Simulační schemata, stavový popis

Petr Hušek

Simulační schemata, stavový popis

Petr Hušek

husek@fel.cvut.cz

katedra řídicí techniky

Fakulta elektrotechnická

ČVUT v Praze

Co se dnes dozvíme?

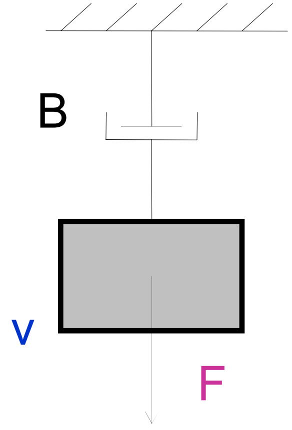
- Jak vytvořit z diferenciální rovnice simulační schema spojitého systému
- Jak vytvořit z diferenční rovnice simulační schema diskrétního systému
- Co je stavový popis diskrétního systému, stavová veličina

Simulační schema spojitého systému

- zakreslení diferenciální rovnice v grafické podobě pomocí malého počtu různých bloků
- možnost využití simulačních programů
- jednodušší reprezentace nelineárních systémů

Simulační schema lineárního spojitého systému

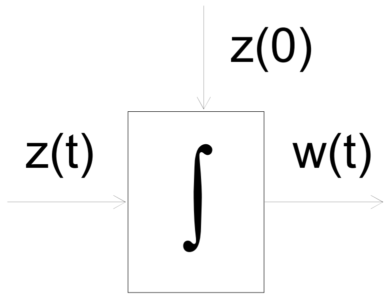
- lineární diferenciální rovnice 1.řádu

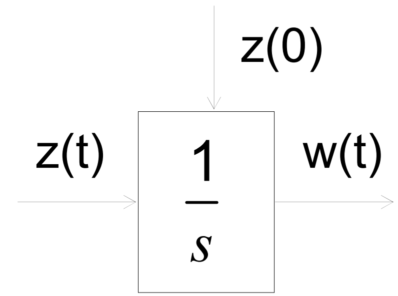


$$m\frac{dv(t)}{dt} + Bv(t) = F(t)$$

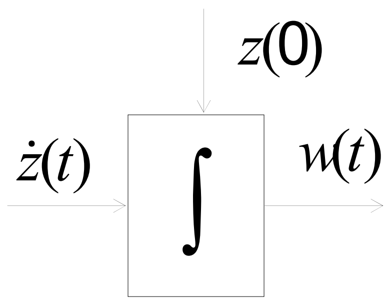
$$v(0) = v_0$$

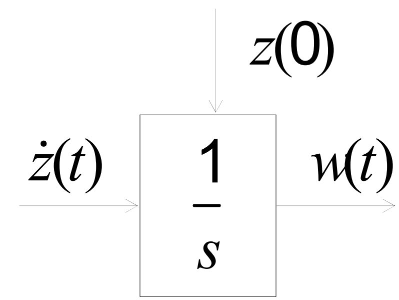
- nakresleme schema pomocí 3 bloků:
  - integrátor





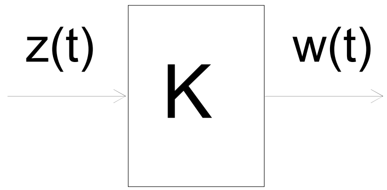
$$w(t) = z(0) + \int_0^t z(\tau)d\tau$$

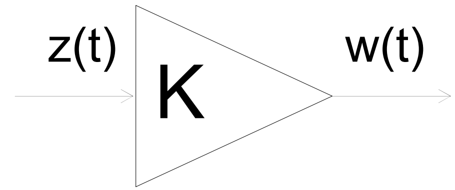




$$w(t) = z(0) + z(t)$$

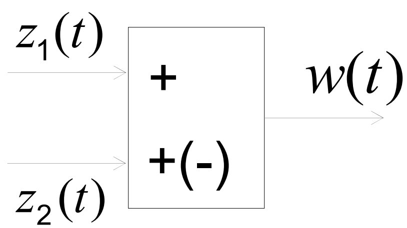
- zesilovač

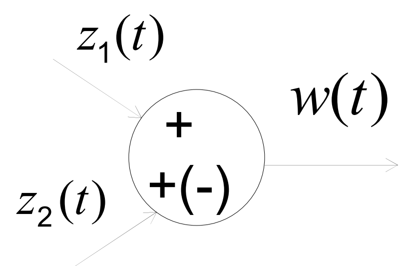




$$w(t) = Kz(t)$$

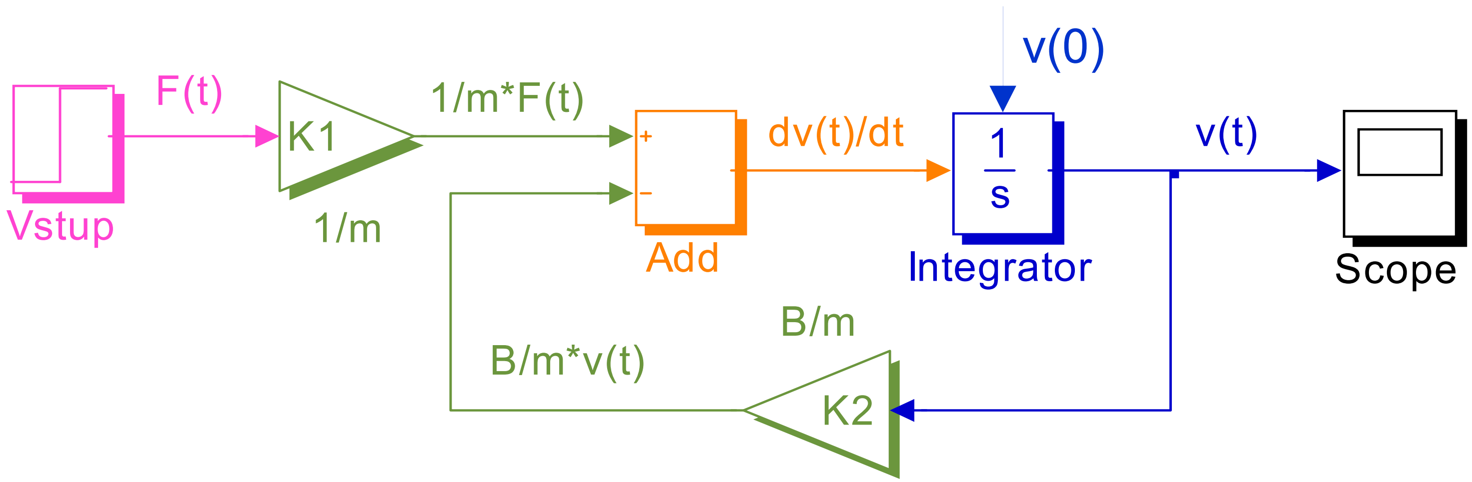
- sčítačka





$$w(t) = z_1(t) + z_2(t)$$

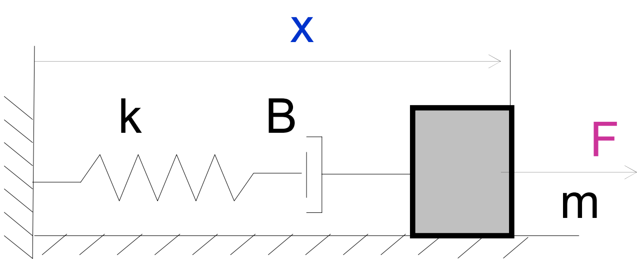
$$m\frac{dv(t)}{dt}+Bv(t)=F(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv(t)}{dt}=-\frac{B}{m}v(t)+\frac{1}{m}F(t)$$



$$\frac{dx_1(t)}{dt}=-\frac{B}{m}x_1(t)+\frac{1}{m}u(t) \qquad x_1(0)=x_{10}=v_0$$

$$y(t)=x_1(t)$$

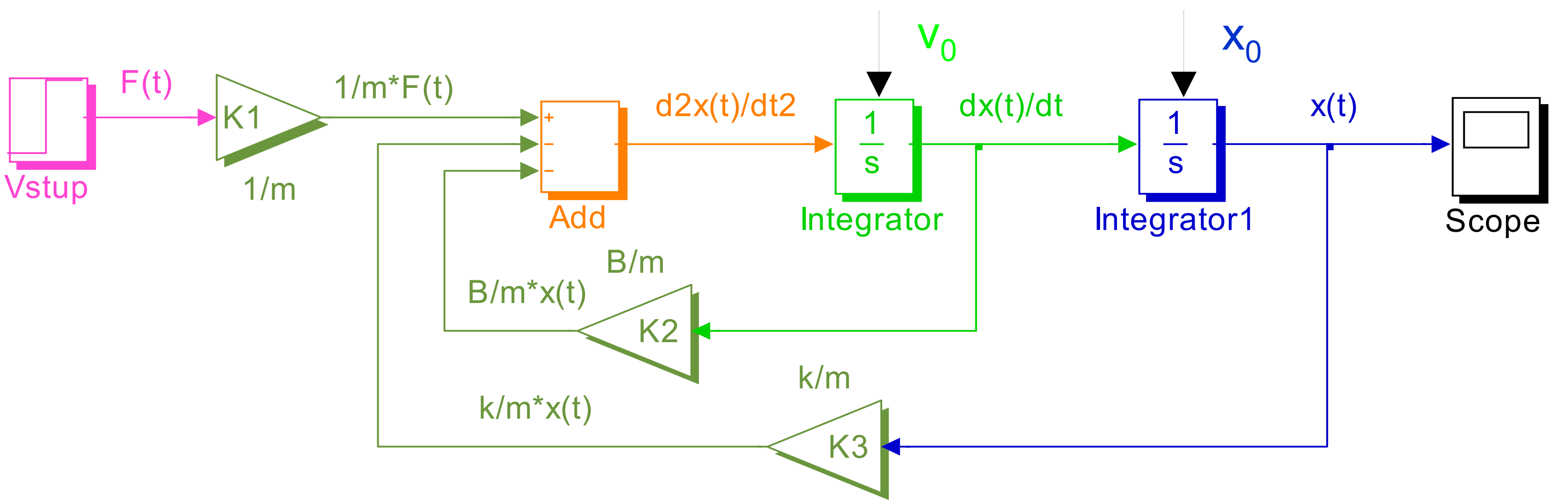
lineární diferenciální rovnice 2.řádu



$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+B\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=F(t)$$

$$x(0)=x_0,\frac{dx}{dt}(0)=v_0$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-\frac{B}{m}\frac{dx(t)}{dt}-\frac{k}{m}x(t)+\frac{1}{m}F(t)$$



$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+B\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=F(t)$$

$$x_1(t)=x(t)$$

$$x_2(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

$$m\frac{dx_2(t)}{dt}+Bx_2(t)+kx_1(t)=F(t)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t) \qquad \frac{dx_2(t)}{dt}=-\frac{k}{m}x_1(t)-\frac{B}{m}x_2(t)+\frac{1}{m}F(t)$$

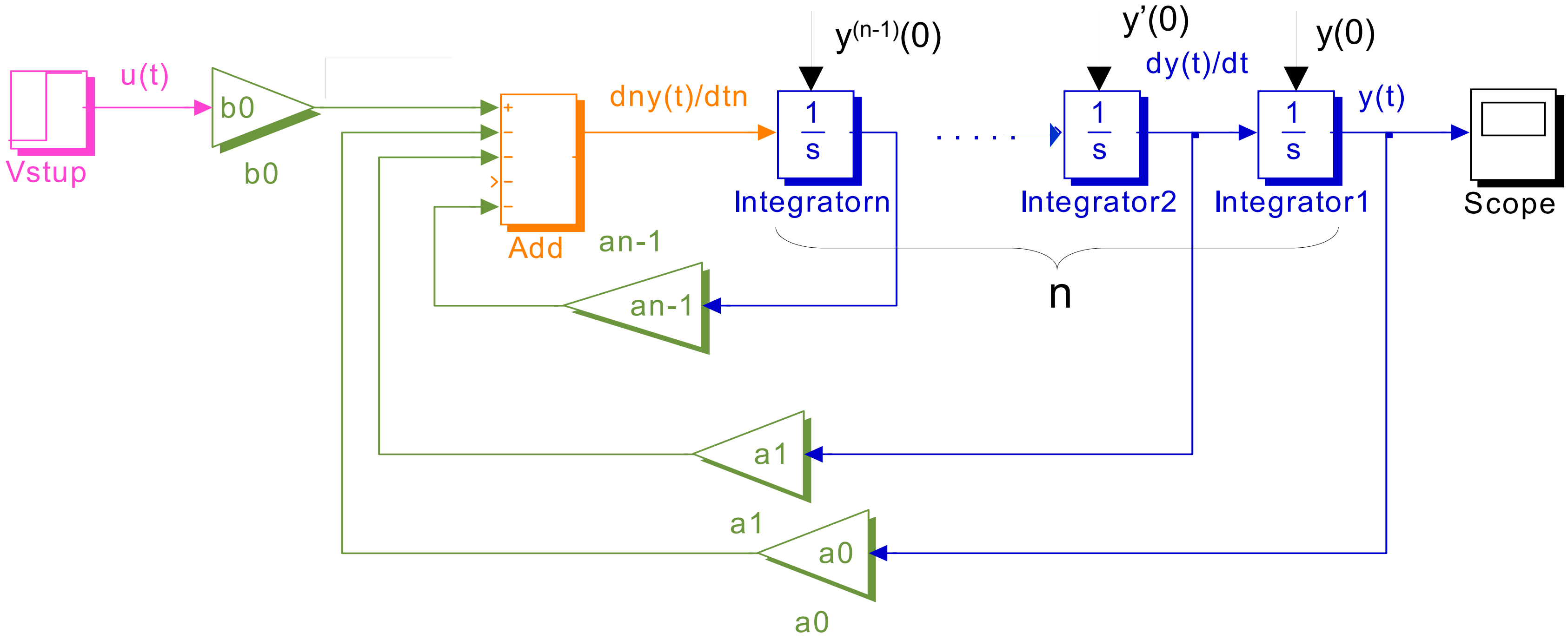
$$x_1(0)=x(0)=x_0 \qquad x_2(0)=\frac{dx}{dt}(0)=v_0$$

- diferenciální rovnici 2.řádu jsme převedli na 2 diferenciální rovnice 1.řádu

- lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s jednoduchou pravou stranou

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

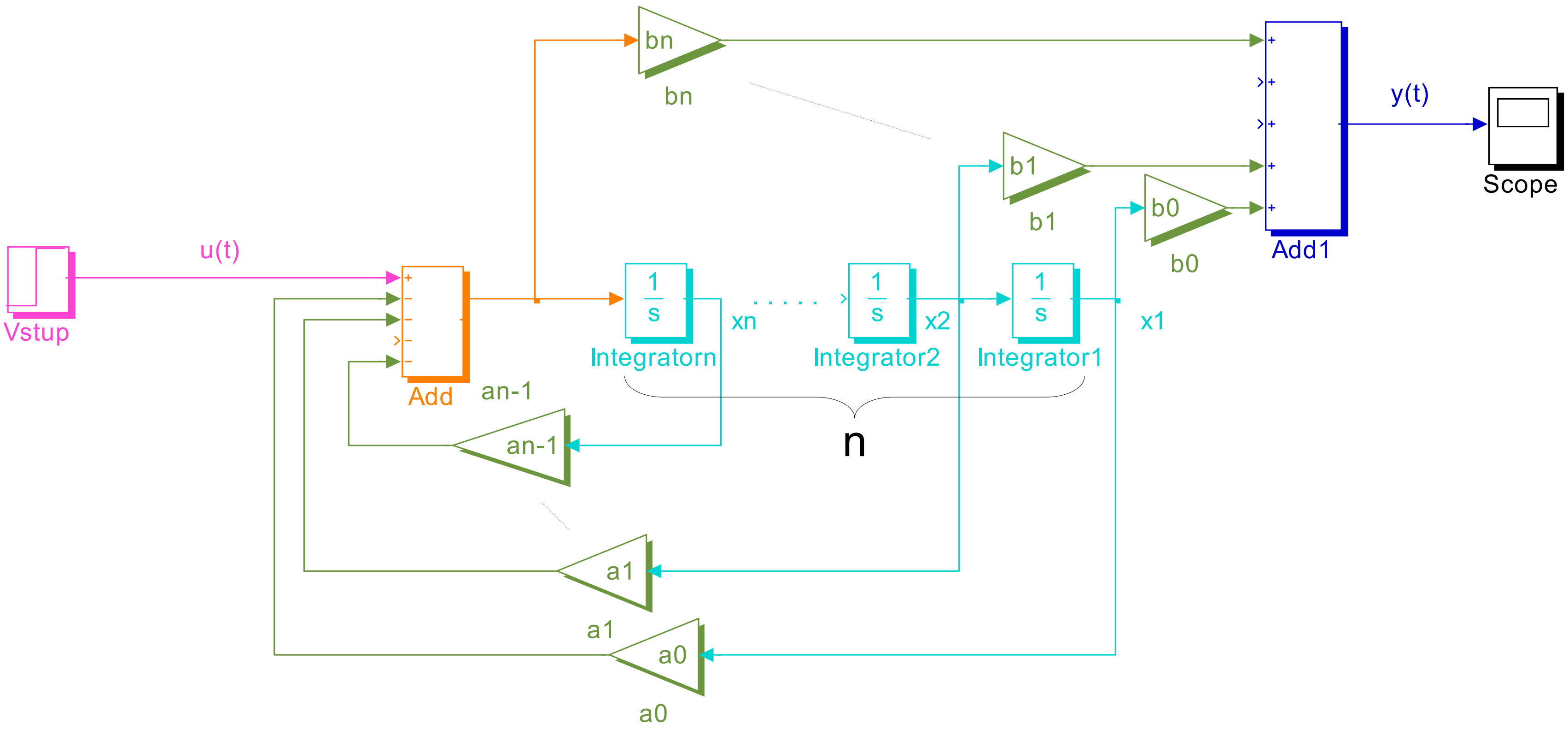
$$y^{(n-1)}(0), y^{(n-2)}(0), \ldots, y'(0), y(0)$$



lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0y(t)=b_mu^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_0u(t)$$

$$y^{(n-1)}(0), y^{(n-2)}(0), \ldots, y'(0), y(0)$$

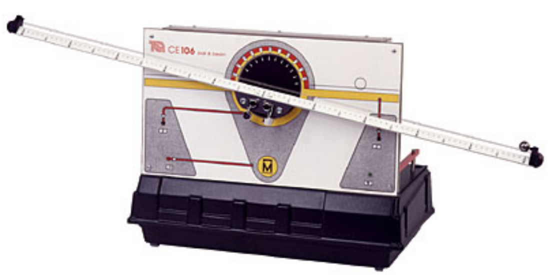


- počáteční podmínky diferenciální rovnice nesouhlasí s počátečními podmínkami schematu !!!

$$y^{(n-1)}(0), y^{(n-2)}(0), \ldots, y'(0), y(0) \quad \neq \quad x_n(0), x_{n-1}(0), \ldots, x_2(0), x_1(0)$$

- simulační schema lineárního spojitého systému lze sestavit z integrátorů, zesilovačů a sumátorů

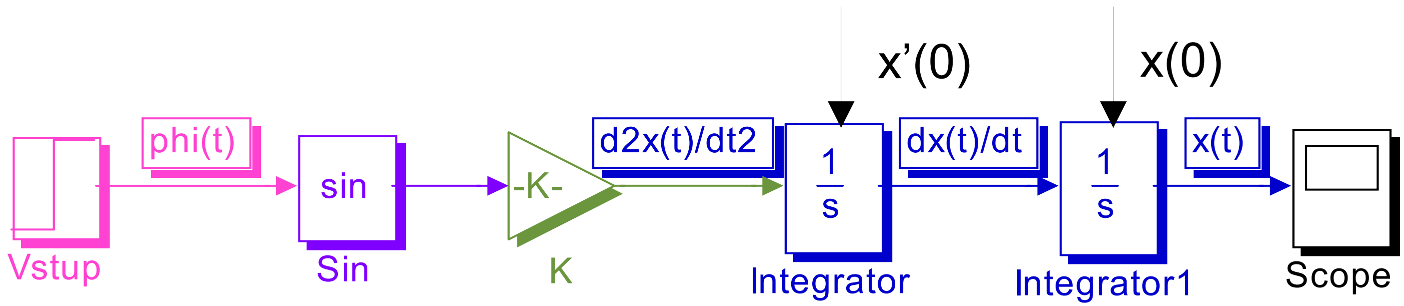
- jednoduché nelineární diferenciální rovnice



$$\ddot{x}(t) = \frac{g}{1+\frac{2}{5}\left(\frac{R}{r}\right)^2} \sin\varphi(t) = K \sin\varphi(t)$$

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$$

$$\ddot{x}(t) = K \sin \varphi(t) \qquad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$$



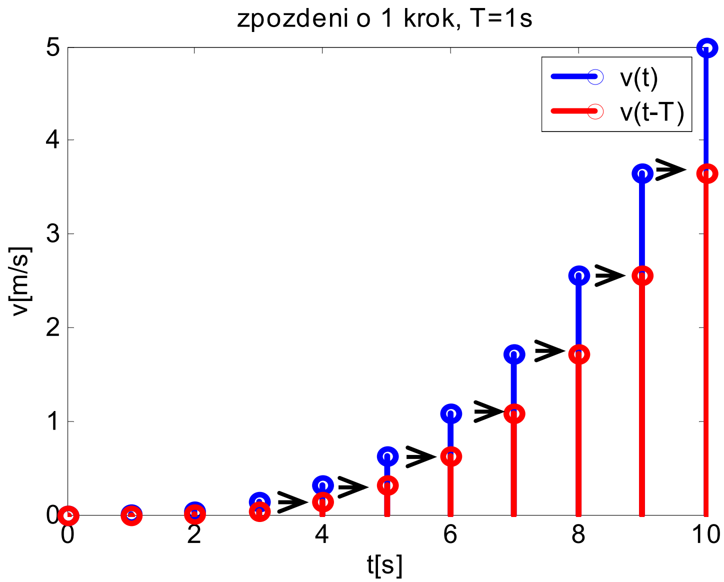
Operátorový zápis lineární diferenční rovnice

$$Jv(t)-(J-BT)v(t-T)=rRTF(t-T)$$

- zavedeme operátor zpoždění d (delay) ~ zpoždění funkce (posloupnosti) o jeden krok za nulových počátečních podmínek (v(0) = 0):

$$v(t-T)\approx v(t-1)\approx d\cdot v(t)$$

$$\underbrace{(J-(J-BT)\cdot d)v(t)}_{D\{v(t)\}}=\underbrace{(rRT\cdot d)F(t)}_{D\{F(t)\}}$$



- zavedeme přenos systému v operátoru d:

$$G(d)=\frac{D\{výstup\}}{D\{vstup\}}=\frac{D\{y(t)\}}{D\{u(t)\}}$$

za nulových počátečních podmínek

$$G(d)=\frac{D\{v(t)\}}{D\{F(t)\}}=\frac{rRT\cdot d}{J-(J-BT)\cdot d}$$

- zavádíme operátor *z* za nulových počátečních podmínek (v(0)=0):

$$d=z^{-1} \quad \rightarrow \quad v(t-T)\approx v(t-1)\approx z^{-1}\cdot v(t)$$

$$\underbrace{(J-(J-BT)\cdot z^{-1})v(t)}_{Z\{v(t)\}}=\underbrace{rRT\cdot z^{-1}\cdot F(t)}_{Z\{F(t)\}}$$

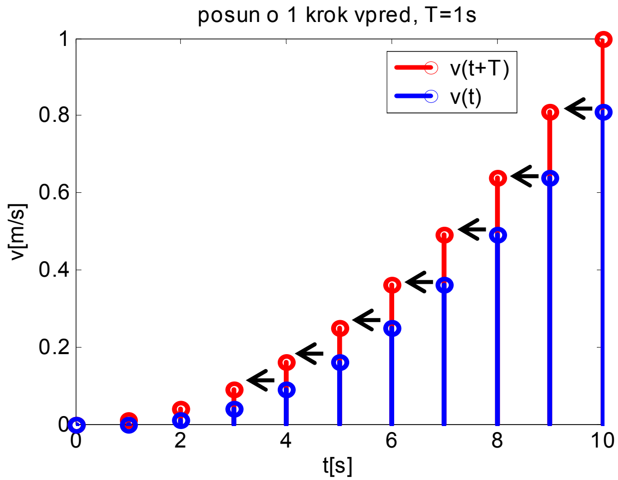
- přenos systému v operátoru z:

$$G(z^{-1}) = \frac{Z\{výstup\}}{Z\{vstup\}} = \frac{Z\{y(t)\}}{Z\{u(t)\}}$$

za nulových počátečních podmínek

$$G(z) = \frac{Z\{v(t)\}}{Z\{F(t)\}} = \frac{rRT \cdot z^{-1}}{J-(J-BT)\cdot z^{-1}} = \frac{rRT}{J\cdot z-(J-BT)}$$

- operátor z představuje posunutí posloupnosti o jeden krok vpřed, tj. vlevo po časové ose



$$z \cdot v(t) \approx v(t+T) \approx v(t+1)$$

$$Jv(t)-(J-BT)v(t-T)=rRTF(t-T)$$

$$t \to t+T$$

$$\Updownarrow$$

$$Jv(t+T)-(J-BT)v(t)=rRTF(t)$$

- diferenční rovnice musí platit pro jakýkoli čas (t, t+T, t-2T, t+4T, t-4T, ...) ↔ posun okénka

$$Jv(t)-(J-BT)v(t-T)=rRTF(t-T)$$

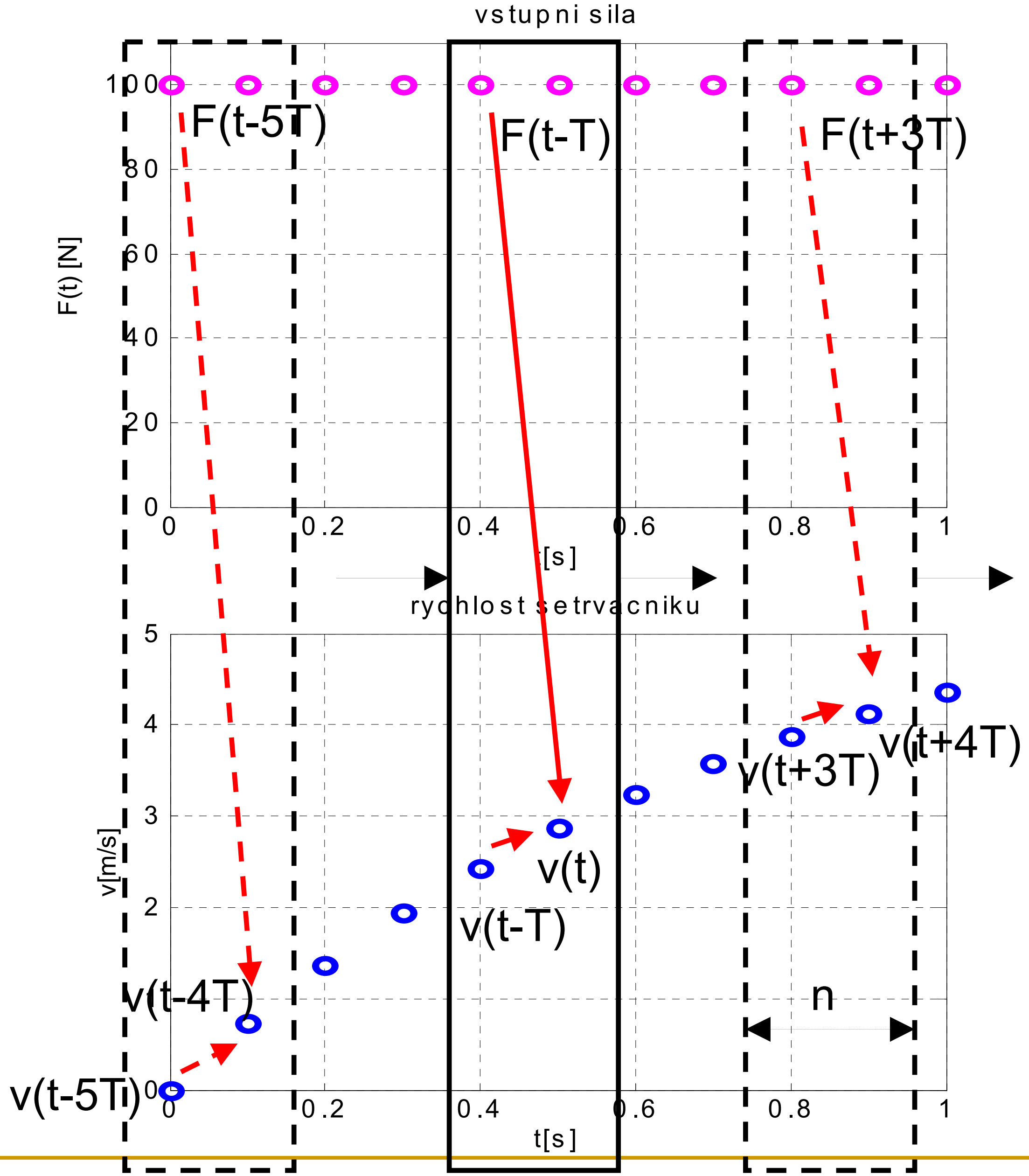
$$\Updownarrow$$

$$Jv(t+T)-(J-BT)v(t)=rRTF(t)$$

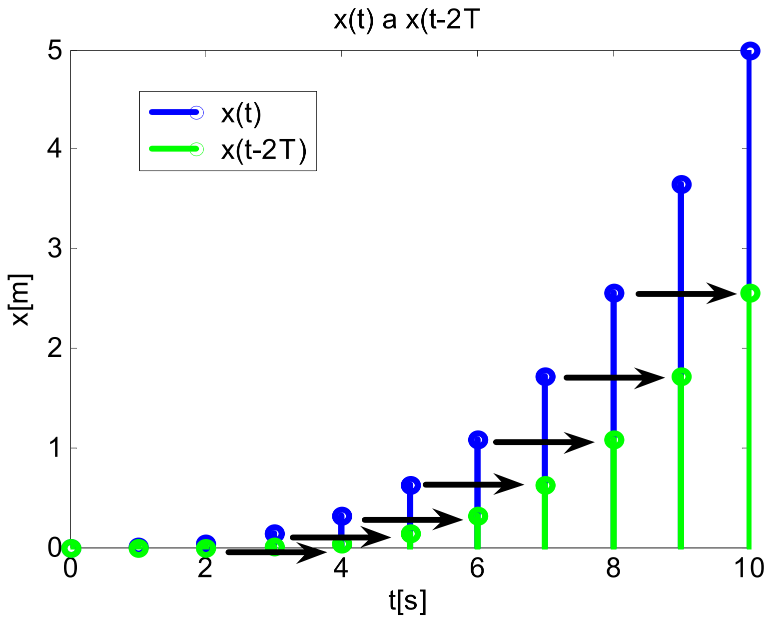
$$G(d)=\frac{rRT\cdot d}{J-(J-BT)\cdot d}$$

$$\Updownarrow$$

$$G(z)=\frac{rRT}{J\cdot z-(J-BT)}$$


vstupni sila
F(t) [N]
100
80
60
40
20
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
t[s]
F(t-5T)
F(t-T)
F(t+3T)
rychlost setrvacniku
v[m/s]
5
4
3
2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
t[s]
v(t-5T)
v(t-4T)
v(t-T)
v(t)
v(t+3T)
v(t+4T)
n

- zpoždění o dva kroky:



- zpoždění o n kroků:

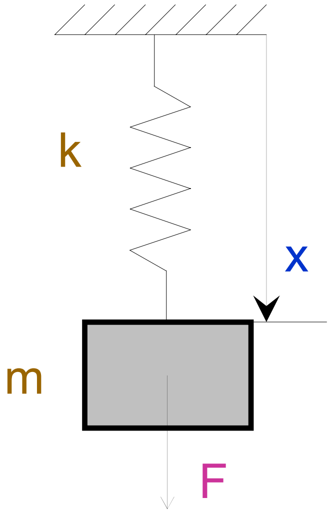
$$x(t-nT) \approx d^n \cdot x(t)$$

$$x(t+nT) \approx z^n \cdot x(t)$$

za nulových počátečních podmínek

$$x(t-2T) \approx d \cdot x(t-1) \approx d \cdot d \cdot x(t) = d^2 \cdot x(t)$$

$$x(t+2T) \approx z \cdot x(t+1) \approx z \cdot z \cdot x(t) = z^2 \cdot x(t)$$



$$\frac{m}{T^2}x(t)-\frac{2}{T^2}x(t-T)+\left(\frac{1}{T^2}+k\right)x(t-2T)=F(t-2T)$$

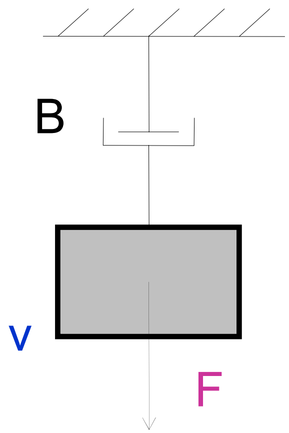
$$mx(t)-2x(t-T)+\left(1+kT^2\right)x(t-2T)=T^2F(t-2T)$$

$$G(d)=\frac{D\{v(t)\}}{D\{F(t)\}}=\frac{T^2\cdot d^2}{m-2\cdot d+\left(1+kT^2\right)d^2}$$

$$G(z)=\frac{Z\{v(t)\}}{Z\{F(t)\}}=\frac{T^2}{mz^2-2\cdot z+1+kT^2}$$

Simulační schema lineárního diskrétního systému

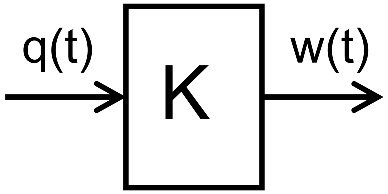
- lineární diferenční rovnice 1.řádu



$$mv(t)-\left(m-BT\right)v(t-T)=TF(t-T)$$

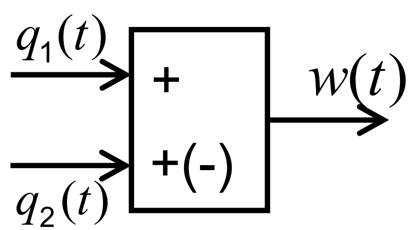
$$v(0)=v_0$$

zesilovač



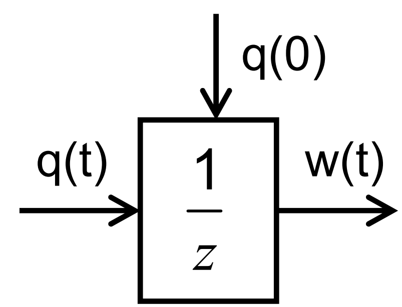
$$w(t)=Kq(t)$$

sčítačka



$$w(t)=q_1(t)+q_2(t)$$

zpoždění o 1 krok



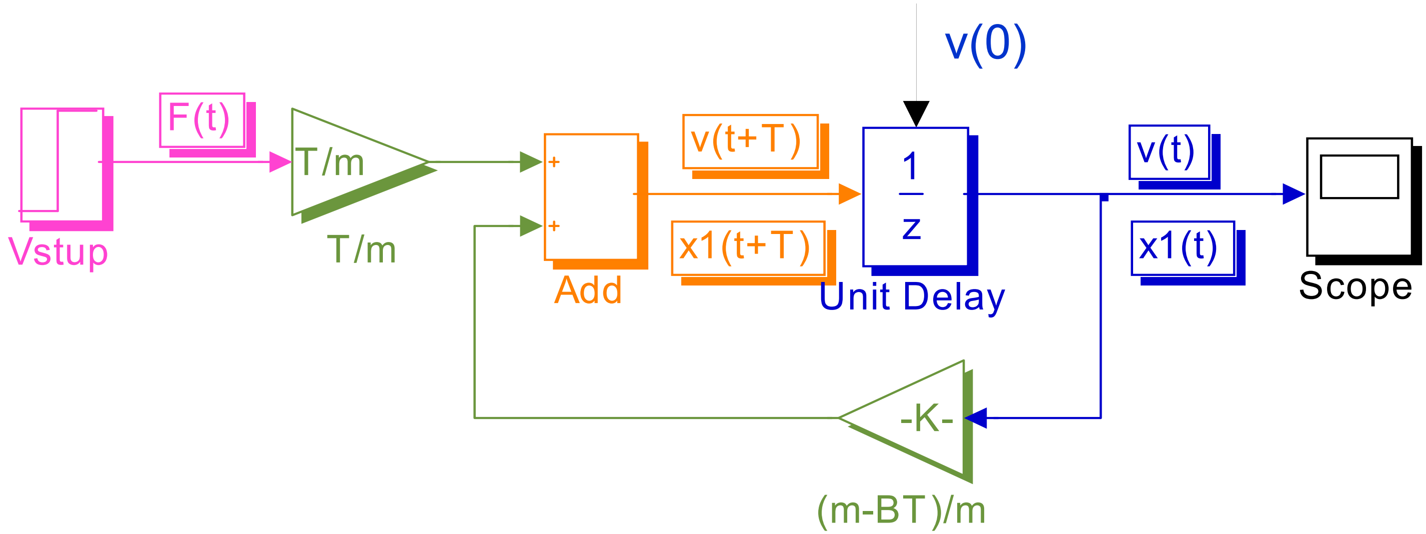
$$w(t)=q(t-T)$$

$$mv(t)-(m-BT)v(t-T)=TF(t-T)$$

$$v(t)=\frac{m-BT}{m}v(t-T)+\frac{T}{m}F(t-T)$$

$$t\to t+T$$

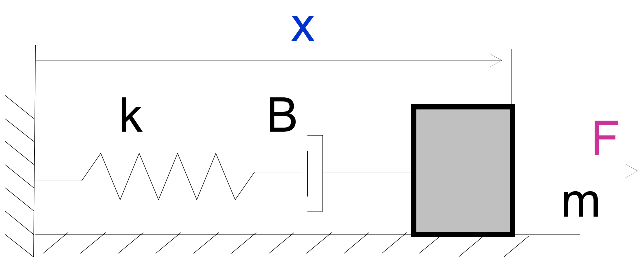
$$v(t+T)=\frac{m-BT}{m}v(t)+\frac{T}{m}F(t)$$



$$x_1(t+T) = \frac{m-BT}{m}x_1(t) + \frac{T}{m}u(t) \qquad x_1(0) = x_{10} = v_0$$

$$y(t) = x_1(t)$$

- lineární diferenční rovnice 2.řádu



$$x(0) = x_0, x(T) = x_T$$

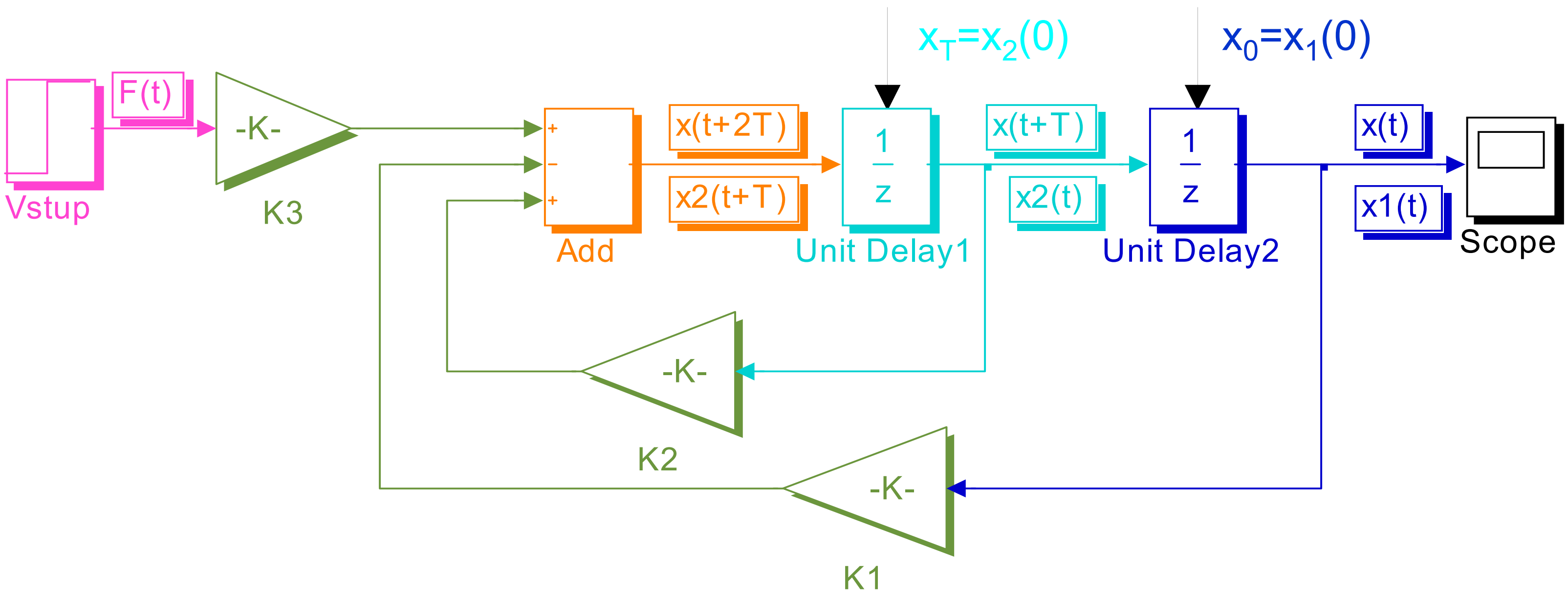
$$mx(t) - (2m - BT)x(t-T) + (m - BT + kT^2)x(t-2T) = T^2F(t-2T)$$

$$x(t) - \frac{2m-BT}{m}x(t-T) + \frac{m-BT+kT^2}{m}x(t-2T) = \frac{T^2}{m}F(t-2T)$$

$$t \to t + 2T$$

$$x(t+2T)=\frac{2m-BT}{m}x(t+T)-\frac{m-BT+kT^2}{m}x(t)+\frac{T^2}{m}F(t)$$

$$x(t+2T)=K_2x(t+T)-K_1x(t)+K_3F(t)$$



$$x(t+2T) = -K_1 x(t) + K_2 x(t+T) + K_3 F(t)$$

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_1(t+T) = x_2(t)$$

$$x_2(t+T) = -K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t) + K_3 u(t)$$

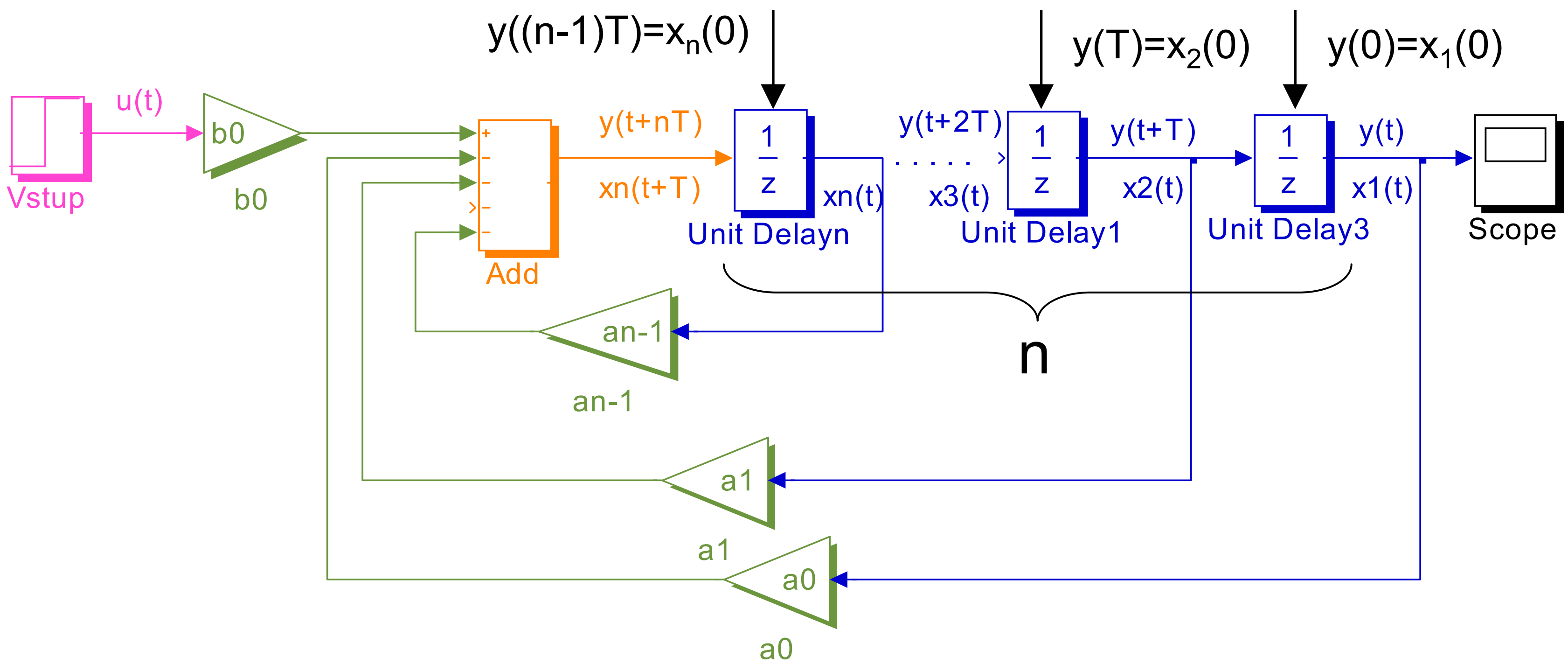
$$\boxed{\begin{aligned} & x_1(t+T) = x_2(t) \\ & x_2(t+T) = K_1 x_1(t) - K_2 x_2(t) + K_3 u(t) \\ & y(t) = x_1(t) \\ & x_1(0) = x_0, x_2(0) = x_T \end{aligned}}$$

- diferenční rovnici 2.řádu jsme převedli na 2 diferenční rovnice 1.řádu

- lineární diferenční rovnice n-tého řádu s jednoduchou pravou stranou

$$y(t) + a_{n-1} y(t-T) + \cdots + a_0 y(t-nT) = b_0 u(t-nT)$$

$$y(0), y(T), \ldots, y((n-1)T)$$



$$y(t)+a_{n-1}y(t-T)+\cdots+a_0 y(t-nT)=b_0 u(t-nT)$$

$$y(t+nT)+a_{n-1}y(t+(n-1)T)+\cdots+a_0 y(t)=b_0 u(t)$$

$$x_1(t)=y(t)$$

$$x_2(t)=y(t+T)=x_1(t+T)$$

$$x_3(t)=y(t+2T)=x_2(t+T)$$

$$\vdots$$

$$x_n(t)=y(t+(n-1)T)=x_{n-1}(t+T)$$

$$x_n(t+1)=y(t+nT)$$

$x_i(t)$ – stavové veličiny

stavový popis

$$x_1(t+T)=x_2(t)$$

$$x_2(t+T)=x_3(t)$$

$$x_3(t+T)=x_4(t)$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1}(t+T)=x_n(t)$$

$$x_n(t+T)=-a_0x_1(t)-a_1x_2(t)-\cdots-a_{n-1}x_n(t)+b_0u(t)$$

$$y(t)=x_1(t)$$

$$x_1(0)=y(0)$$

$$x_2(0)=y(T)$$

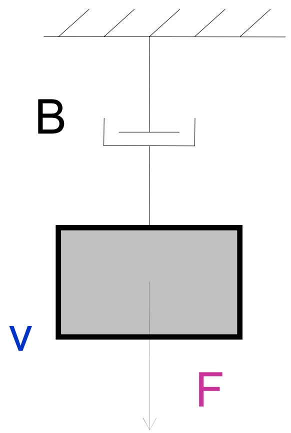
$$x_3(0)=y(2T)$$

$$\vdots$$

$$x_n(0)=y((n-1)T)$$

maticový zápis stavových rovnic lineárního systému

- systém 1.řádu



$$x_1(t+T) = -\frac{m-BT}{m}x_1(t) + \frac{T}{m}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

$$x_1(0) = x_{10} = v_0$$

$$\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

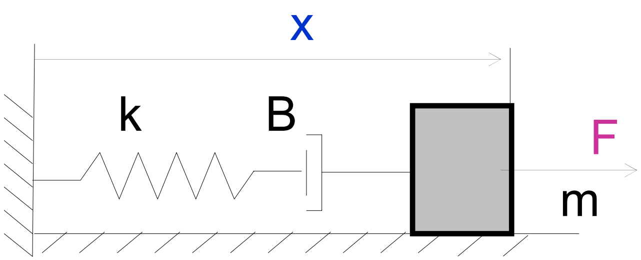
$$\mathbf{A} = \left[-\frac{m-BT}{m}\right], \mathbf{B} = \left[\frac{T}{m}\right]$$

$$\mathbf{C} = [1], \mathbf{D} = [0]$$

$$\mathbf{x}(t) = x_1(t) = v(t), u(t) = \mathbf{u}(t) = F(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = y(t) = v(t)$$

- systém 2.řádu



$$x_1(t+T) = x_2(t)$$

$$x_2(t+T) = -K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t) + K_3 u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

$$x_1(0) = x_0, x_2(0) = x_T$$

$$\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_2 & K_1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ x(t) \end{bmatrix}, \mathbf{u}(t) = u(t) = F(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = y(t) = x(t)$$

- systém n-tého řádu

$$x_1(t+T) = x_2(t)$$
$$x_2(t+T) = x_3(t)$$
$$x_3(t+T) = x_4(t)$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1}(t+T) = x_n(t)$$
$$x_n(t+T) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \cdots - a_{n-1} x_n(t) + b_0 u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

$$x_1(0) = y(0)$$
$$x_2(0) = y(T)$$
$$x_3(0) = y(2T)$$
$$\vdots$$
$$x_n(0) = y((n-1)T)$$

$$\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \mathbf{u}(t) = u(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = y(t)$$

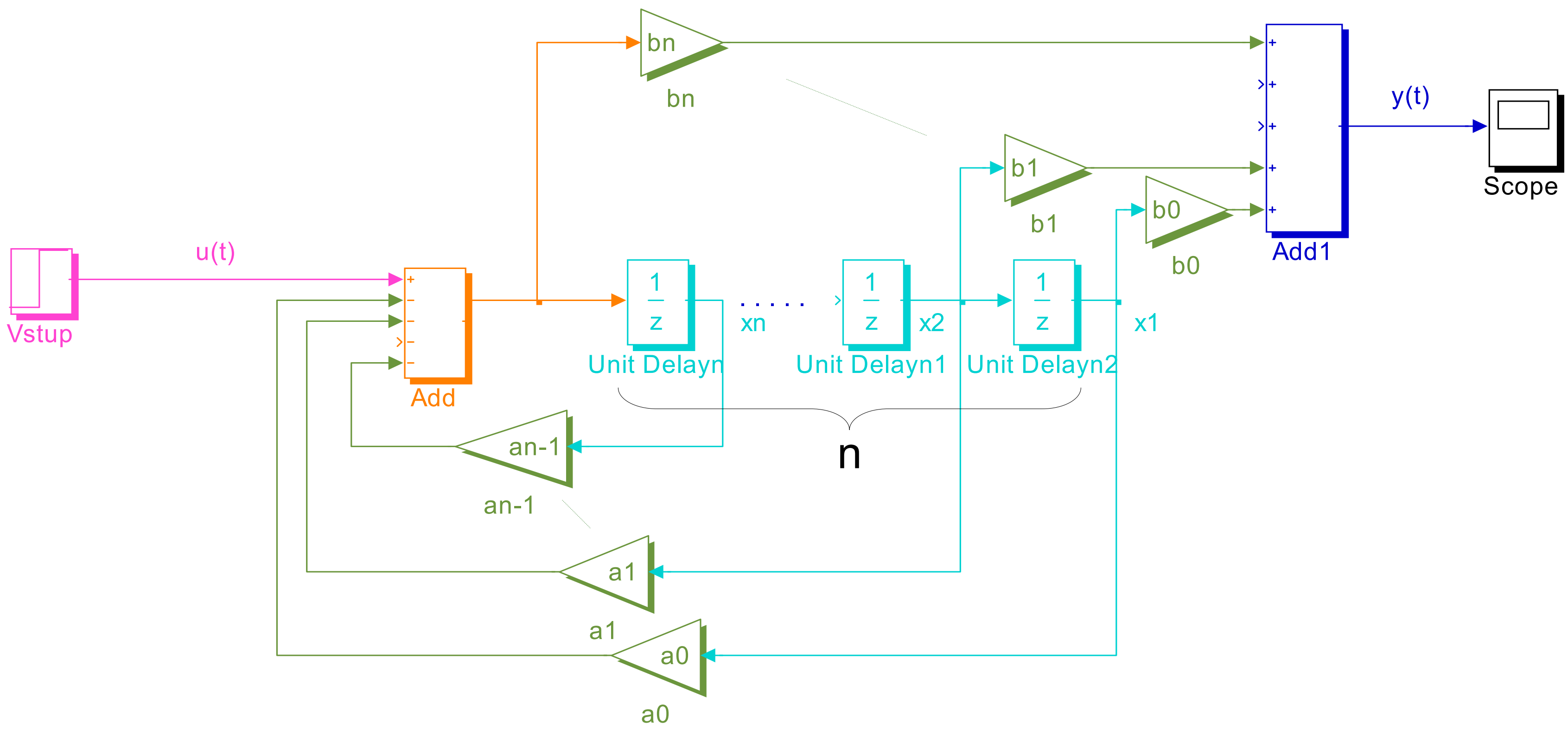
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

lineární diferenční rovnice n-tého řádu

$$y(t)+a_{n-1}y(t-T)+\cdots+a_0 y(t-nT)=b_m u(t)+b_{m-1}u(t-T)+\cdots+b_0 u(t-mT)$$

$$y(0), y(T), \ldots, y((n-1)T)$$



- počáteční podmínky obecné diferenciální rovnice nesouhlasí s počátečními podmínkami schematu !!!

$$y((n-1)T), y((n-2)T), \ldots, y(0) \quad \neq \quad x_n(0), x_{n-1}(0), \ldots, x_2(0), x_1(0)$$

- simulační schema lineárního diskrétního systému lze sestavit z bloků zpoždění o 1 krok, zesilovačů a sumátorů

- jednoduché nelineární diferenciální rovnice

$$x(t) - 2x(t-T) + x(t-2T) = KT^2 \sin\varphi(t-2T)$$

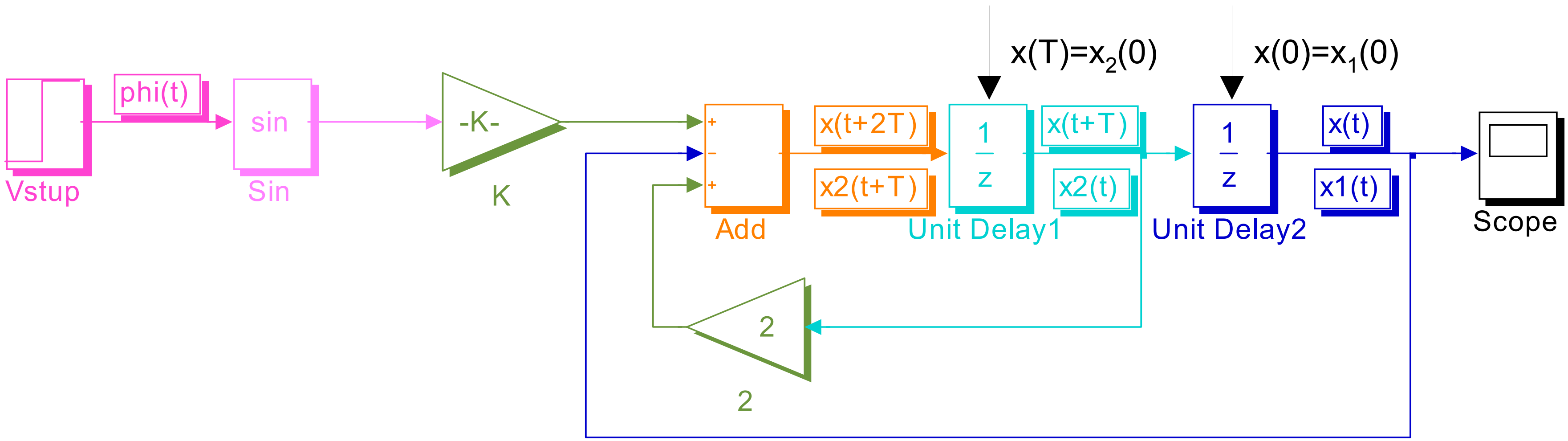
$$K = \frac{g}{1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{r}\right)^2}$$

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$$

$$x(0) = x_0, v(0) \triangleq \frac{\Delta x(0)}{T} = \frac{x(T) - x(0)}{T} \Rightarrow x(T) = v(0)T + x(0)$$

$$x(t) - 2x(t-T) + x(t-2T) = KT^2 \sin\varphi(t-2T)$$

$$x(t+2T) = 2x(t+T) - x(t) + KT^2 \sin\varphi(t)$$



$$x_1(t+T) = x_2(t)$$

$$x_2(t+T) = 2x_2(t) - x_1(t) + KT^2 \sin u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

$$x_1(t+T) = f_1(x_1(t), x_2(t), u(t))$$

$$x_2(t+T) = f_2(x_1(t), x_2(t), u(t))$$

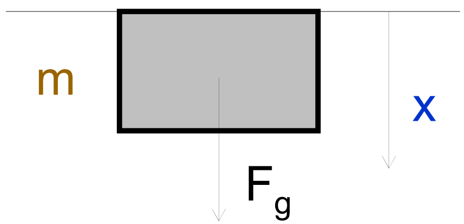
$$y(t) = g(x_1(t), x_2(t), u(t))$$

$$\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t))$$

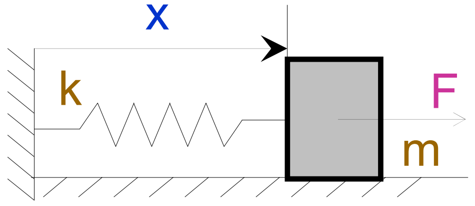
$$y(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), u(t))$$

Kontrolní otázky

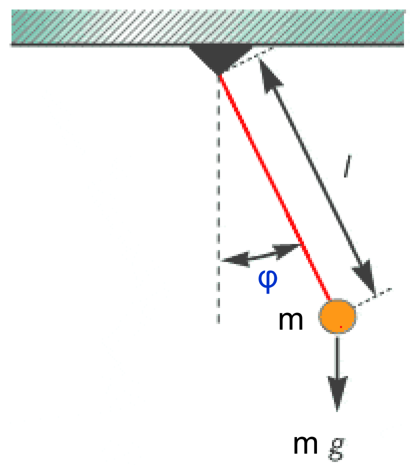
- Pomocí kterých bloků jsme schopni sestavit simulační schema jakéhokoli lineárního spojitého systému? Kam zapisujeme počáteční podmínky?
- Čím se liší stavový popis lineárního spojitého a diskrétního systému?
- Nakreslete spojité simulační schema pro volný pád, jestliže jako výstupní veličinu budeme uvažovat polohu závaží x(t).



- Nakreslete simulační schema následujícího spojitého systému, jestliže jako vstupní veličinu uvažujeme sílu F(t) a výstupní polohu závaží x(t). Nakreslete též simulační schema odpovídajícího diskrétního systému a napište stavové rovnice obou popisů.



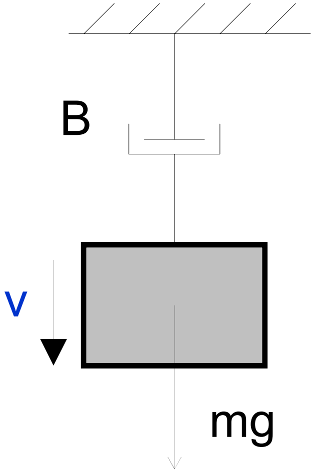
- Nakreslete diskrétní simulační schema kyvadla, jehož výstupem je úhlová poloha φ(t). Jaké jsou jeho počáteční podmínky?



- Kolik stavových veličin má lineární systém?
- U příkladu systému 2. řádu se závažím, pružinou a tlumičem je výstupem poloha závaží x(t). Pokuste se co nejjednodušeji doplnit simulační schema, aby výstupní veličinou byla rychlost závaží v(t).
- Nakreslete simulační schema cyklistického trenažeru a diskutujte vliv velikosti počáteční podmínky (rychlosti) v(t) na velikost ustálené rychlosti při jednotkovém skoku vstupní síly F(t).

- Vytvořte simulační schema modelu systému seskoku padákem, který je popsán diferenční rovnicí

$$m\frac{\Delta v(t-T)}{\Delta t}+Bv(t-T)=mg \Leftrightarrow v(t)-\frac{m-BT}{m}v(t-T)=gT$$



Nasimulujte situaci, kdy parašutista letí volným pádem rychlostí 60m/s a právě se mu otevře padák. Uvažujte m = 80kg, B = 270Ns/m, T = 0.01s.

- Pokuste se nakreslit simulační schema cyklistického trenažeru s uvažováním zatěžovacího momentu $M_z(t)$ jako druhého vstupu a zamyslete se nad jeho vlivem na průběh výstupní rychlosti v(t).

$$Jv(t) - (J - BT)v(t - T) = rRTF(t - T) - RTM_z(t - T)$$