Řešení diferenciálních a diferenčních rovnic

Petr Hušek

Řešení diferenciálních a diferenčních rovnic

Petr Hušek

husek@fel.cvut.cz

katedra řídicí techniky

Fakulta elektrotechnická

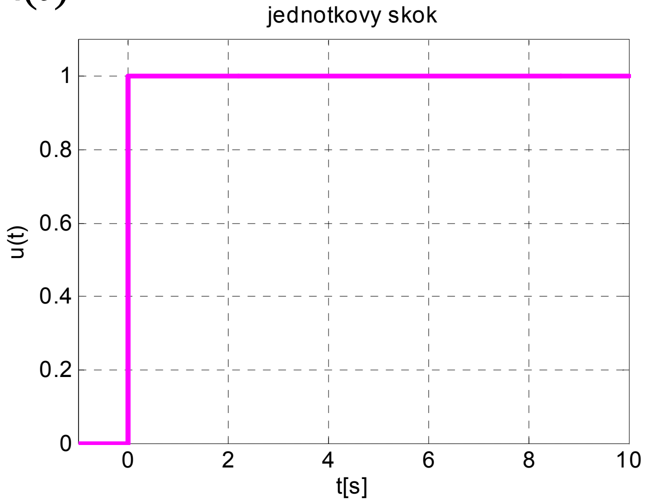
ČVUT v Praze

Co se dnes dozvíme?

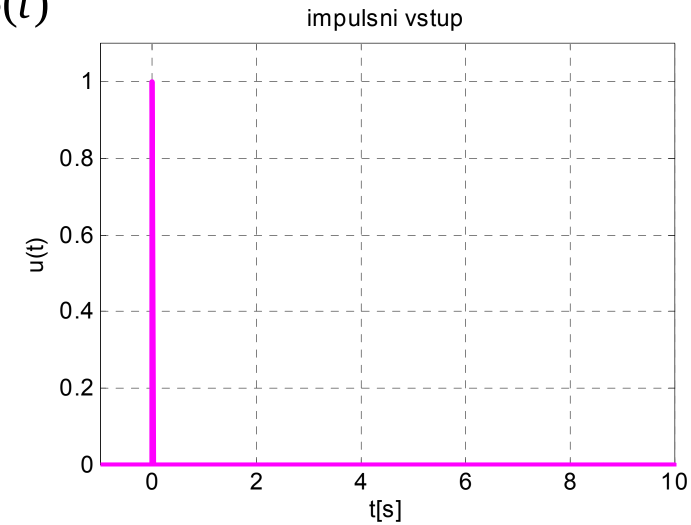
- Jaké vstupní signály používáme pro ověřování modelů
- Jak analyticky vyřešit jednoduché lineární diferenciální rovnice
- Z jakých částí se skládá řešení diferenciální rovnice
- Jak vyřešit diferenční rovnici

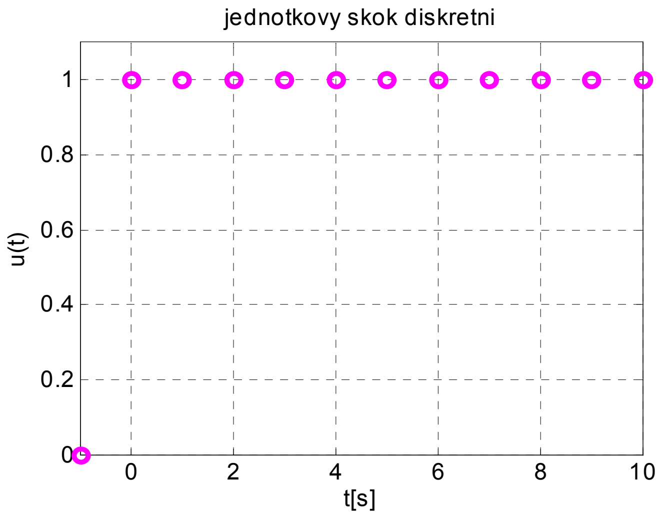
Používané vstupní signály

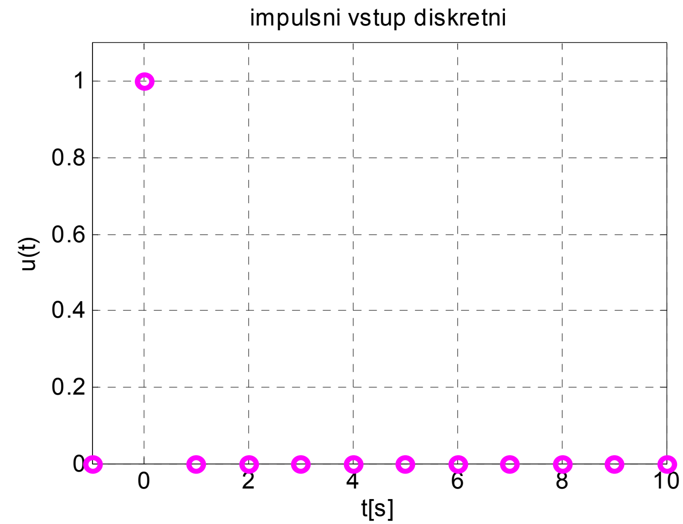
$u(t) = 1(t)$

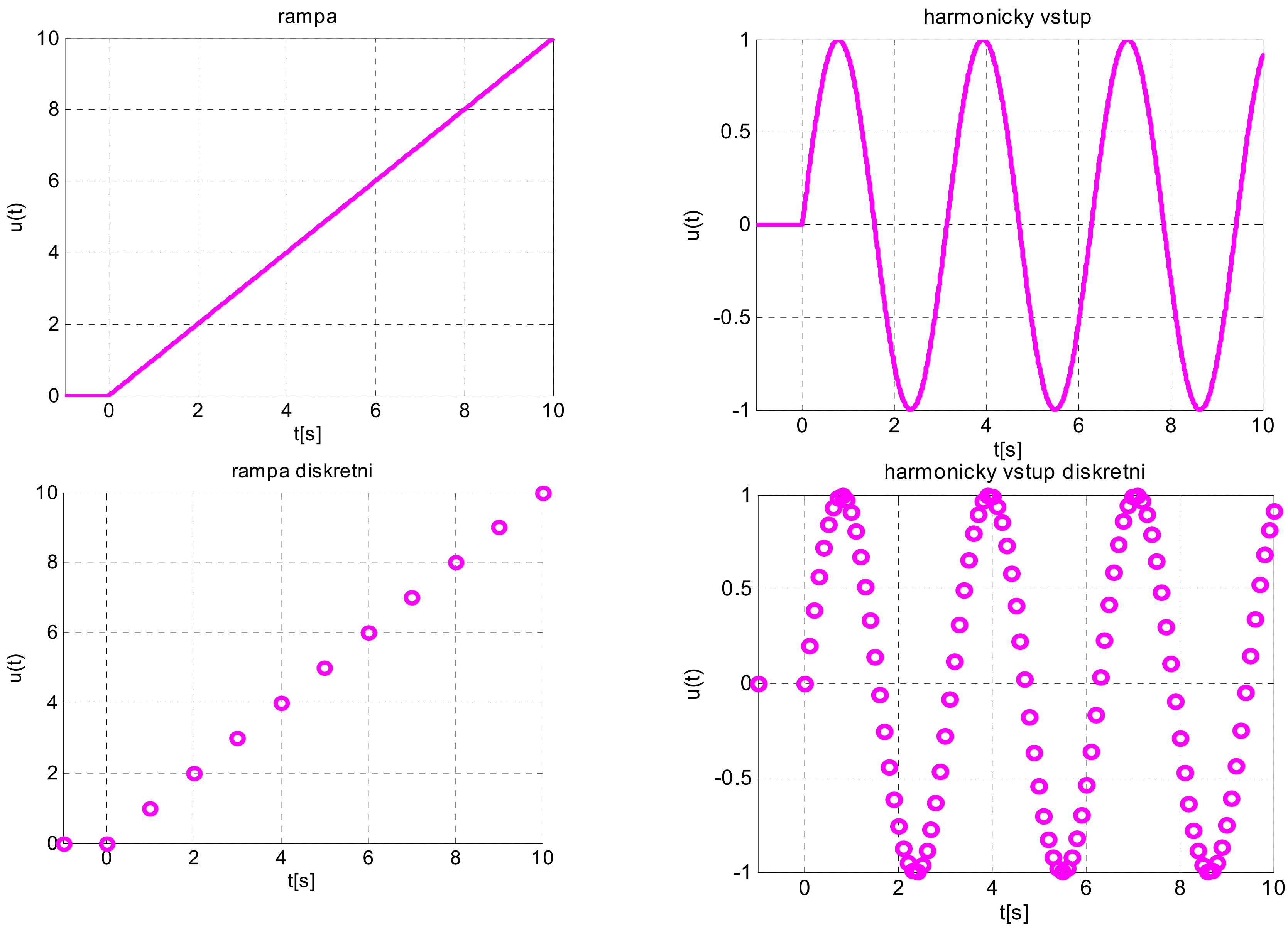


$u(t) = \delta(t)$








rampa
u(t)
t[s]
harmonicky vstup
u(t)
t[s]
rampa diskretni
u(t)
t[s]
harmonicky vstup diskretni
u(t)
t[s]

Řešení diferenciálních a diferenčních rovnic

- nutné pro ověření správnosti modelu (nebo odsimulovat)
- známe vstup u(t), počáteční podmínky; výstup y(t) = ?

Diferenciální rovnice

parametry (konstanty)

$$\frac{J}{R}\frac{dv(t)}{dt}+\frac{B}{R}v(t)=F(t)r$$

derivace hledané (výstupní) funkce

známá (vstupní) funkce (+ její derivace)

- lineární (formována lineární kombinací derivací vstupu a výstupu) x nelineární diferenciální rovnice

$$\frac{J}{R}\frac{dv(t)}{dt}+\frac{B}{R}v(t)=F(t)r \qquad a\frac{dv(t)}{dt}+bv^2(t)=F(t)$$

- obecná lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty v teorii systémů

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0 y(t)=b_m u^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_0 u(t)$$

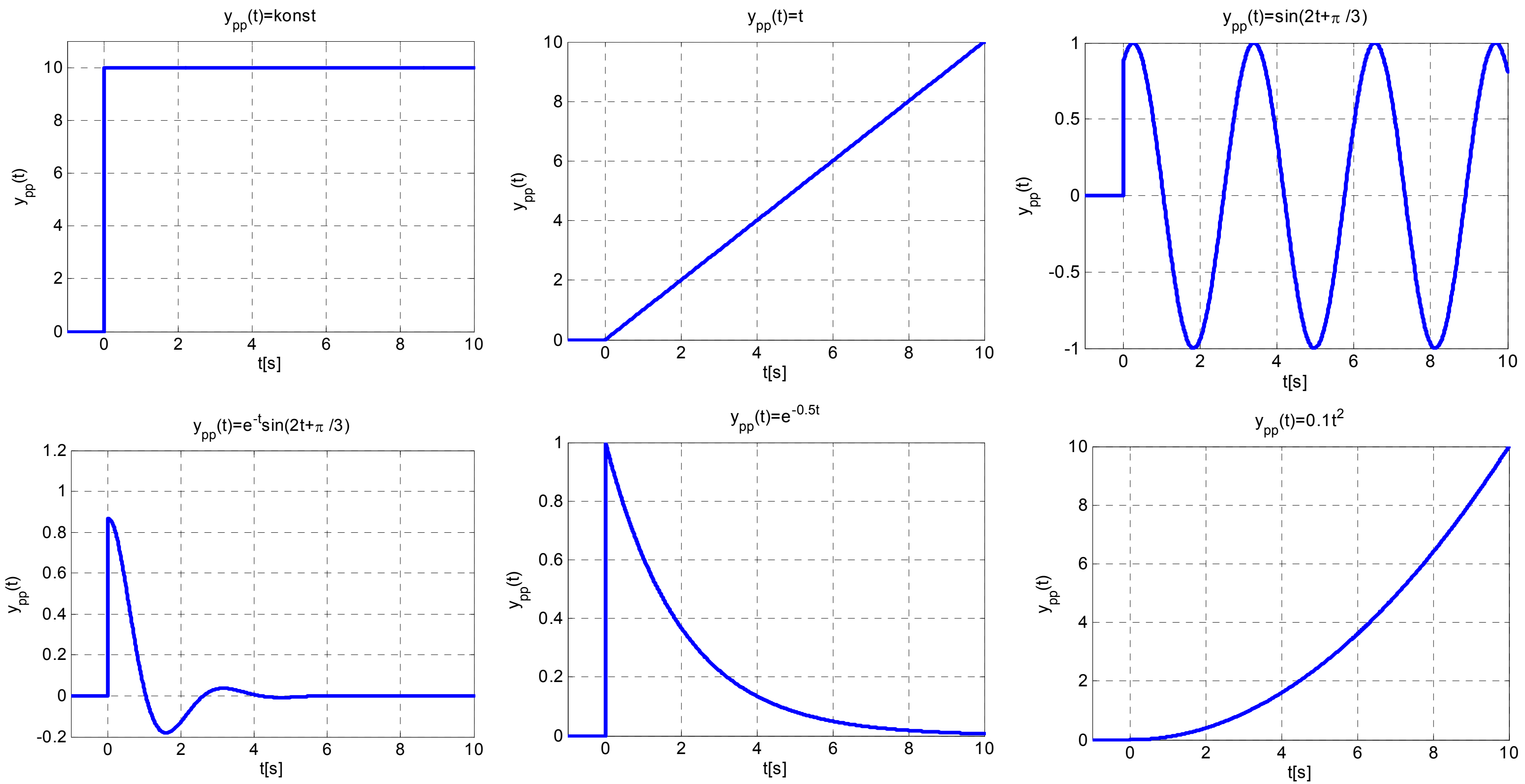
$$y^{(2)}(t)=\frac{d^2y(t)}{dt^2}=y''(t)=\ddot{y}(t)=\ddot{y},\ y^{(0)}(t)=y(t),\ y(t)=u(t)=0 \text{ pro } t<0$$

- řád rovnice n (>=m)
- popisuje lineární spojitý systém
- k její řešení nutno znát n počátečních podmínek

$$y^{(n-1)}(0), y^{(n-2)}(0), \ldots, y'(0), y(0)$$

- analytické řešení $y(t) = y_{pp}(t) + y_u(t)$
  - $y_{pp}(t)$ – závisí na počátečních podmínkách (odezva na ně)

    – pouze funkce e^{at}, $e^{at}\sin(\omega t+\varphi)$, t^n

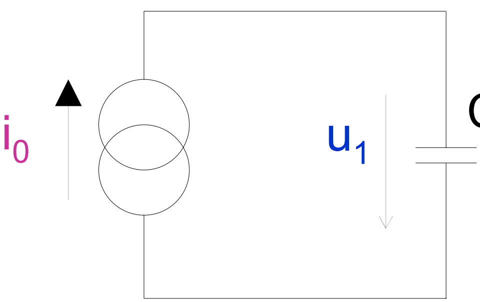


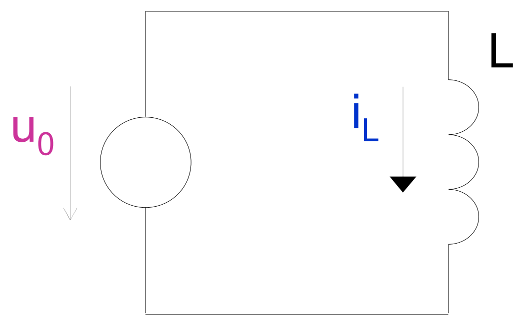
- $y_u(t)$ – odezva na vstupní signál u(t) (vnucená)

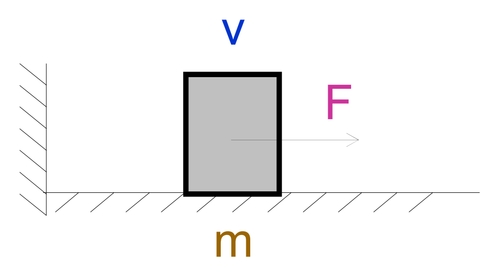
  – skládá se z funkcí e^{at}, $e^{at}\sin(\omega t+\varphi)$, t^n (závislé na vlastnostech systému) a z funkce signálu u(t)

Řešení jednoduchých diferenciálních rovnic

- rovnice 1.řádu – integrační charakter







$$\frac{du_C(t)}{dt}=\frac{1}{C}i_0(t), u_C(0)=u_{C0} \qquad \frac{di_L(t)}{dt}=\frac{1}{L}u_0(t), i_L(0)=i_{L0} \qquad \frac{dv(t)}{dt}=\frac{1}{m}F(t), v(0)=v_0$$

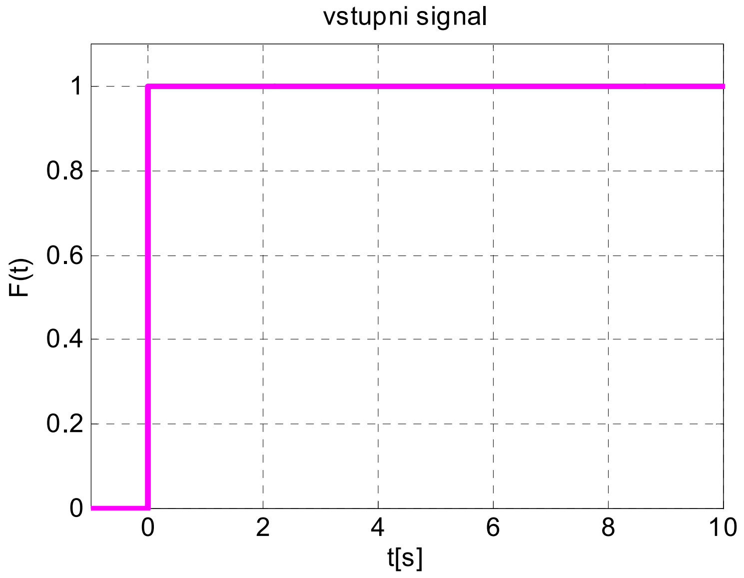
$$\boxed{\frac{dy(t)}{dt}=bu(t), y(0)=y_0}$$

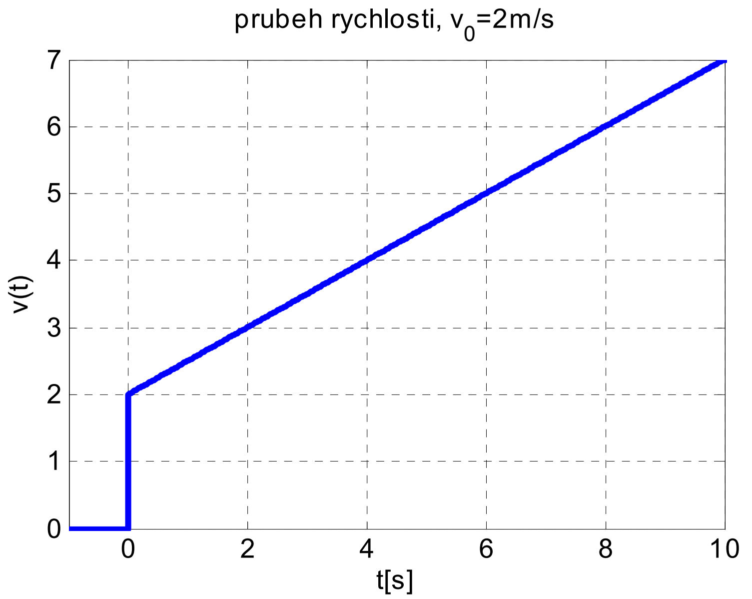
řešení:

$$y(t) = y_{pp}(t) + y_u(t) = y_0 + b\int_0^t u(\tau)d\tau$$

$$u(t) = 1(t) : y(t) = y_0 + b\int_0^t 1(\tau)d\tau = y_0 + bt$$

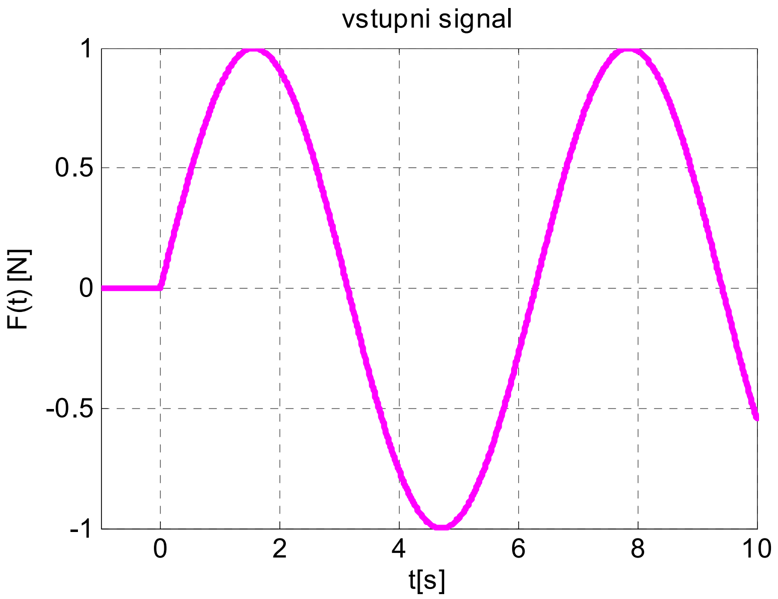
$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{m}F(t), v(0) = v_0, F(t) = 1(t), m = 2kg; v(t) = v_0 + 0.5t$$

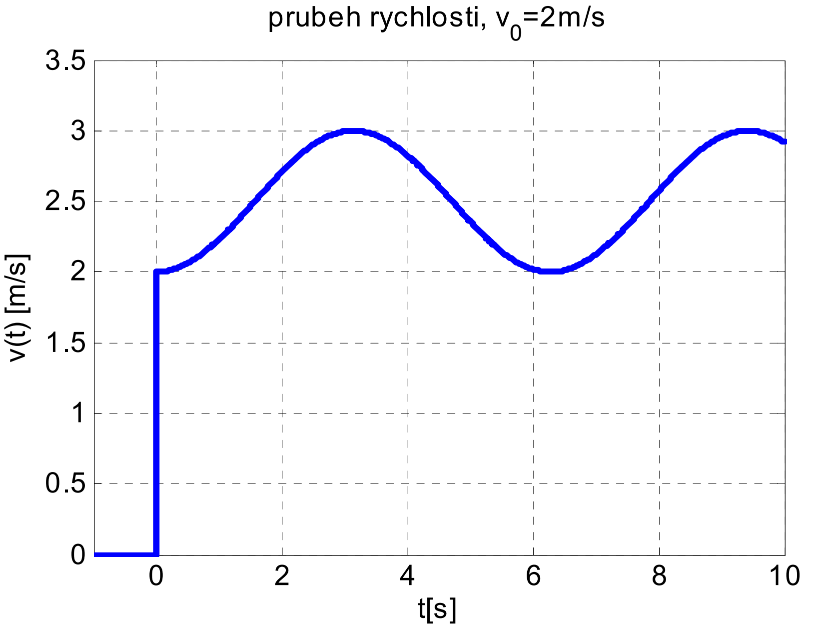




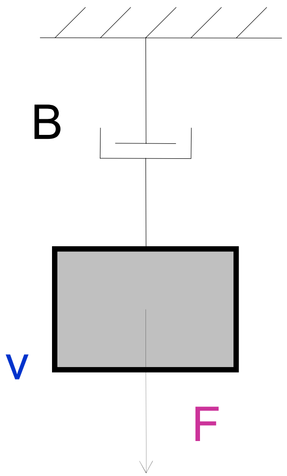
$$u(t) = \sin\omega t : y(t) = y_0 + b\int_0^t \sin(\omega\tau)d\tau = y_0 - \frac{b}{\omega}\left(\cos(\omega t) - 1\right)$$

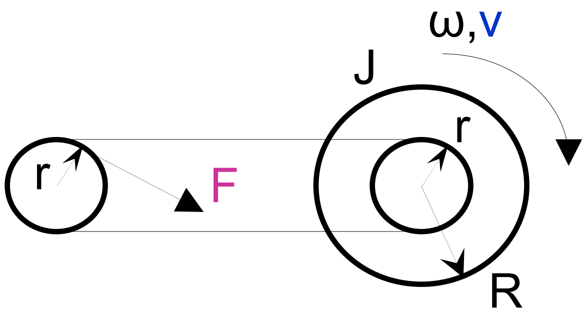
$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{m}F(t), v(0) = v_0, F(t) = \sin t, m = 2kg; v(t) = v_0 + 0.5 - 0.5\cos t$$

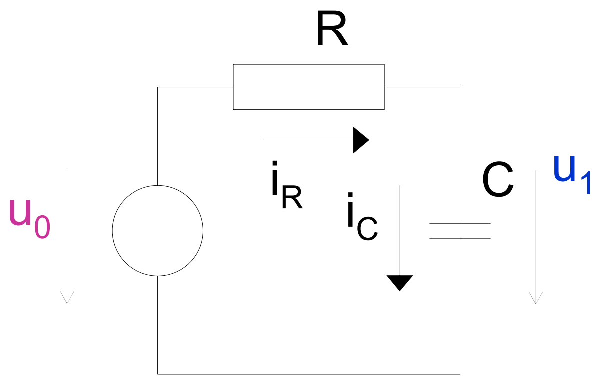




- rovnice 1.řádu







$$m\frac{dv(t)}{dt} + Bv(t) = F(t)$$

$$v(0) = v_0$$

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{B}{m}v(t) = \frac{1}{m}F(t)$$

$$\frac{J}{R}\frac{dv(t)}{dt} + \frac{B}{R}v(t) = F(t)r$$

$$v(0) = v_0$$

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{B}{J}v(t) = \frac{Rr}{J}F(t)$$

$$RC\frac{du_1(t)}{dt} + u_1(t) = u_0(t)$$

$$u_1(0) = u_{10}$$

$$\frac{du_1(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_1(t) = \frac{1}{RC}u_0(t)$$

$$\boxed{\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bu(t),\ y(0) = y_0}$$

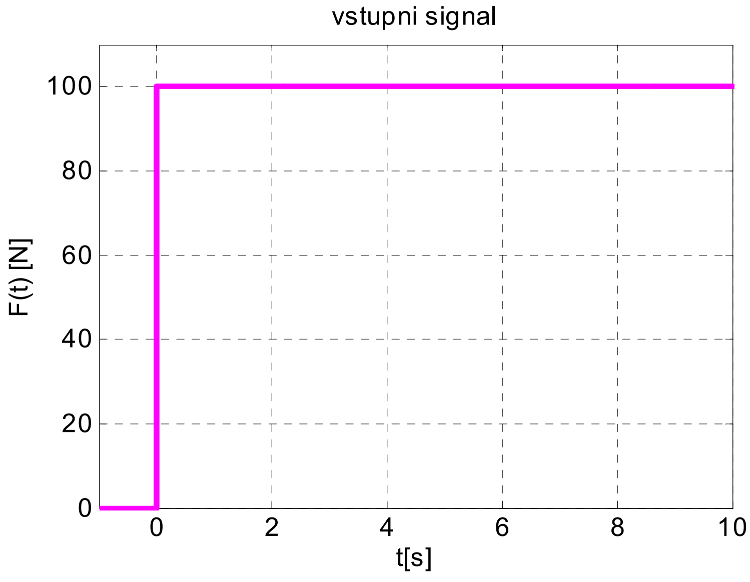
řešení:

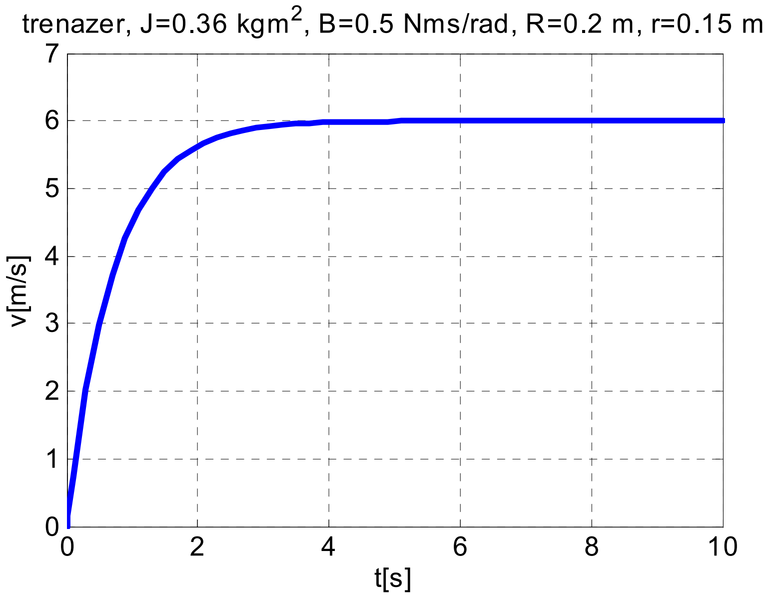
$$y(t) = y_{pp}(t) + y_u(t) = y_0 e^{-at} + b e^{-at} \int_0^t u(\tau) e^{a\tau} d\tau$$

$$u(t) = 1(t): y(t) = y_0 e^{-at} + b e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} d\tau = y_0 e^{-at} + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} e^{-at}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{B}{J} v(t) = \frac{Rr}{J} F(t), v(0) = v_0, F(t) = 100(t),$$

$$J = 0.36 \text{ kgm}^2, B = 0.5 \text{ Nms/rad}, R = 0.2\text{m}, r = 0.15\text{m}, v(0) = 0; v(t) = 6 - 6e^{-1.39t}$$





- rovnice vyšších řádů
  - lineární
    - – analyticky velmi obtížné
    - – použití integrální transformace – Laplaceova (pracné)
    - – numerické metody (součást simulačních programů)
  - nelineární
    - – analyticky většinou nemožné
    - – numerické metody (součást simulačních programů)

Diferenční rovnice

posunuté průběhy hledané (výstupní) funkce

$$Jv(t) - (J - BT)v(t-T) = rRTF(t-T)$$

parametry (konstanty)

známá (vstupní) funkce (+ její posunutí nebo diference)

$$\frac{J}{R}\frac{\Delta v(t-T)}{\Delta t} + \frac{B}{R}v(t-T) = F(t-T)r$$

diference hledané (výstupní) funkce

- lineární (formována lineární kombinací posunutých průběhů vstupu a výstupu) x nelineární diferenciální rovnice

$$Jv(t)-(J-BT)v(t-T)=rRTF(t-T)$$

$$\varphi(t)-2\varphi(t-T)+\varphi(t-2T)+\frac{gT^2}{l}\sin\varphi(t-2T)=0$$

- obecná lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

$$a_n y(t)+a_{n-1}y(t-T)+\cdots+a_0 y(t-nT)=$$

$$=b_m u(t)+b_{m-1}u(t-T)+\cdots+b_0 u(t-mT)$$

$$y(t)=u(t)=0 \text{ pro } t<0$$

- řád rovnice n (>=m) $\leftrightarrow$ kauzalita
- popisuje lineární diskrétní systém

- jiný zápis diferenční rovnice: t = kT (k $\rightarrow$ t) $\longrightarrow$

$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \cdots + a_0 y(k-n) =$$
$$= b_m u(k) + b_{m-1} u(k-1) + \cdots + b_0 u(k-m)$$

nebo

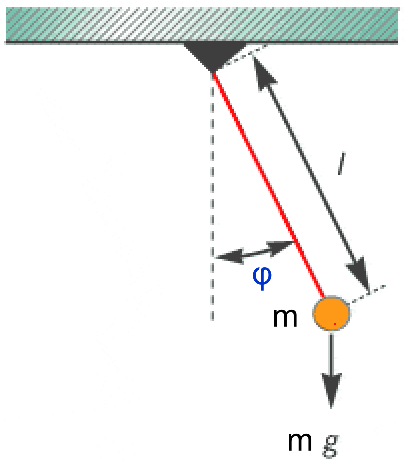
$$a_n y(t) + a_{n-1} y(t-1) + \cdots + a_0 y(t-n) =$$
$$= b_m u(t) + b_{m-1} u(t-1) + \cdots + b_0 u(t-m)$$

- pokud popisuje spojitý systém, T – perioda vzorkování
- k její řešení nutno znát n počátečních podmínek

$$y(0), y(1), \ldots, y(n-1)$$

- pro systémy řádu n>=2 často nutno p.p. přepočítat:

kyvadlo



$$\varphi(t) - 2\varphi(t-T) + \varphi(t-2T) + \frac{gT^2}{l}\sin\varphi(t-2T) = 0$$

potřebujeme $\varphi(0) = \varphi_0, \varphi(T) = \varphi_T$

většinou známe $\varphi(0) = \varphi_0, \omega(0) = \omega_0$

přepočet

$$\varphi(0) = \varphi_0, \omega(0) \triangleq \frac{\Delta\varphi(0)}{T} = \frac{\varphi(T) - \varphi(0)}{T} \Rightarrow \varphi(T) = \omega(0)T + \varphi(0)$$

Řešení diferenčních rovnic

rekurzivně

$$Jv(t)-(J-BT)v(t-T)=rRTF(t-T)$$

$$v(t)-\frac{J-BT}{J}v(t-T)=\frac{rRT}{J}F(t-T)$$

$$J=0.36\ \mathrm{kgm}^2, B=0.5\ \mathrm{Nms/rad},\ R=0.2\mathrm{m}, r=0.15\mathrm{m}, v(0)=0$$

volba T = 0.1s: $v(t)-0.861v(t-T)=0.0083F(t-T)$

$$v(t)=0.861v(t-T)+0.0083F(t-T)$$

uvažujme F(t) = 100*1(t)

t = T = 0.1s: $$v(T) = 0.861 v(0) + 0.0083 F(0)$$
$$= 0.861 \cdot 0 + 0.0083 \cdot 100$$
$$= 0.83$$

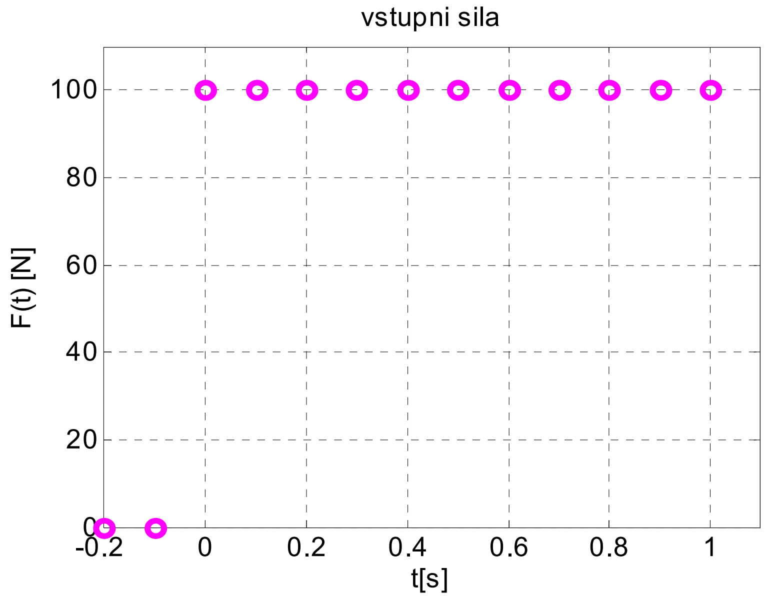
t = 2T = 0.2s: $$v(2T) = 0.861 v(T) + 0.0083 F(T)$$
$$= 0.861 \cdot 0.83 + 0.0083 \cdot 100$$
$$= 1.54$$

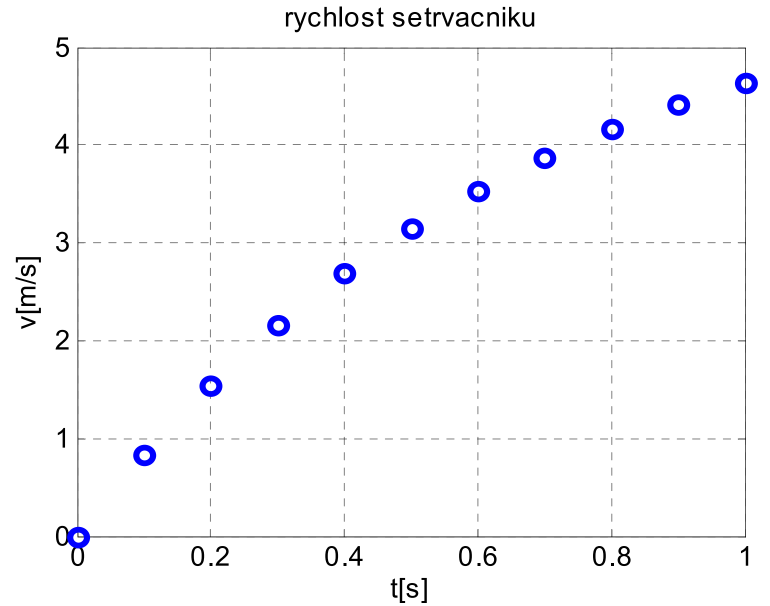
t = 3T = 0.3s: $$v(3T) = 0.861 \cdot v(2T) + 0.0083 \cdot F(2T)$$
$$= 0.861 \cdot 1.71 + 0.0083 \cdot 100$$
$$= 2.16$$

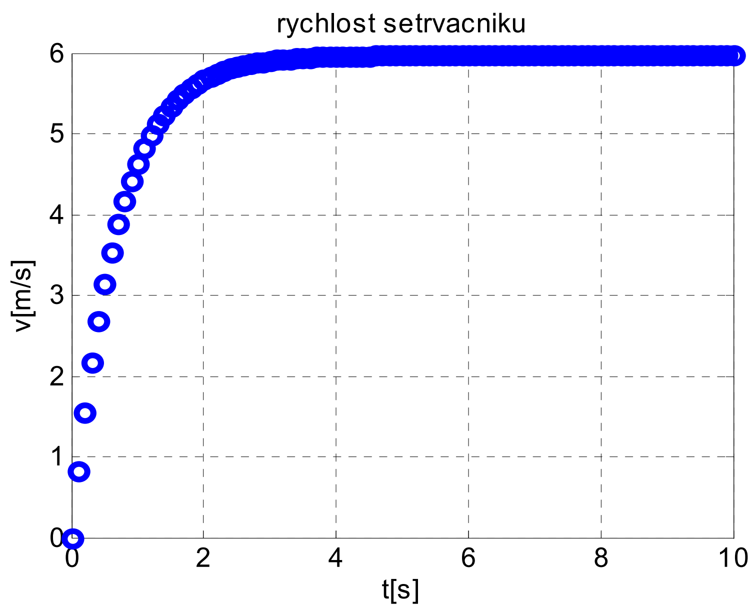
$$\vdots$$

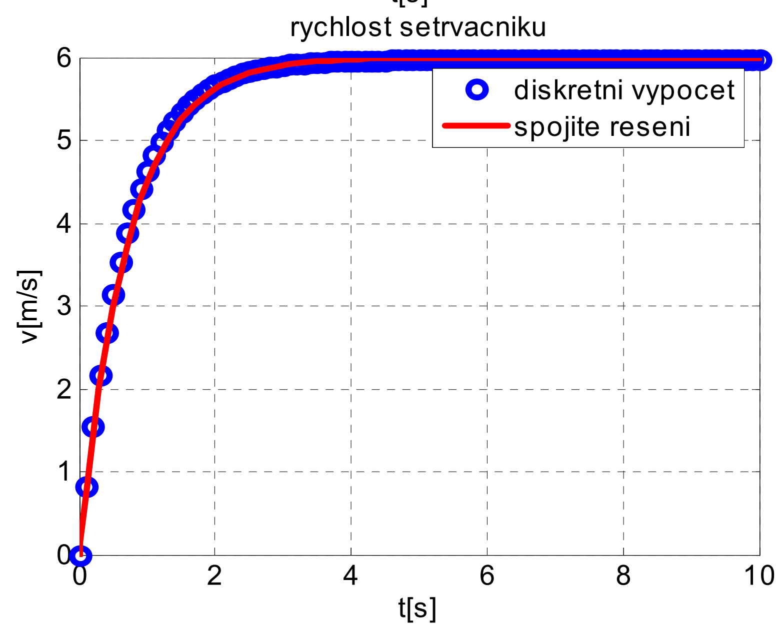
- velmi snadno algoritmizovatelné

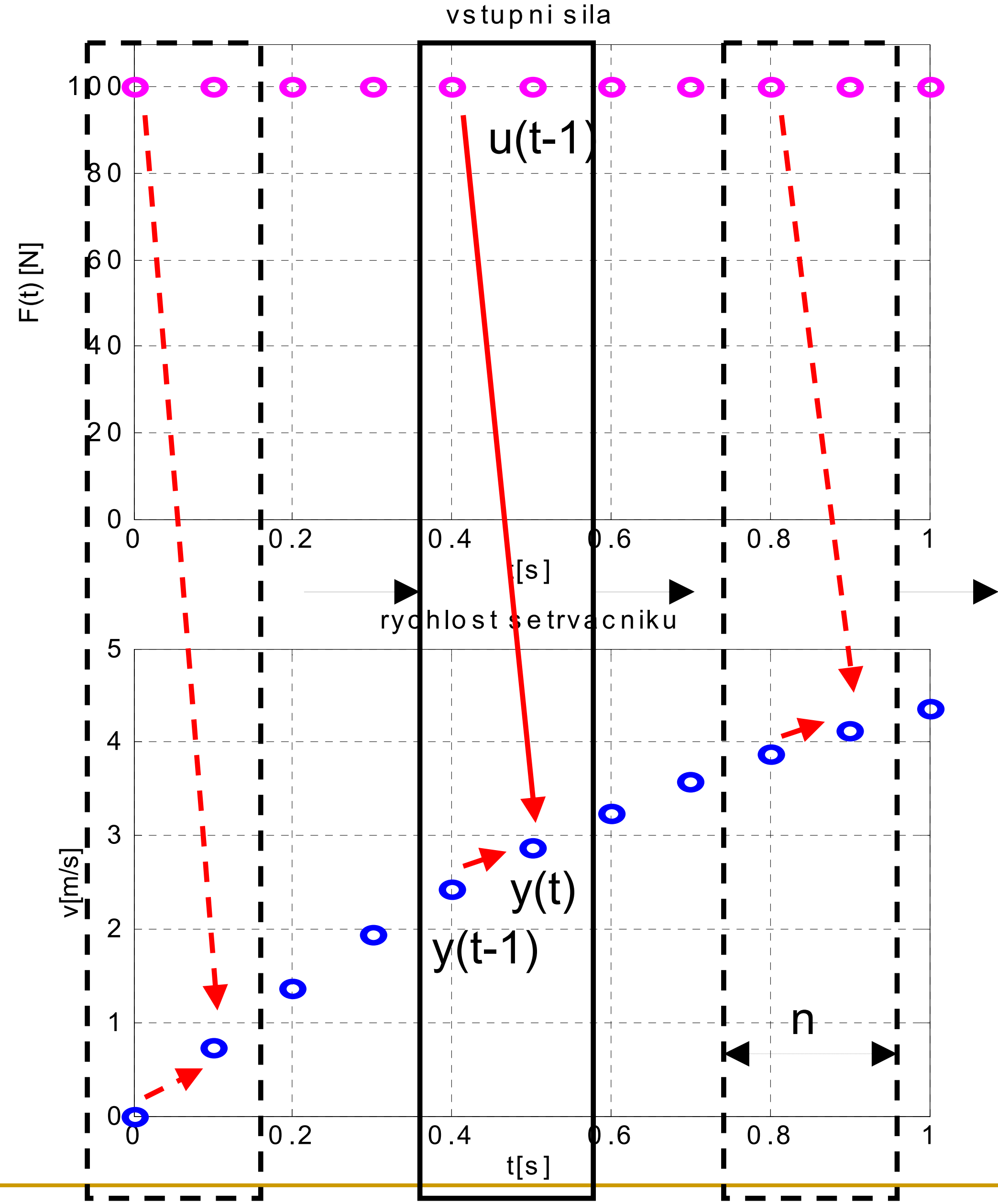
```
%inicializace
r=0.15;R=0.2;J=0.36;B=0.5;
T=0.1;
t = [0:0.1:10]; % casova osa, t = [0 0.1 0.2 ... 10]
v = zeros(1,101);   % inicializace rychlosti, v = [0 0 ... 0]
Fped = 100;
F = [0, Fped*ones(1,100)]; % konstantni sila, F = [0 100 100 ... 100]

% vypocet rychlosti
for i = 2:101   % smycka pro vypocet rychlosti
    v(i) = ((J-B*T)/J)*v(i-1) + (r*R*T/J)*F(i);  % rovnice pro rychlost
end

%vykresleni grafu
%cas na osu x, rychlost na osu y
figure(2)
plot(t,v,'Color','Blue','LineStyle','none','Marker','o','MarkerSize',8,'Linewidth',3)
grid on %mrizka
set(gca,'FontSize',14)
title('Rychlost setrvacniku','FontSize',14)  %nadpis grafu
xlabel('t[s]','FontSize',14)   %popis osy x
ylabel('v[m/s]','FontSize',14) %popis osy y
```


vstupni sila
F(t) [N]
0
20
40
60
80
100
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
t[s]


rychlost setrvacniku
v[m/s]
0
1
2
3
4
5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
t[s]

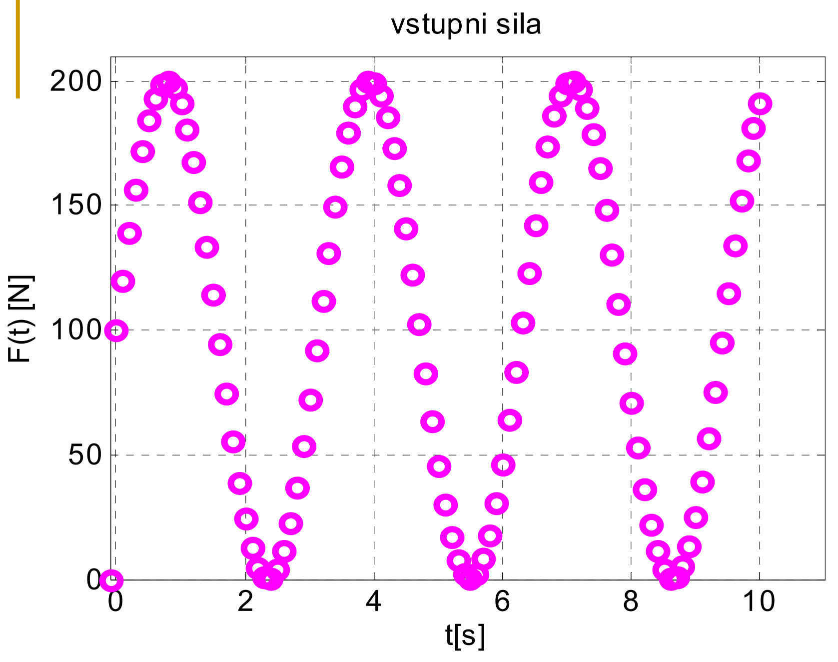

rychlost setrvacniku
v[m/s]
0
1
2
3
4
5
6
0
2
4
6
8
10
t[s]

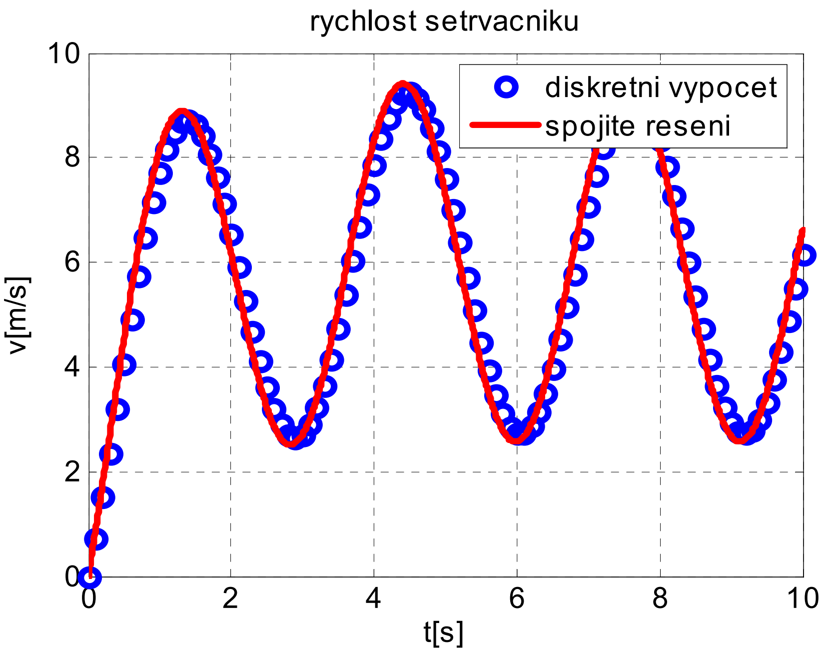

rychlost setrvacniku
diskretni vypocet
spojite reseni
v[m/s]
0
1
2
3
4
5
6
0
2
4
6
8
10
t[s]


vstupni sila
100
80
60
40
20
0
F(t) [N]
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
t[s]
u(t-1)
rychlost setrvacniku
5
4
3
2
1
0
v[m/s]
y(t)
y(t-1)
n
t[s]

- F(t) = 100+100sin2t ↔ změníme 1 (jeden)!! řádek v programu

```
%inicializace
r=0.15;R=0.2;J=0.36;B=0.5;
T=0.1;
t = [0:0.1:10]; % casova osa, t = [0 0.1 0.2 ... 10]
v = zeros(1,101);   % inicializace rychlosti, v = [0 0 ... 0]
Fped = 100;
F = [0, Fped+Fped*sin(2*t)];% harmonicka sila

% vypocet rychlosti
for i = 2:101   % smycka pro vypocet rychlosti
   v(i) = ((J-B*T)/J)*v(i-1) + (r*R*T/J)*F(i); % rovnice pro rychlost
end

%vykresleni grafu
%cas na osu x, rychlost na osu y
figure(2)
plot(t,v,'Color','Blue','LineStyle','none','Marker','o','MarkerSize',8,'Linewidth',3)
grid on %mrizka
set(gca,'FontSize',14)
title('Rychlost setrvacniku','FontSize',14)  %nadpis grafu
xlabel('t[s]','FontSize',14)   %popis osy x
ylabel('v[m/s]','FontSize',14) %popis osy y
```

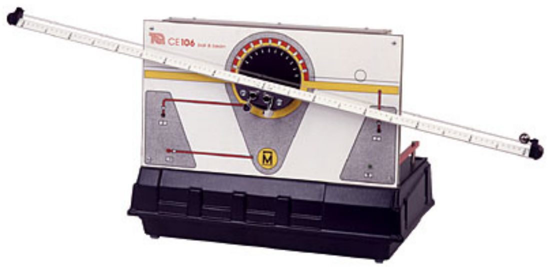




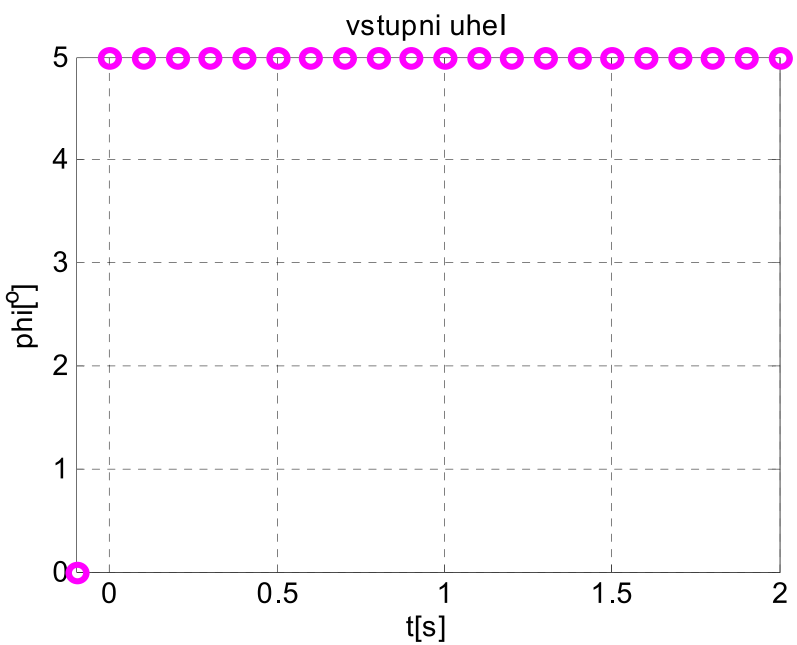
- a co nelineární systémy?

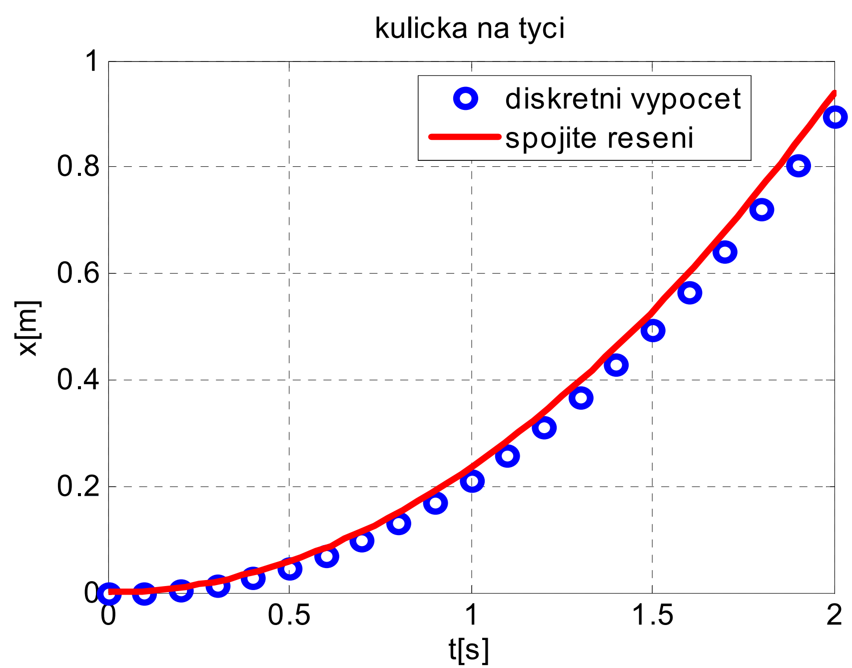
kulička na tyči

$$x(t) - 2x(t-T) + x(t-2T) = KT^2 \sin\varphi(t-2T)$$



$$K = \frac{g}{1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{r}\right)^2} \qquad R = 0.01\text{m}, r = 0.007\text{m}$$





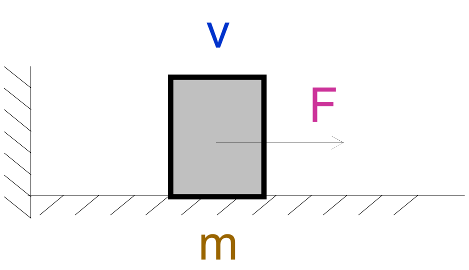
Je jednodušší vyřešit diferenciální nebo diferenční rovnici?

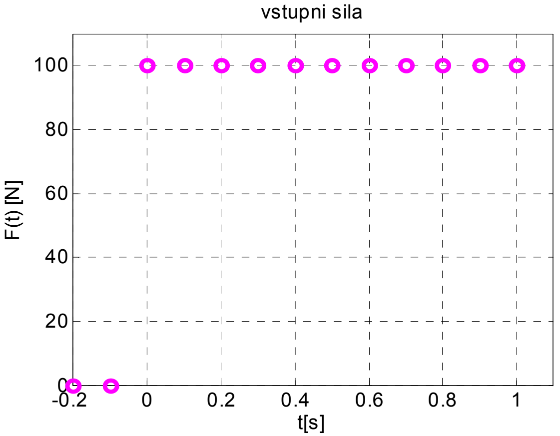
- analyticky
  - diferenciální rovnice je o něco jednodušší
  - rovnice vyšších řádů nebo nelineární velmi obtížné

- numericky bez použití speciálních nástrojů (matematický software, simulační nástroje)
  - diferenciální rovnice neřešitelná
  - diferenční rovnice řešitelná velmi jednoduše

Kontrolní otázky

- Budeme-li šlapat na trenažeru konstantní silou, jeho rychlost se po nějaké době ustálí na konečné hodnotě. Je tato hodnota závislá na velikosti momentu setrvačnosti J? Pokuste se zdůvodnit.
- Pro systém kulička na tyči napište program, který vykreslí odezvu polohy kuličky na skok úhlu z 0 na 5 stupňů, jestliže počáteční poloha kuličky je x(0) = -0.2m.
- Které veličiny a v jakých časových okamžicích mají vliv na hodnotu výstupu diskrétního systému v čase y(t)?
- Určete hodnotu rychlosti závaží v časech t = 0, T, 2T následujícího systému. Volte T = 0.1s, m = 2kg. Vstupní síla F(t) = 100.1(t).





- Jak obecně vypadá diferenciální a jak diferenční rovnice popisující lineární systém 2.řádu?
- Průběhy výstupních veličin spojitých a diskrétních systémů u probraných příkladů se přesně neshodují. Proč?
- Může mít lineární spojitý systém nenulový výstup, jestliže na jeho vstup nepřivedeme žádný signál? A lineární diskrétní systém?
- Je následující diferenční rovnice lineární?

$$y(t) + 2y(t-T) + 1 = u(t-T)$$

- Kolik počátečních podmínek je třeba znát k jednoznačnému řešení lineární diferenční rovnice?