Linearizace diskrétních systémů

Petr Hušek

Linearizace diskrétních systémů

Petr Hušek

husek@fel.cvut.cz

katedra řídicí techniky

Fakulta elektrotechnická

ČVUT v Praze

Co se dnes dozvíme?

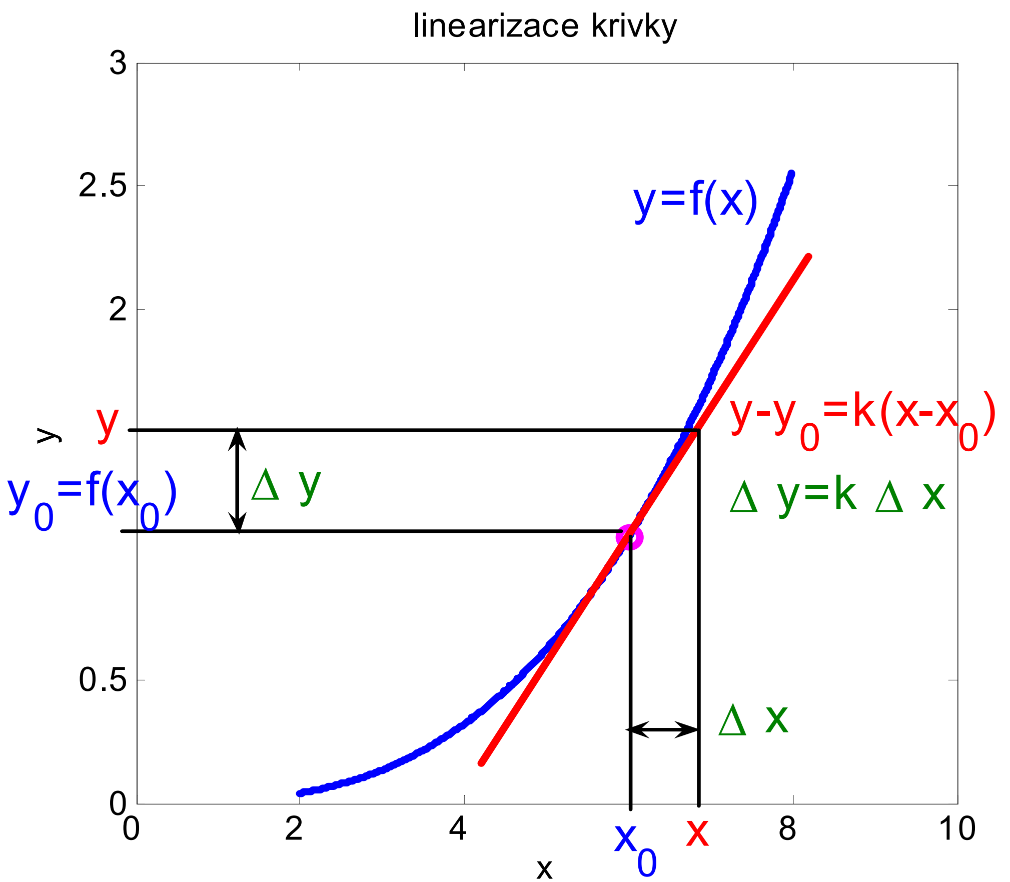
- Co to je a k čemu je dobrá linearizace systému
- Jak nelineární systém linearizovat
- Jak porovnat chování nelineárního a linearizovaného systému

Co je linearizace?

- vytvoření lineárního systému, jehož chování je velmi podobné chování původního nelineárního systému
  - výhody
    - jednodušší řešení diferenční rovnice, přesnější simulace
    - jednodušší analýza chování systému
    - jednodušší návrh regulátoru
  - nevýhody
    - chování linerizovaného systému ne zcela souhlasí s chováním nelineárního systému
    - aproximace je možná pouze v omezeném rozsahu pracovních podmínek

Principle linearizace

lineární funkce: $f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2)$



y = kx + q není lineární funkce

přírůstkový tvar:

$$\Delta y = k\Delta x$$

$$k = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$$

linearizace platí v blízkém okolí pracovního bodu $[x_0, y_0]$

Vícerozměrný případ – skalární funkce

$$y = f\left(x_1, \ldots, x_n\right), y_0 = f\left(x_{10}, \ldots, x_{n0}\right) = f\left(\mathbf{x}_0\right)$$

$$y = y_0 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x_0}} \cdot \left(x_1 - x_{10}\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x_0}} \cdot \left(x_2 - x_{20}\right) + \cdots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{x_0}} \cdot \left(x_n - x_{n0}\right) + \cdots$$

$$\Delta y = k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2 + \cdots + k_n \Delta x_n$$

Vícerozměrný případ – vektorová funkce

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}\left(x_1, \ldots, x_n\right), \mathbf{y_0} = \mathbf{f}\left(x_{10}, \ldots, x_{n0}\right) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_0\right)$$

$$y_1 = f_1\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

$$y_2 = f_2\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

$$\vdots$$

$$y_n = f_n\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

$$y_1 = y_{10} + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}_0} \cdot \left(x_1 - x_{10}\right) + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}_0} \cdot \left(x_2 - x_{20}\right) + \cdots + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{x}_0} \cdot \left(x_n - x_{n0}\right) + \cdots$$

$$y_2 = y_{20} + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}_0} \cdot \left(x_1 - x_{10}\right) + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}_0} \cdot \left(x_2 - x_{20}\right) + \cdots + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{x}_0} \cdot \left(x_n - x_{n0}\right) + \cdots$$

$$\vdots$$

$$y_n = y_{n0} + \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}_0} \cdot \left(x_1 - x_{10}\right) + \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}_0} \cdot \left(x_2 - x_{20}\right) + \cdots + \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{x}_0} \cdot \left(x_n - x_{n0}\right) + \cdots$$

$$\Delta y_1 = k_{11}\Delta x_1 + k_{12}\Delta x_2 + \cdots + k_{1n}\Delta x_n$$

$$\Delta y_2 = k_{21}\Delta x_1 + k_{22}\Delta x_2 + \cdots + k_{2n}\Delta x_n$$

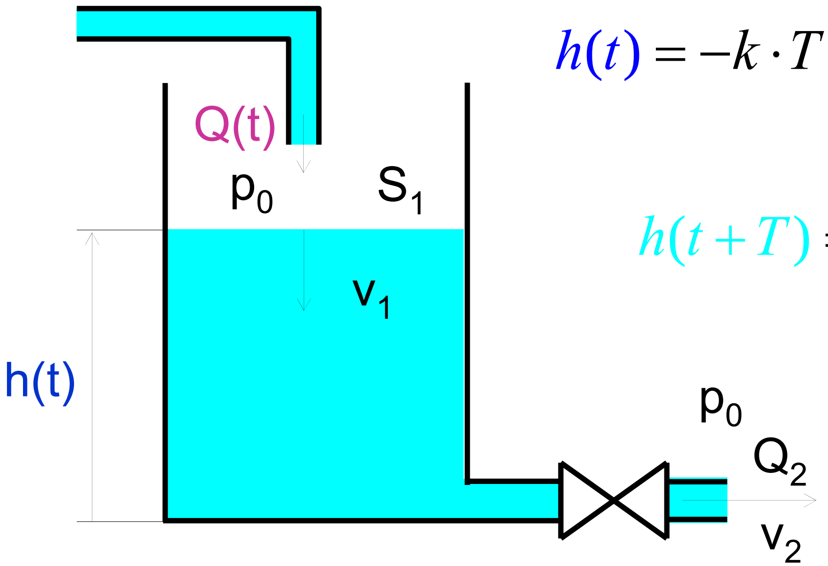
$$\vdots$$

$$\Delta y_n = k_{n1}\Delta x_1 + k_{n2}\Delta x_2 + \cdots + k_{nn}\Delta x_n$$

$$\Delta\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \vdots \\ \Delta y_n \end{bmatrix} \qquad \Delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Delta\mathbf{y} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}$$

Linearizace systému 1. řádu



$$h(t) = -k \cdot T \cdot \sqrt{2g} \cdot \frac{S_2}{S_1} \sqrt{h(t-T)} + h(t-T) + \frac{T}{S_1} Q(t-T)$$

$$h(t+T) = -k \cdot T \cdot \sqrt{2g} \cdot \frac{S_2}{S_1} \sqrt{h(t)} + h(t) + \frac{T}{S_1} Q(t)$$

volba pracovního bodu ~ rovnovážný stav systému

$$S_1 \frac{\Delta h}{\Delta t} = Q - k \cdot S_2 \sqrt{2gh} \qquad \frac{\Delta h}{\Delta t} = 0 \qquad h_0$$

$$Q_0 = k \cdot S_2 \sqrt{2gh_0}$$

$$h(t+T) = -k \cdot T \cdot \sqrt{2g} \cdot \frac{S_2}{S_1} \sqrt{h(t)} + h(t) + \frac{T}{S_1} Q(t)$$

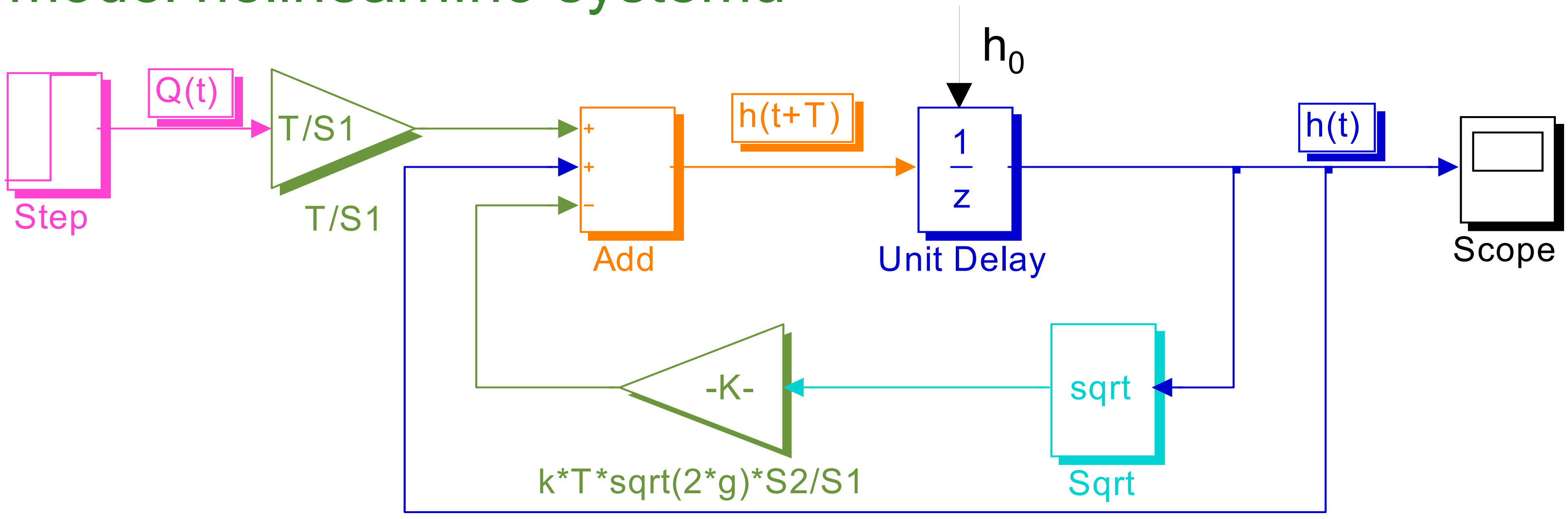
$$h(t+T) = f\left(h(t), Q(t)\right)$$

$$h(t+T) = h_0(t+T) + \left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{h_0, Q_0} \cdot \left(h(t) - h_0\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial Q}\right|_{h_0, Q_0} \cdot \left(Q(t) - Q_0\right)$$

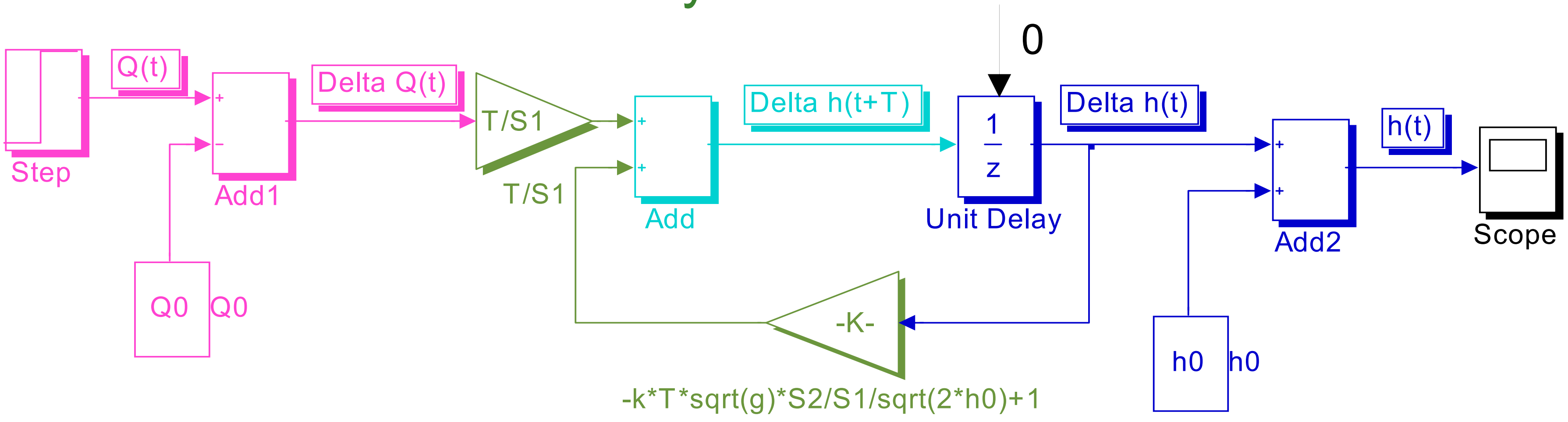
$$\Delta h(t+T) = \left(-\frac{k \cdot T \cdot \sqrt{g}}{\sqrt{2h_0}} \cdot \frac{S_2}{S_1} + 1 \right) \cdot \left(h(t) - h_0\right) + \frac{T}{S_1} \cdot \left(Q(t) - Q_0\right)$$

$$\Delta h(t+T) = a_1 \cdot \Delta h(t) + b \cdot \Delta Q(t)$$

model nelineárního systému



model linearizovaného systému

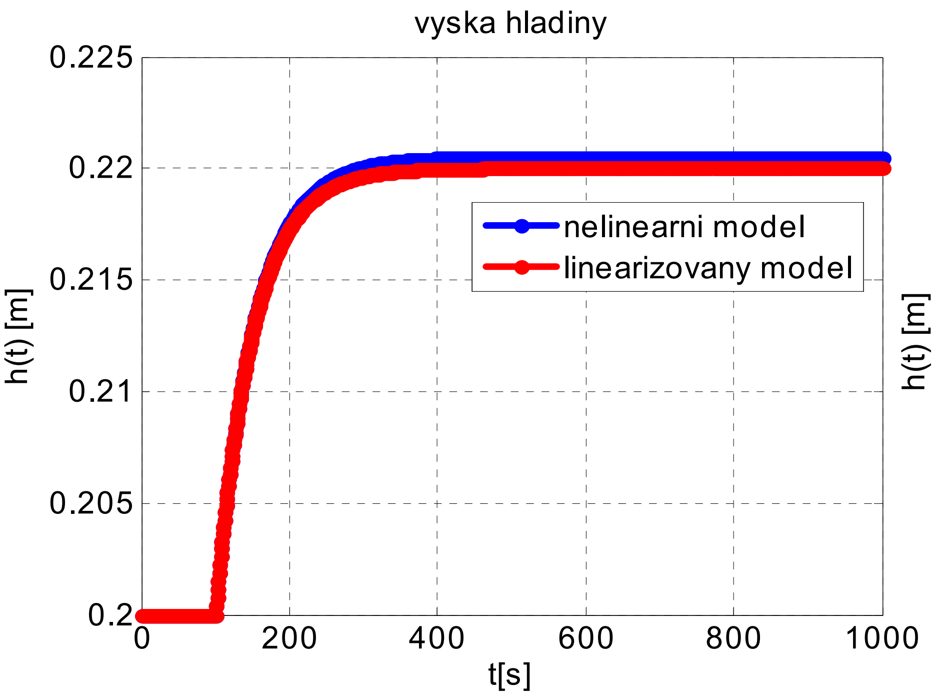


$$S_1 = 25\mathrm{cm}^2 = 25\cdot10^{-4}\mathrm{m}^2, S_2 = 0.1\mathrm{cm}^2 = 1\cdot10^{-5}\mathrm{m}^2, k = 1, T = 1\mathrm{s}$$

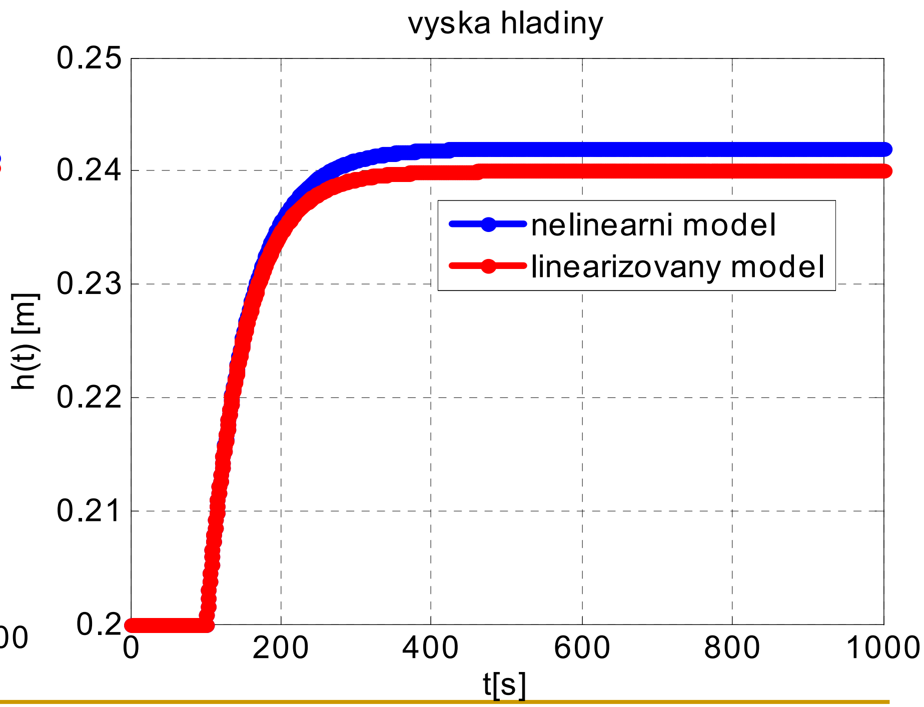
$$h_0 = 0.2\mathrm{m},\ Q_0 = k\cdot S_2\sqrt{2gh_0} = 1.98\cdot10^{-5}\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

$$\Delta h(t+T) = 0.98\cdot\Delta h(t) + 400\cdot\Delta Q(t)$$

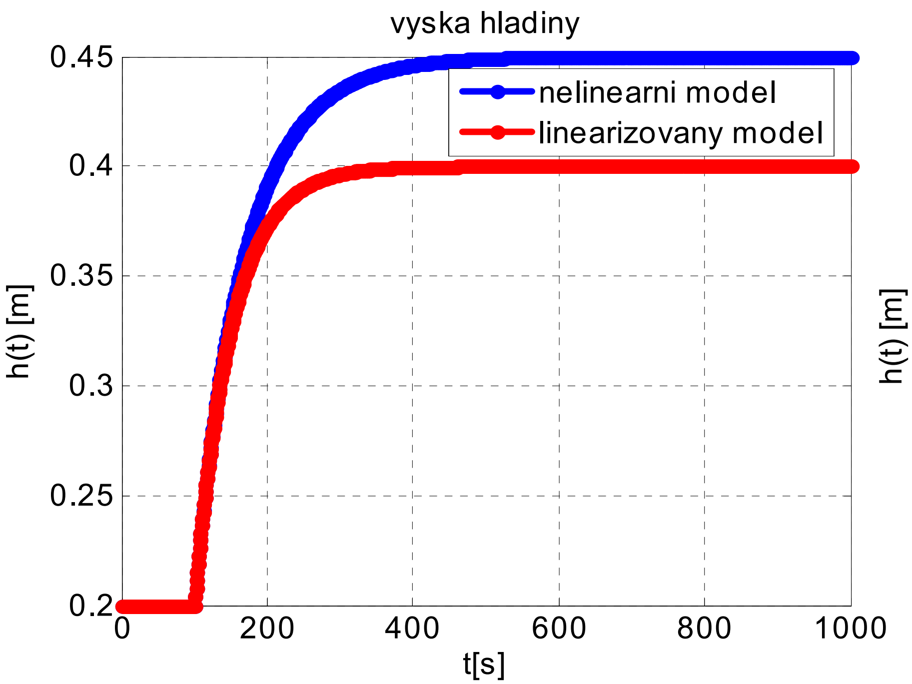
Q(t) – skok z Q_0 o 5% v čase t = 100s



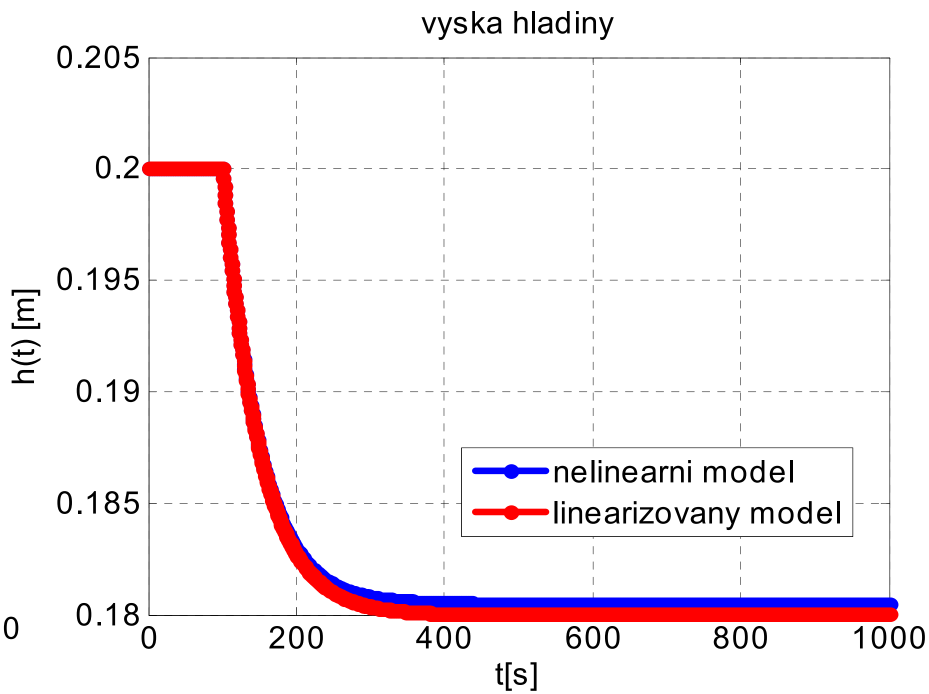
Q(t) – skok z Q_0 o 10% v čase t = 100s



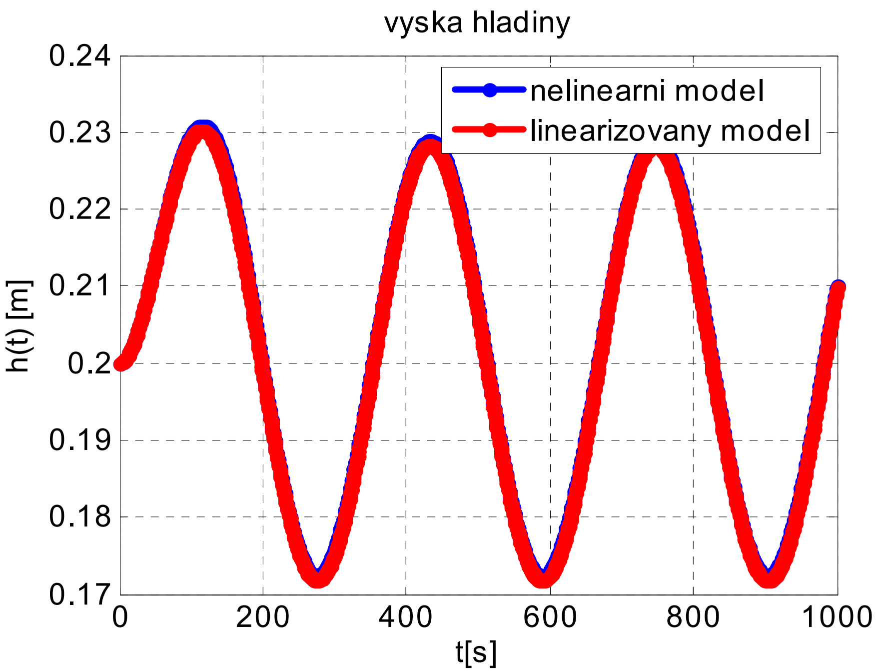
$Q(t)$ – skok z Q_0 o 50% v čase t = 100s

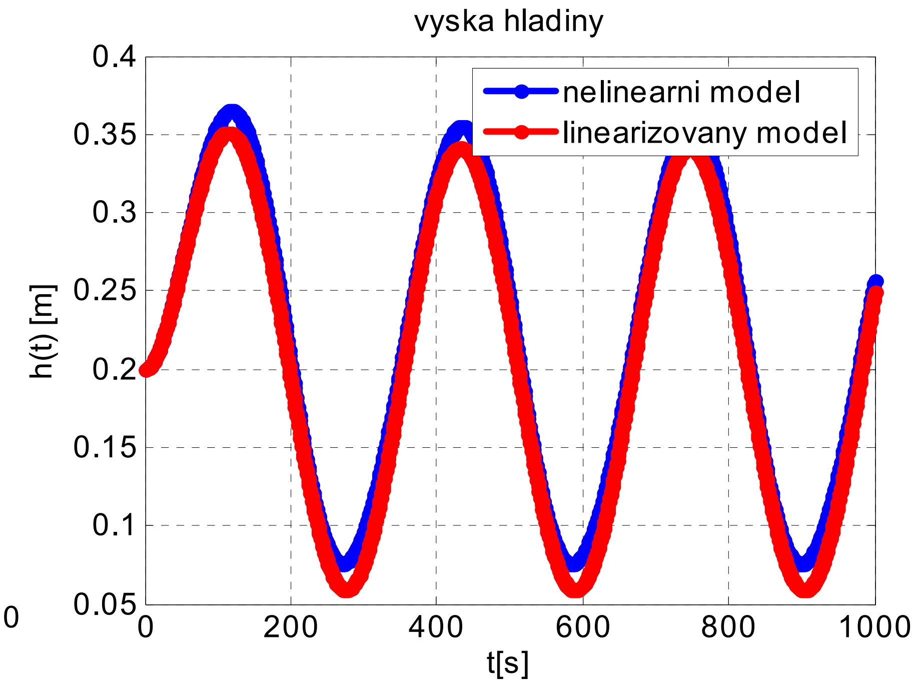


$Q(t)$ – skok z Q_0 o -5% v čase t = 100s



$Q(t) \sim Q_0 + 0.1\sin 0.02t$ $Q(t) \sim Q_0 + 0.5\sin 0.02t$



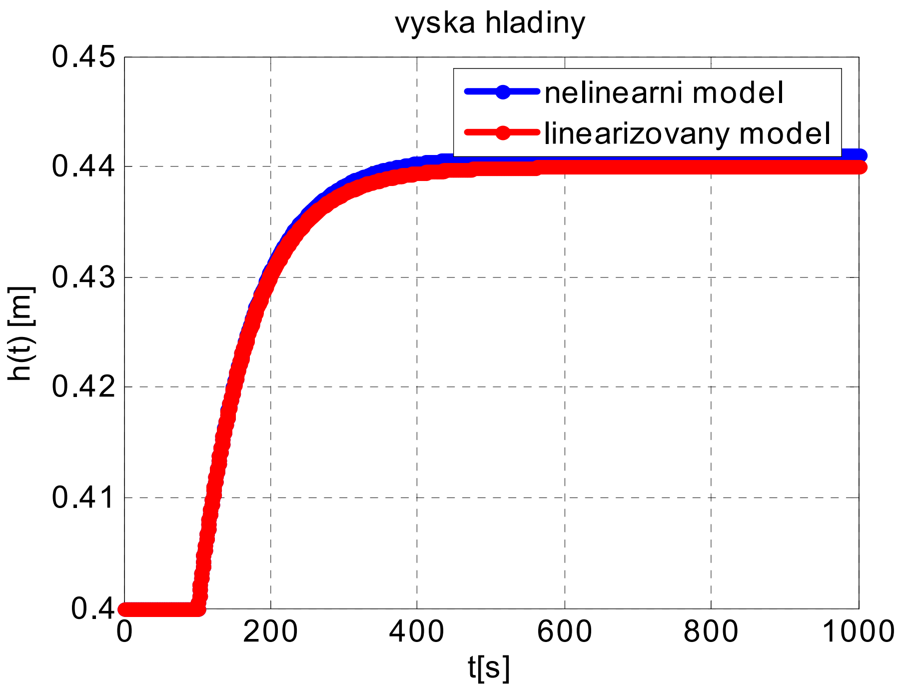


linearizovaný model lze použít pouze v blízkém okolí pracovního bodu

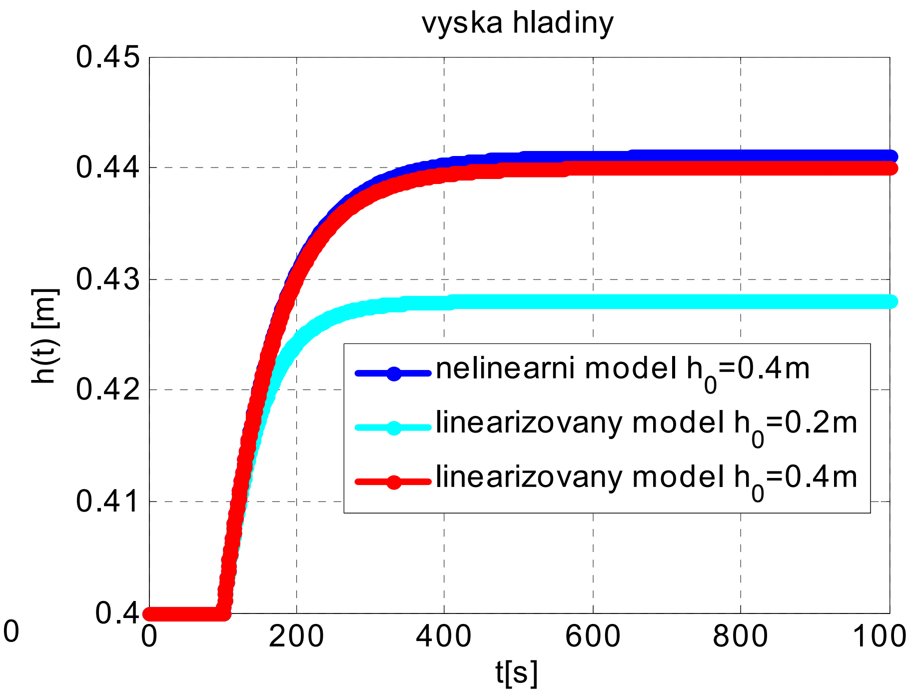
$$h_0 = 0.4\mathrm{m},\ Q_0 = k \cdot S_2 \sqrt{2 g h_0} = 2.8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

$$\Delta h(t+T) = 0.986 \cdot \Delta h(t) + 400 \cdot \Delta Q(t)$$

Q(t) – skok z Q_0 o 5% v čase t = 100s

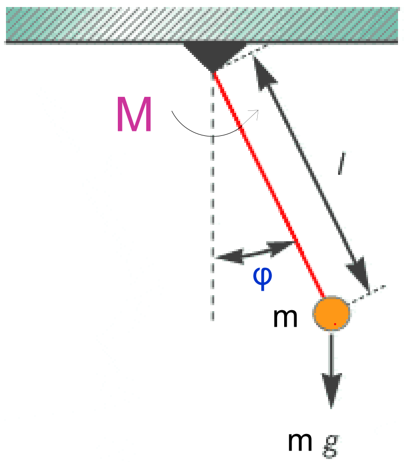


Q(t) – skok z Q_0 o 5% v čase t = 100s



linearizovaný model lze použít pouze spočtený ve správném pracovním bodě

Linearizace systému 2. řádu



$$M(t) - mgl\sin\varphi(t) = J\varepsilon(t) = ml^2\ddot{\varphi}(t)$$

$$\ddot{\varphi}(t) + gl\sin\varphi(t) = \frac{M(t)}{ml^2}$$

$$\frac{\Delta^2\varphi(t)}{\Delta t^2} + gl\sin\varphi(t) = \frac{M(t)}{ml^2} \qquad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi(T) = \varphi_T$$

$$\varphi(t) = 2\varphi(t-T) - \varphi(t-2T) - \frac{gT^2}{l}\sin\varphi(t-2T) + \frac{T^2}{ml^2}M(t-2T)$$

$$\varphi(t+2T) = 2\varphi(t+T) - \varphi(t) - \frac{gT^2}{l}\sin\varphi(t) + \frac{T^2}{ml^2}M(t)$$

$$x_1(t)=\varphi(t), u(t)=M(t)$$

stavový popis

$$x_1(t+T)=x_2(t)$$

$$x_2(t+T)=-x_1(t)-\frac{gT^2}{l}\sin x_1(t)+2x_2(t)+\frac{T^2}{ml^2}u(t)$$

$$y(t)=x_1(t)$$

$$x_1(0)=\varphi(0), x_2(0)=\varphi(T)$$

$$x_1(t+T)=f_1(x_1(t),x_2(t),u(t))$$
$$x_2(t+T)=f_2(x_1(t),x_2(t),u(t))$$
$$y(t)=g(x_1(t),x_2(t),u(t))$$

$$\mathbf{x}(t+T)=\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),u(t))$$
$$y(t)=\mathbf{g}(\mathbf{x}(t),u(t))$$

volba pracovního bodu ~ rovnovážný stav systému

- z diferenční rovnice

$$\frac{\Delta^2\varphi(t)}{\Delta t^2} + gl\sin\varphi(t) = \frac{M(t)}{ml^2} \qquad \frac{\Delta^2\varphi(t)}{\Delta t^2} = \frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t} = 0$$

$$\varphi_0, \varphi(T) = \varphi_0, (\omega_0 = 0), M_0 = mgl\sin\varphi_0$$

- ze stavového popisu

$$x_{10}(t+T) = x_{10}(t) = x_{10}, x_{20}(t+T) = x_{20}(t) = x_{20}$$

$$\Rightarrow x_{10} = x_{20} = \varphi_0, u_0 = M_0 = mgl\sin\varphi_0, y_0 = \varphi_0$$

linearizace

$$x_1(t+T) = x_2(t)$$

$$x_2(t+T) = -x_1(t) - \frac{gT^2}{l}\sin x_1(t) + 2x_2(t) + \frac{T^2}{ml^2}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

$$\Delta x_1(t+T) = \Delta x_2(t)$$

$$x_2(t+T) = x_{20}(t+T) + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_0 \cdot \big(x_1(t) - x_{10}(t)\big) + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_0 \cdot \big(x_2(t) - x_{20}(t)\big) +$$

$$+ \left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_0 \cdot \big(u(t) - u_0(t)\big)$$

$$\Delta x_2(t+T) = \left(-\frac{gT^2}{l}\cos x_{10} - 1\right)\Delta x_1(t) + 2\Delta x_2(t) + \frac{T^2}{ml^2}\Delta u(t)$$

$$\Delta y(t) = \Delta x_1(t)$$

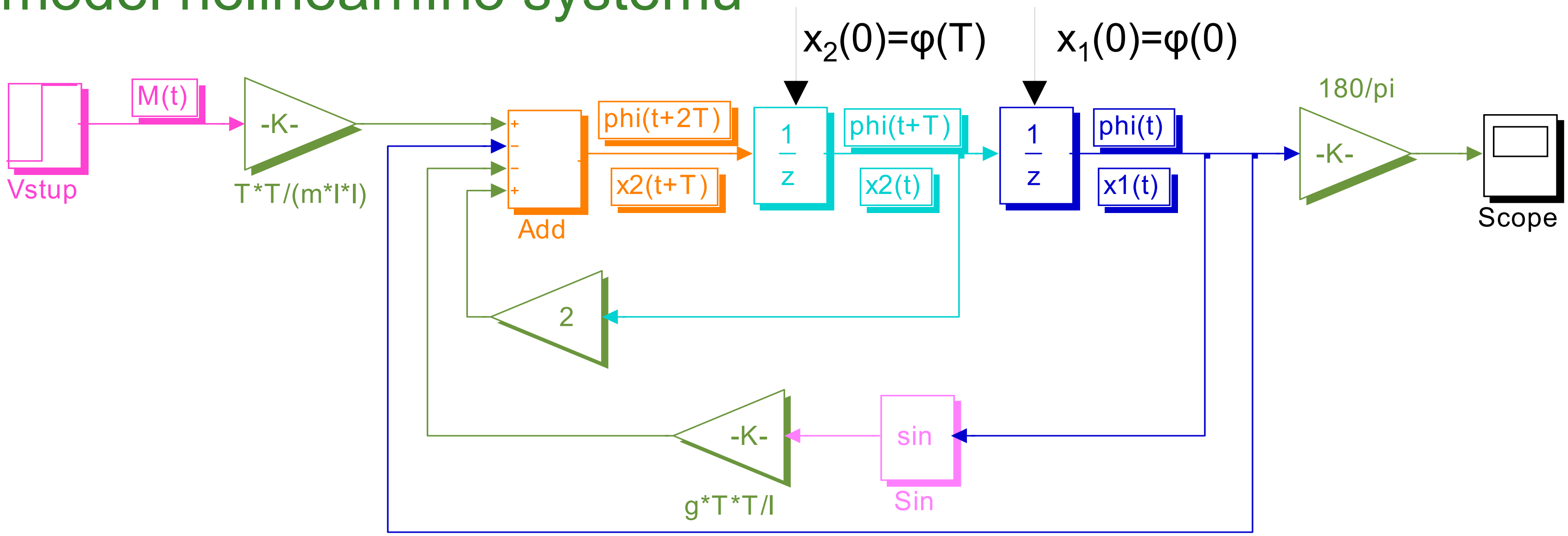
maticový zápis linearizovaného systému

$$\Delta\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\Delta u(t)$$
$$\Delta y(t) = \mathbf{C}\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\Delta u(t)$$

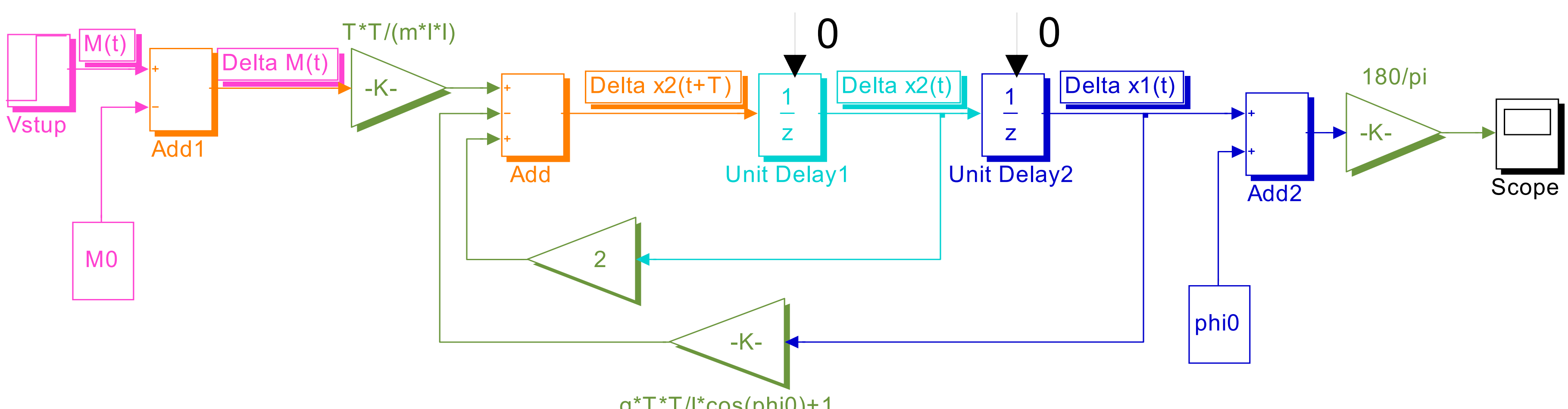
$$\Delta\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\varphi(t) \\ - \end{bmatrix}, \Delta u(t) = \Delta M(t)$$
$$\Delta y(t) = \Delta x_1(t) = \Delta\varphi(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{gT^2}{l}\cos x_{10} + 1\right) & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T^2}{ml^2} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

model nelineárního systému



model linearizovaného systému

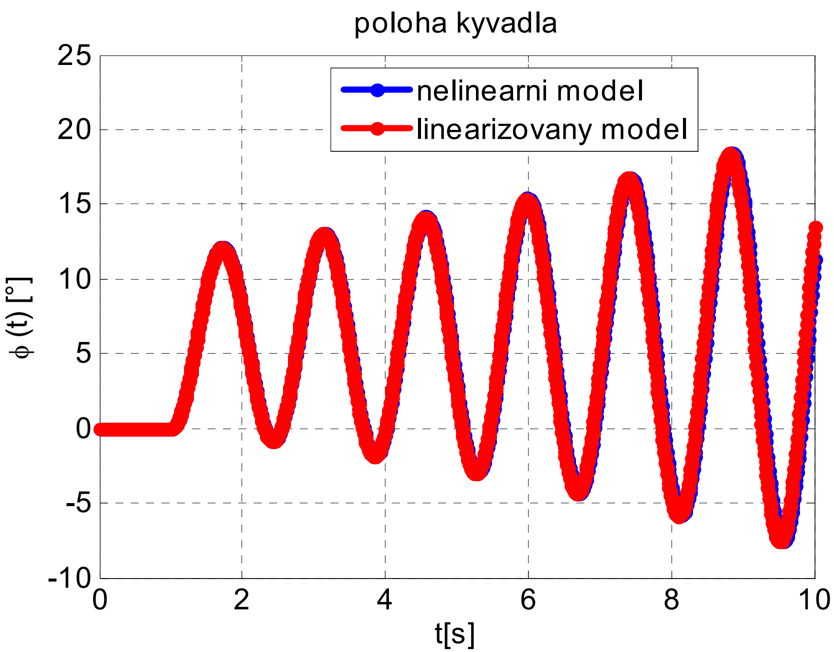


$$m = 0.2\text{kg}, l = 0.5\text{m}$$

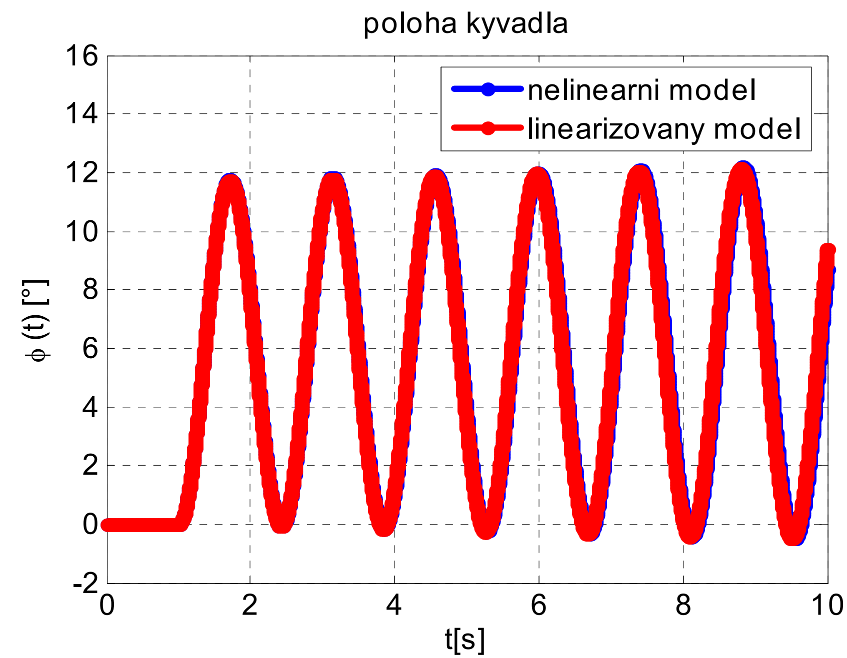
$$\varphi_0 = 0°(x_{10} = x_{20} = 0),\ M_0 = m \cdot g \cdot l \cdot \sin\varphi_0 = 0\text{Nm}$$

M(t) – skok z 0 na 0.1 v čase t = 1s

T = 0.01s – špatná volba periody vzorkování

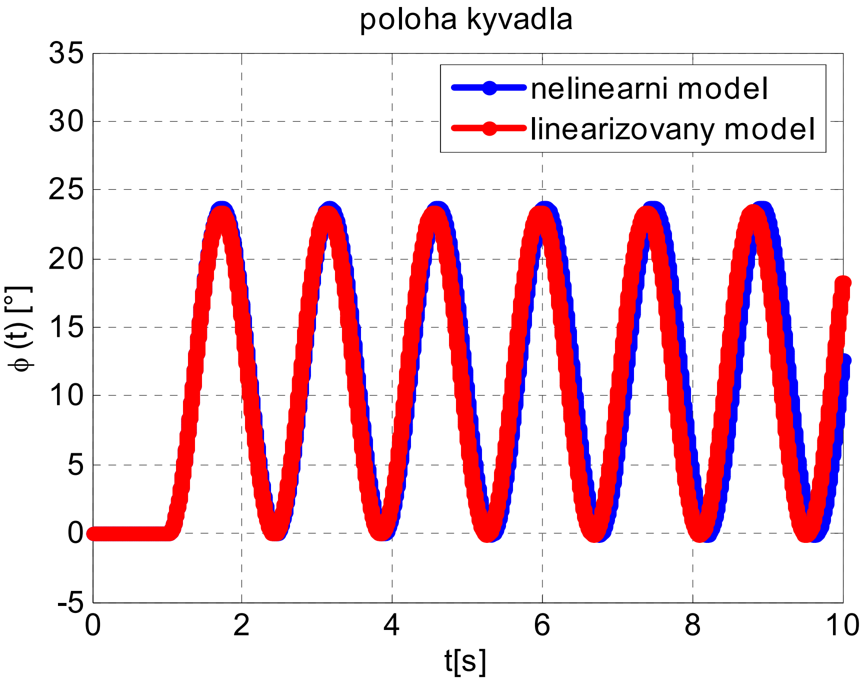


T = 0.0001s

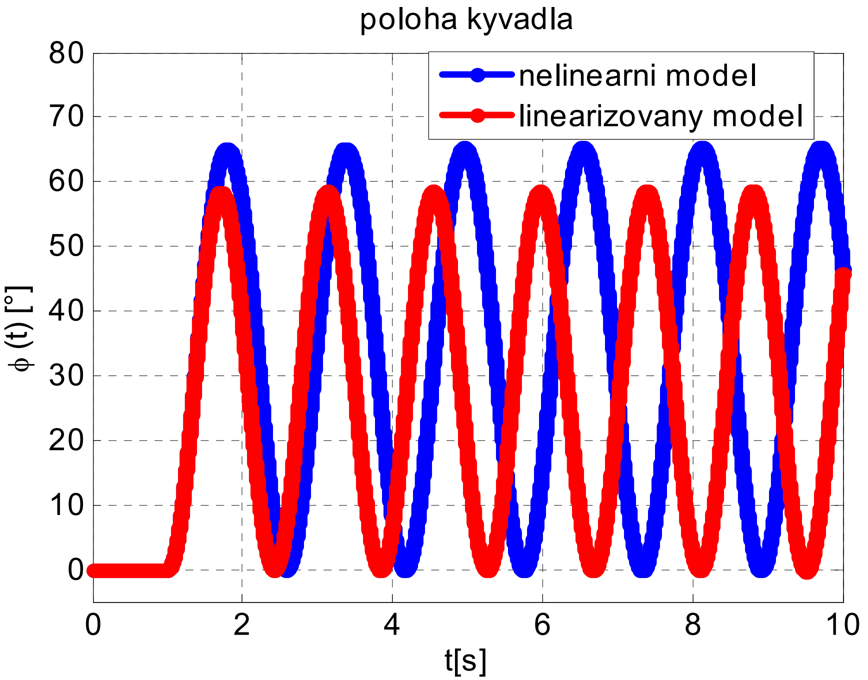


$$\varphi_0 = 0°(x_{10} = x_{20} = 0),\ M_0 = m \cdot g \cdot l \cdot \sin\varphi_0 = 0\text{Nm}$$

M(t) – skok z 0 na 0.2 v čase t = 1s

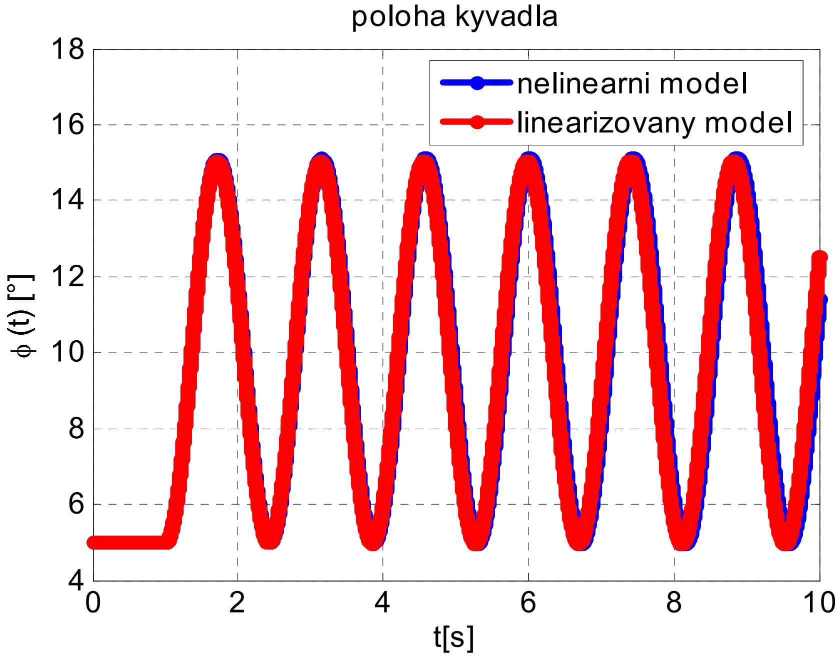


M(t) – skok z 0 na 0.5 v čase t = 1s

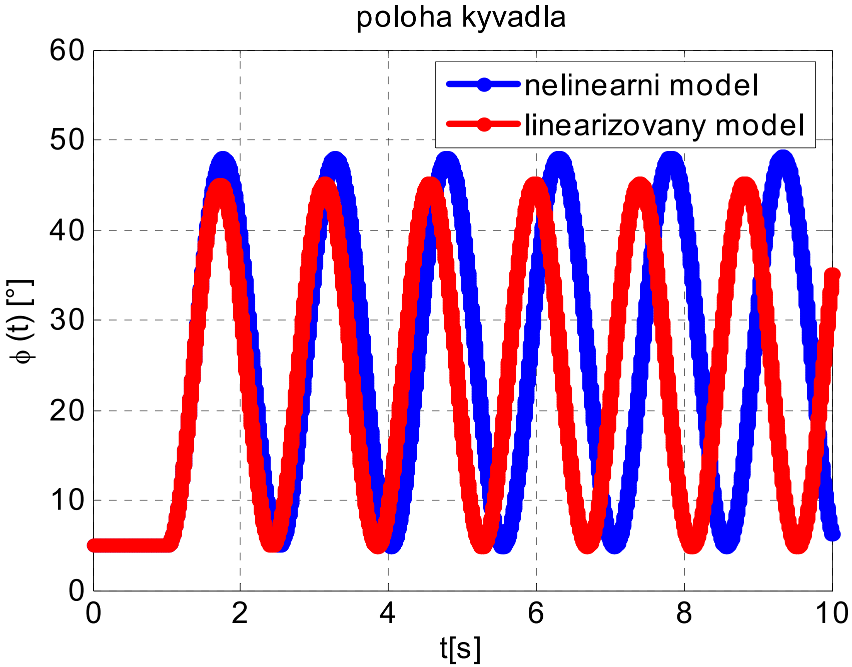


$$\varphi_0 = 5°(x_{10} = x_{20} = 5°),\ M_0 = m \cdot g \cdot l \cdot \sin\varphi_0 = 0.086\,\mathrm{Nm}$$

M(t) – skok z M_0 o 100% v čase t = 1s

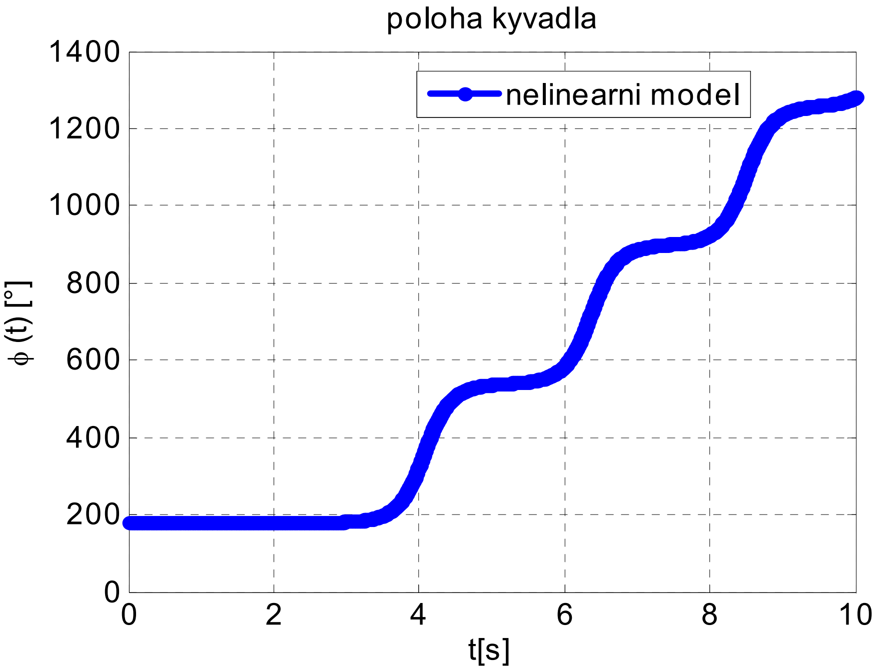


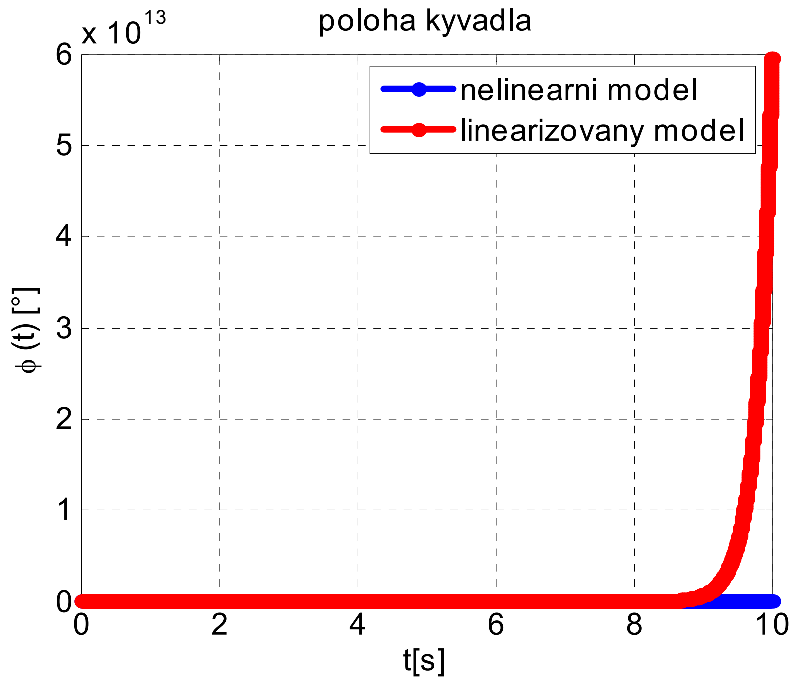
M(t) – skok z M_0 o 400% v čase t = 1s



$$\varphi_0 = 180°(x_{10} = x_{20} = 180°),\ M_0 = m \cdot g \cdot l \cdot \sin\varphi_0 = 0\,\mathrm{Nm}$$

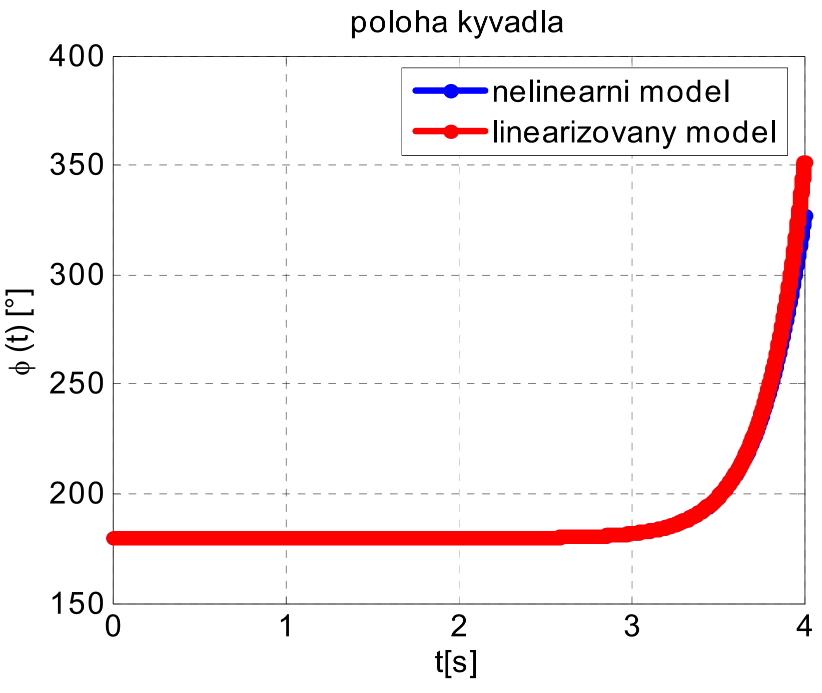
M(t) – skok z 0 na 10^{-5} v čase t = 1s





$$\varphi_0 = 180°(x_{10} = x_{20} = 180°),\ M_0 = m \cdot g \cdot l \cdot \sin\varphi_0 = 0\,\text{Nm}$$

M(t) – skok z 0 na 10^{-5} v čase t = 1s



Linearizace systémů vyšších řádů

- ze stavového popisu

$$x_1(t+T) = f_1(x_1(t),\dots,x_n(t),u(t))$$
$$x_2(t+T) = f_2(x_1(t),\dots,x_n(t),u(t))$$
$$\vdots$$
$$x_n(t+T) = f_n(x_1(t),\dots,x_n(t),u(t))$$
$$y(t) = g(x_1(t),\dots,x_n(t),u(t))$$

nelineární systém → **?** → linearizovaný systém

$$\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),u(t))$$
$$y(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t),u(t))$$

$$\Delta\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\Delta u(t)$$
$$\Delta y(t) = \mathbf{C}\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\Delta u(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_0 & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_0 & \cdots & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right|_0 \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_0 & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_0 & \cdots & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right|_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right|_0 & \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right|_0 & \cdots & \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right|_0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_0 \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_0 \\ \\ \left.\frac{\partial f_n}{\partial u}\right|_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial g}{\partial x_1}\right|_0 & \left.\frac{\partial g}{\partial x_2}\right|_0 & \cdots & \left.\frac{\partial g}{\partial x_n}\right|_0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_0 \end{bmatrix}$$

- pracovní bod

$$x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, u_0, y_0 :$$

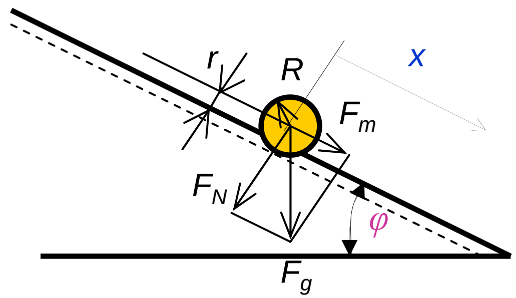
$$\begin{aligned} x_{10} &= f_1(x_{10}, \ldots, x_{n0}, u_0) \\ x_{20} &= f_2(x_{10}, \ldots, x_{n0}, u_0) \\ &\vdots \\ x_{n0} &= f_n(x_{10}, \ldots, x_{n0}, u_0) \\ y_0 &= g(x_{10}, \ldots, x_{n0}, u_0) \end{aligned}$$

Kontrolní otázky

- Proč linearizujeme nelineární systémy?
- V čem spočívá princip linearizace nelineárních systémů?
- Jaké podmínky musí splňovat lineární funkce?
- Jaké je charakterizován klidový pracovní bod a jaké souřadnice má?
- Jak pomocí simulace ověříme, že se systém nachází v klidovém pracovním bodě?
- Jak vypočteme souřadnice klidového pracovního bodu?
- Jaký tvar má stavový popis nelineárního a linearizovaného systému 1. řádu?
- Jaký tvar má stavový popis nelineárního a linearizovaného systému 2. řádu?
- Zlinearizujte systém nádrže s přítokem ve Vámi zvoleném pracovním bodě a pomocí simulací zjistěte rozsah platnosti linearizovaného modelu.
- Zlinearizujte systém kyvadla ve Vámi zvoleném pracovním bodě a Vámi zvolenými parametry a pomocí simulací zjistěte rozsah platnosti linearizovaného modelu.

- Zlinearizujte model systému kulička na tyči ve Vámi zvoleném pracovním bodě. Parametry modelu volte R = 10mm, r = 7mm, T = 0.1s. Porovnejte chování nelineárního a linearizovaného modelu v okolí pracovního bodu.

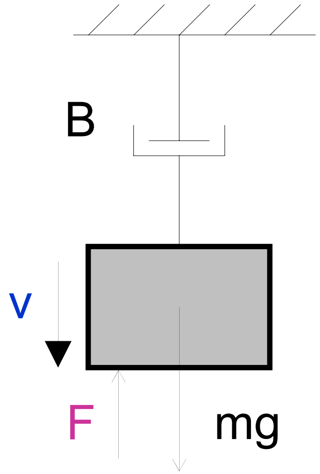
$$x(t) - 2x(t-T) + x(t-2T) = KT^2 \sin\varphi(t-2T)$$



$$K = \frac{g}{1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{r}\right)^2}$$

- Uvažujme systém seskoku padákem, kdy je parašutista nadlehčován silou stoupavého proudu teplého vzduchu F(t). Tato síla bude vstupní veličinu systému, výstupní veličinou bude rychlost parašutisty v(t). Diferenční rovnice popisující systém pak má tvar

$$m\frac{\Delta v(t-T)}{\Delta t}+Bv(t-T)=mg-F(t-T)\Leftrightarrow v(t)-\frac{m-BT}{m}v(t-T)=gT-\frac{T}{m}F(t-T)$$



Je tento model lineární? Pokud ne, linearizujte jej ve Vámi zvoleném paracovním bodě a pomocí simulací oba systémy porovnejte. Uvažujte m = 80kg, B = 270Ns/m, T = 0.01s.

- U předchozího příkladu je reálnější uvažovat odporovou sílu vzduchu úměrnou kvadrátu rychlosti parašutisty. Diferenční rovnice pak má tvar

$$m\frac{\Delta v(t-T)}{\Delta t}+Bv^2(t-T)=mg-F(t-T)\Leftrightarrow$$

$$v(t)-v(t-T)+\frac{BT}{m}v^2(t-T)=gT-\frac{T}{m}F(t-T)$$

Model linearizujte ve Vámi zvoleném paracovním bodě a pomocí simulací oba systémy porovnejte. Uvažujte m = 80kg, B = 100Ns/m, T = 0.01s.