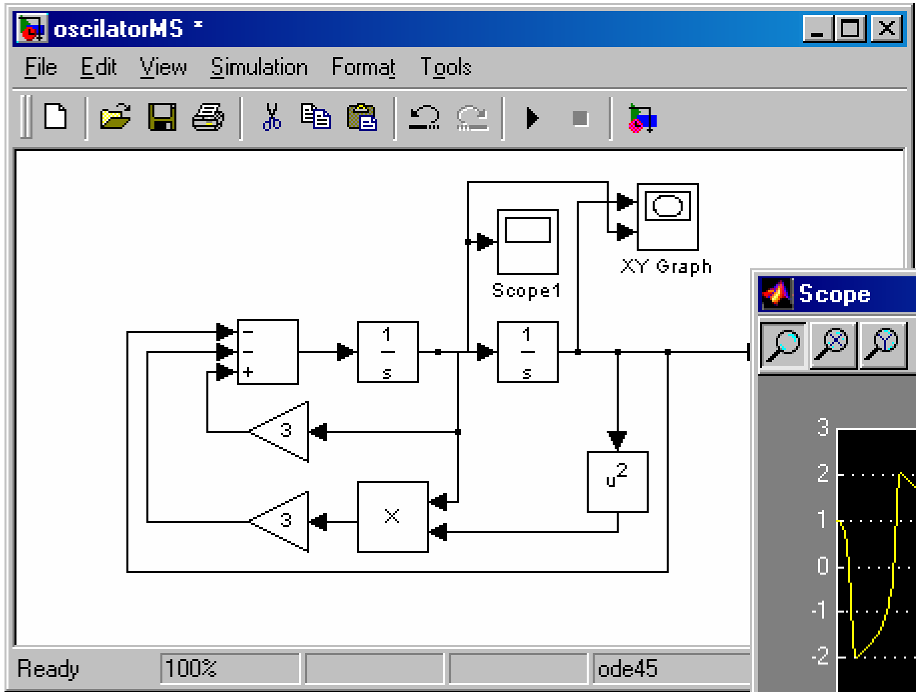


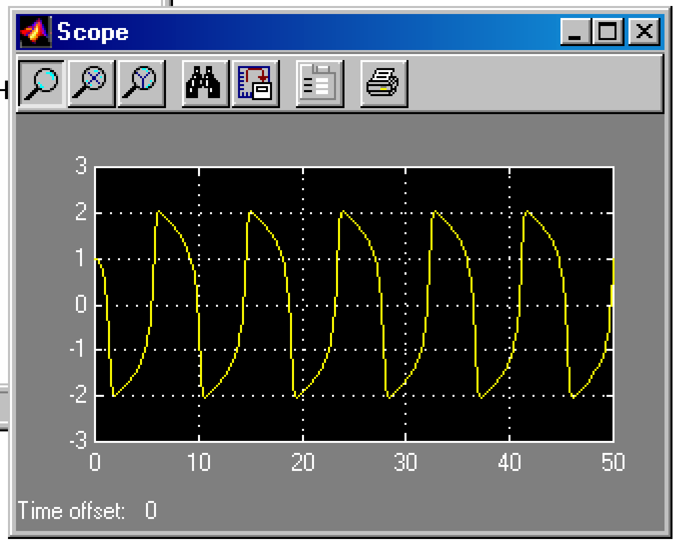
Nelineární oscilace

- $$\ddot{x} + x + 3(x^2 - 1)\dot{x} = 0$$

oscilatorMS



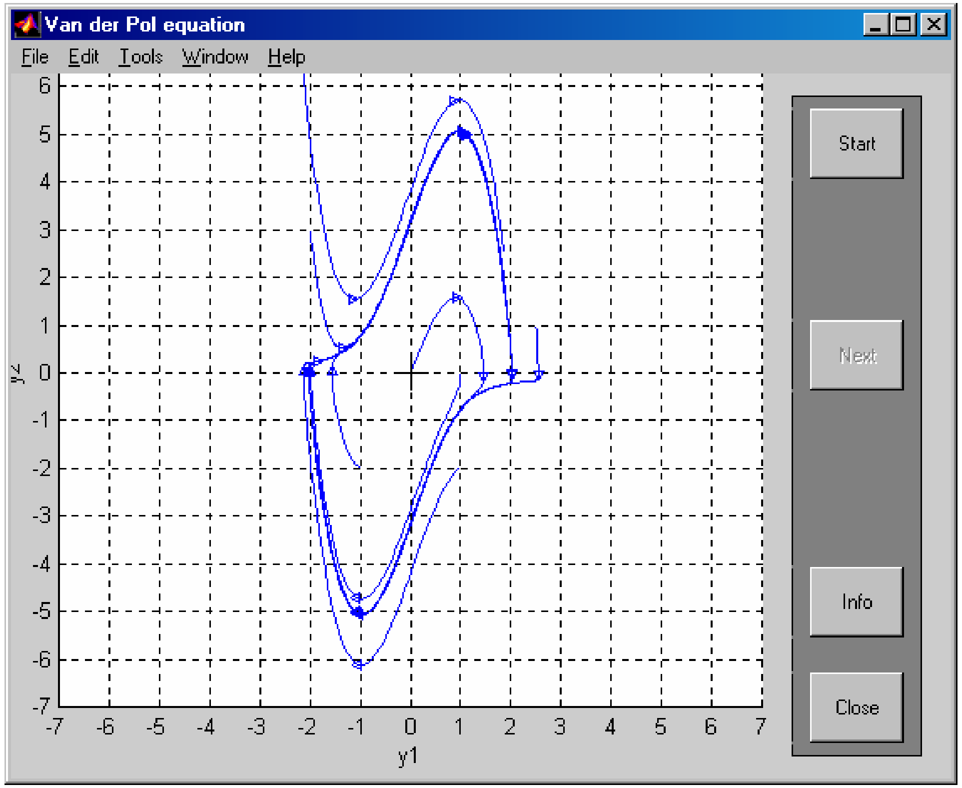




i když měníme zesílení a pp

Nelineární oscilace

- $\ddot{x} + x + 3(x^2 - 1)\dot{x} = 0$ **demophOscilator2**



Co není u lineárních systémů 4

U lineárních systémů ještě nemůže nastat:

Bifurkace (rozdvojení, rozvětvení; bifurcations)

Kvalitativní rysy nelineárních systémů (např. počet a stabilita ekvilibrií, a limitních cyklů) se mohou měnit se změnou parametrů. Např.

- v ose zatížený nosník má jedno ekvilibrium do jisté kritické hodnoty zatížení, pak má tři
- se změnou úhlu náběhu letadla se konstantní úhel dráhy stává nestabilní a je nahrazen cyklickým módem s konstantními otáčkami

Bifurkace

Systém s rovnicí $\dot{x} = (a - x^2)x$ má

- 3 e. pro $a > 0$
  viz dřívější příklad $0 = (a - x_e^2)x_e \rightarrow$ $x_e = 0, \pm\sqrt{a}$
- ale jen 1 e. pro $a < 0$

$$x(t) = \frac{\mathrm{sign}(x_0)\sqrt{ab}}{b}$$

$$b = 1 + \frac{e^{-2at}(a - x_0^2)}{x_0^2}$$

$$\lim_{t\to\infty} b = \begin{cases} 1 \ldots a > 0 \\ -\infty \ldots a < 0 \end{cases}$$

- a 1 e. pro $a = 0$

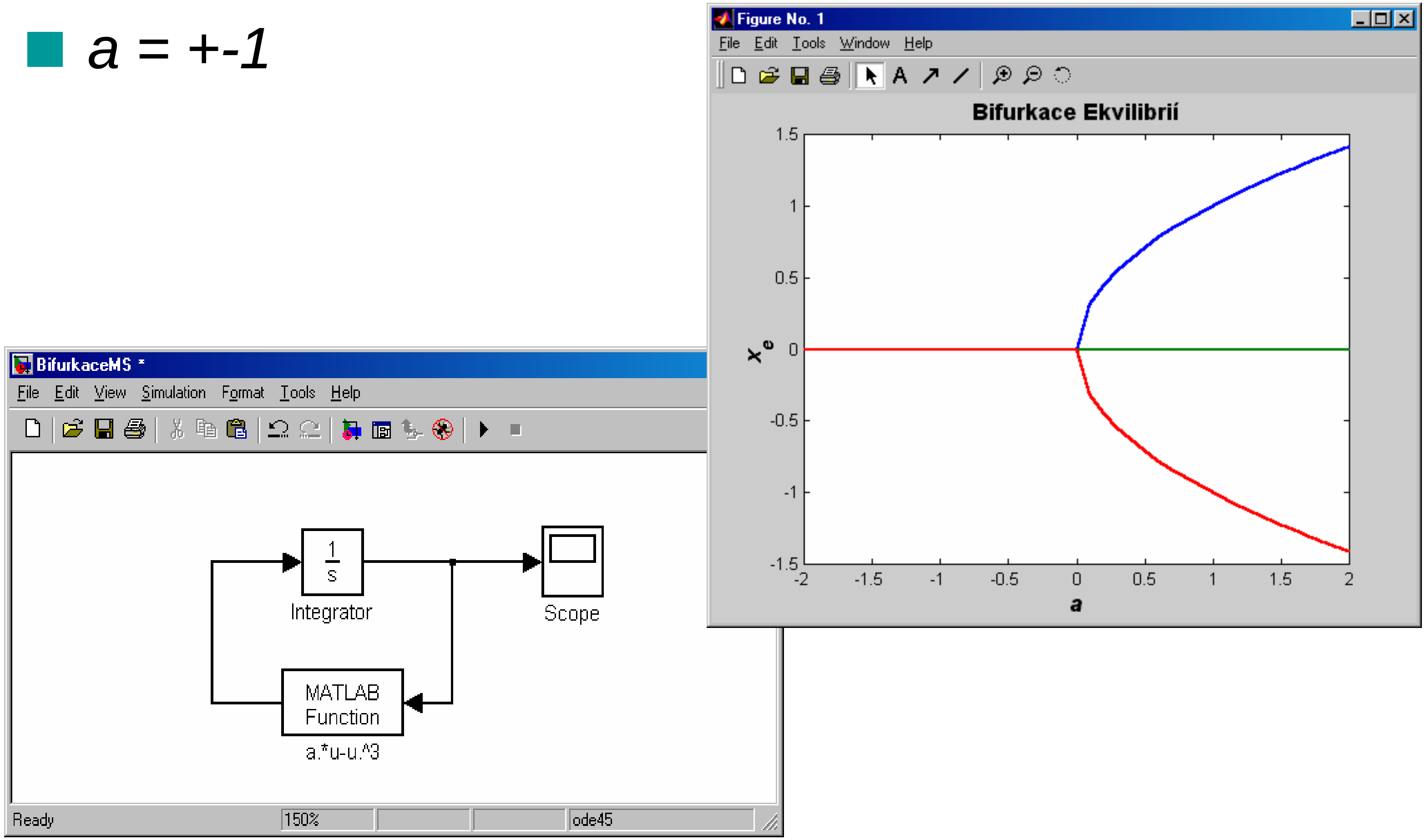
$$x(t) = \begin{cases} \mathrm{sign}(x_0) \Big/ \sqrt{2t + 1/x_0^2} & \ldots x_0 \neq 0 \\ 0 & \ldots x_0 = 0 \end{cases}$$

```
ans =
1+exp(-
1+exp(-
```

```
» dsolve('Dx=x*(a-x^2)','x(0)=sqrt(a)')
ans = [ -a^(1/2)]
      [  a^(1/2)]

» dsolve('Dx=x*(a-x^2)','x(0)=sqrt(-a)')
ans = [  1/(1-2*exp(-2*a*t))*((1-2*exp(-2*a*t))*a)^(1/2)]
      [ -1/(1-2*exp(-2*a*t))*((1-2*exp(-2*a*t))*a)^(1/2)]
```

Bifurkace

- *a = +-1*



BifurkaceMS.mdl

Co není u lineárních systémů - 5 a 6

U lineárních systémů ještě nemůže nastat:

Synchronizace

Vázané oscilátory synchronizují frekvenci a fázi.

- srdeční svaly a svaly způsobující stahy střev a jícnu
- fázově uzamknuté obvody

Při změně parametrů synchronizace mizí (arytmie, loop skipping).

A to nejlepší nakonec:

Složité dynamické chování

- chaos
- turbulence
- malá změna počátečních podmínek výrazně změní chování
- efekt motýlího křídla

Lorenzův atraktor

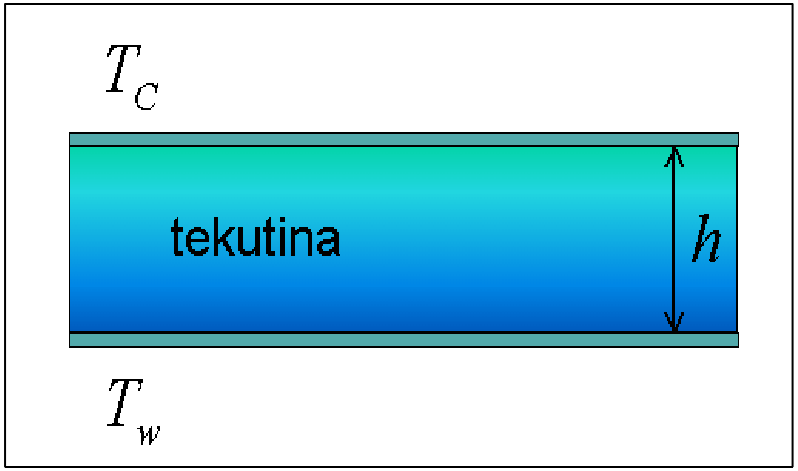
Model proudění v tekutině
Různé stavy
Lorenzovy rovnice
Řešení Lorenzových rovnic
Jiný model
Grafika a simulace
Filosofie

Edward Lorenz

- *Deterministic Nonperiodic Flow,* Journal of Atmospheric Sciences in 1963.
- Jako první popsal chaotické jevy, zejména citlivou závislost na počátečních podmínkách
- Lorenzův atraktor, Lorenzův systém, atd.: jednoduchý, třírozměrný systém obyčejných diferenciálních rovnic s chaotickým chováním
- Lorenzův atraktor dokazuje, že chaos není projevem složitosti dat, modelů apod. nýbrž nečím "zásadnějším"

Zjednodušený model proudění v tekutině

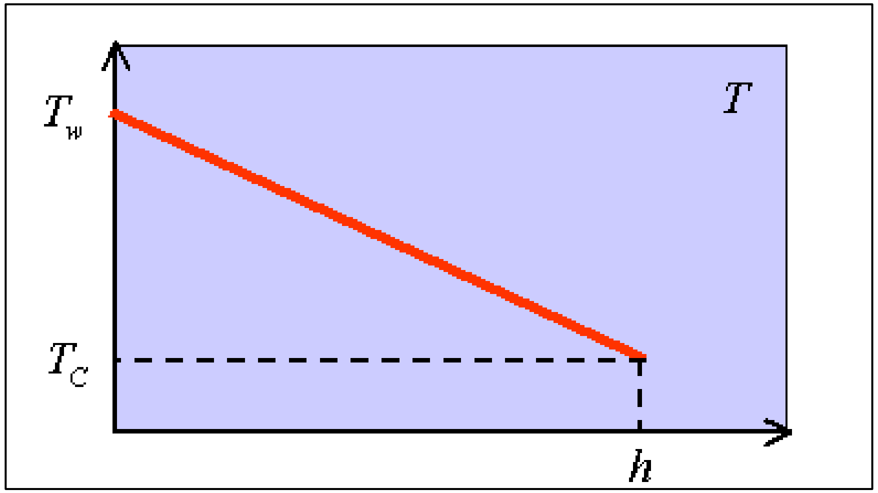
- Edward Lorenz, MIT,1963: nejjednodušší model ještě připomínající počasí
- tekutý systém - „atmosféra“ - zjednodušený na tekutou vrstvu
- ohřívanou zespodu - „povrch Země ohřátý sluncem“ a ochlazovanou shora
- teploty dole T_W („warm“) a nahoře T_C („cold“) jsou konstantní
- a $T_W - T_C = \mathrm{konst} > 0$
- tento systém studoval experimentálně už Bérnard (1900) a teoreticky Rayleigh (1916) a teď se mu říká



Rayleigh- Bérnardova buňka

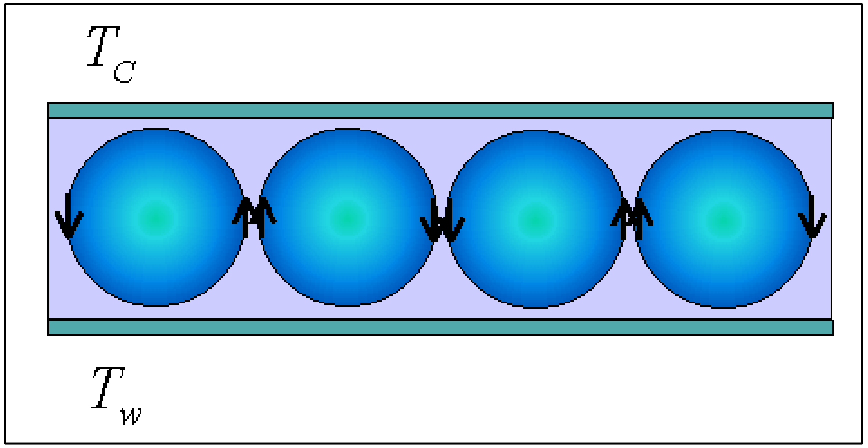
Konduktivní stav

- Pro $\delta T = T_W - T_C$ malé
- Tekutina je v klidu, neproudí a
- teplo se převádí zdola nahoru vedením (kondukcí).
- „Balíček" teplé tekutiny (s menší hustotou) má tendenci stoupat,
- ale jeho pohyb je tlumen viskozitou
- a tak odevzdá všechno teplo okolí dříve, než se pohne.
- Teplota klesá lineárně s výškou



Konvekční stav

- Pro $\delta T = T_W - T_C$ větší
- Nadnášející síly překonají viskozitu
- a tekutina začne proudit (konvekce)
- „Balíček“ teplé tekutiny vystoupá nahoru, tam ztratí teplo a klesne. Dole se ohřeje, atd.
- Vzniká stabilní proudění tvaru (schematicky)



Časově proměnný stav

- Při dalším zvětšení p$\delta T = T_W - T_C$račuje, ale mění se s časem.
- Neustaluje se do žádného rovnovážného stavu (např. proudění s konstantní rychlostí), což je typicky nelineární.
- Po odeznění přechodového jevu se lineární systém (s tlumením a bez vnějšího buzení) ustálí.

Lorenzovy rovnice

- Rayleigh-Bérnardovu buňku popisují Navier-Stokesovy rovnice
- Jejich drastickým (a tvořivým) zjednodušením (aproximací) se Lorenz omezil na tři proměnné, obvyklé ve fyzice (které nejsou prostorové!)
- *X* vyjadřuje časovou závislost proudové funkce tekutiny (její prostorové derivace jsou složky rychlosti toku). Její prostorovou závislost volil Lorenz „od ruky“, aby mu vyšlo kruhové proudění.
- *Y* je rozdíl teploty stoupajících a klesajících balíčků v dané výšce
- *Z* je odchylka teploty od lineární křivky v závislosti na výšce
- Všechny proměnné jsou bezrozměrné
- Tyto tři proměnné popisují slavné rovnice

$$\dot{x} = p(y - x)$$

$$\dot{y} = -xz + rx - y$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

Parametry

Parametry rovnic jsou:

- Prandtlovo číslo *p* , což je poměr kinetické viskozity tekutiny ke koeficientu tepelné difuze zhruba udává poměr rychlosti ztráty energie balíčku třením ku rychlosti ztráty energie vedením.
- Lorenz použil $p = 10$, což odpovídá studené vodě.
- Rayleigho číslo *r*, což je bezrozměrná míra rozdílu teplot dolní a horní vrstvy.
- Budeme *r* měnit jako parametr
- *b* je poměr výšky *h* vrstvy k šířce „kruhového proudění“.
- Proudění nastane při nejmenším *r* pro $b = 8/3$, což je obvykle volená hodnota.

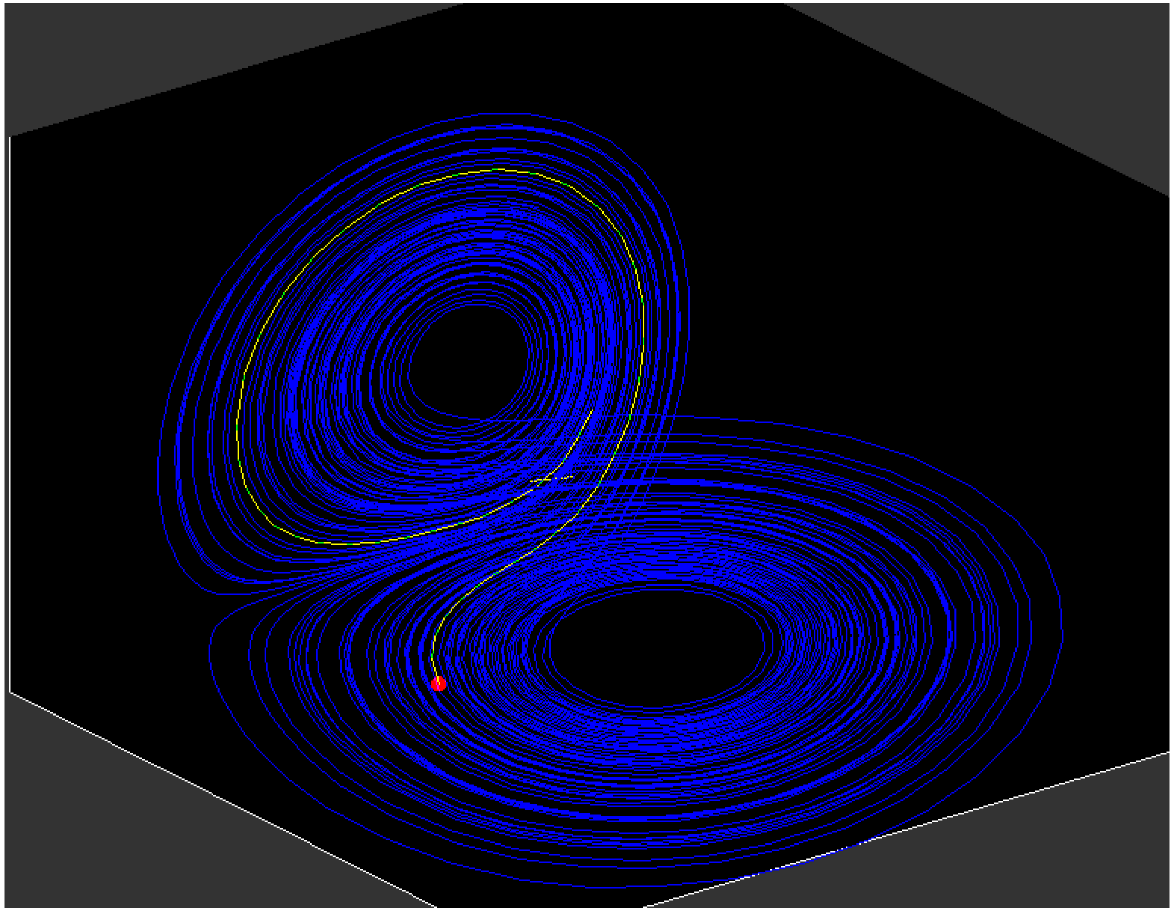
Řešení Lorenzových rovnic ?

- Model Rayleigh-Bérnardovu buňky je extrémně zjednodušený a výsledné rovnice vypadají velmi jednoduše.
- Přesto je chování tohoto systému, tj. řešení rovnic, nečekaně složité! Může být i chaotické, jak ukážeme později.
- Analytické řešení nebylo nalezeno a dnes se soudí, že analytické neexistuje. Rovnice tedy musíme řešit numericky.
- Zajímavá otázka je, proč si Rayleigh, Bérnard a spol. vůbec nevšimli, jak zajímavé a složité chování může nastat?
- Nebo obecněji, proč si nikdo ze slavných fyziků nevšiml mnohem dříve „deterministického chaosu“, když měly všechny nástroje (matematické) i systémy k dispozici.
- Odpověď je překvapivě jednoduchá: neměli počítače.
- I sám Lorenz měl počítač jen velmi primitivní (relativně).
- Někteří fyzikové a matematikové přece jen mnoho vlastností zjistili, ale ostatní jim nepřikládali takový význam
- Experimentálně pozorovaná chaotická chování byla pokládána za „náhodná“.

Poincaré, Maxwell

3-D demo v Matlabu

```
lorenz
```



Filosofické důsledky

Divergence, determinisums a predikovatelnost

Deterministus vs. svobodná vůle

Divergence, determinismus a predikovatelnost

Proč je to tak důležité aneb trocha filosofie

- Pokud systém v některém rozsahu svých parametrů vykazuje takovou divergenci velmi blízko začínajících trajektorií, pak
- je jeho chování v podstatě nepredikovatelné.
- Systém je deterministický a kdybychom pp. znali přesně, mohli bychom jeho budoucí chování přesně predikovat.
- Ale to je k ničemu: úplně přesně pp. (parametry, a pod.) nikdy neznáme/nenastavíme a tak v každém reálném experimentu/ /reálné simulaci je chování nepredikovatelné.
- Budoucnost systému je neurčitelná přestože je deterministický.
- Proto řešení rovnic systému nelze nalézt v uzavřeném tvaru.
- Efekt motýlího křídla