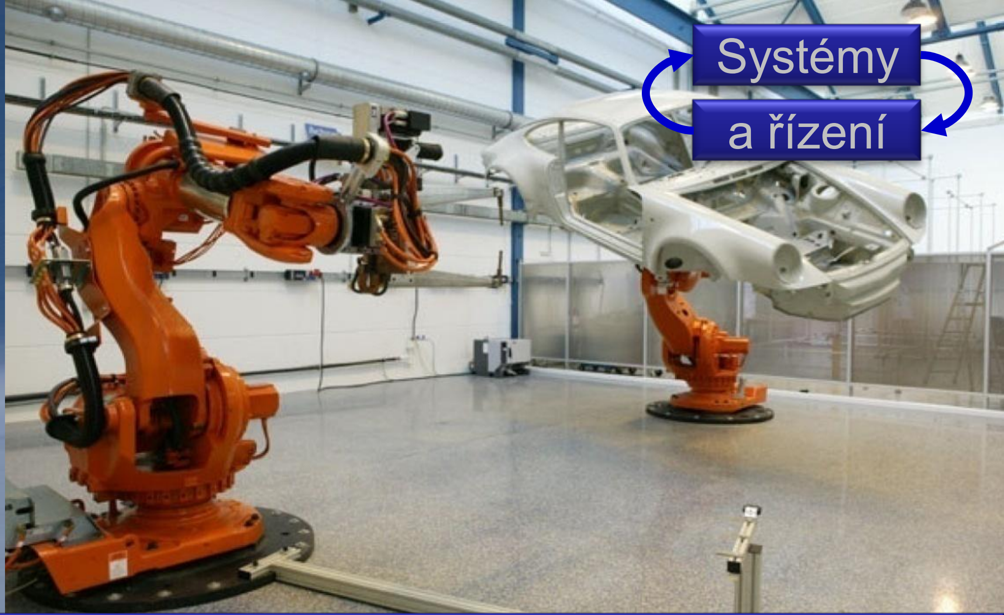
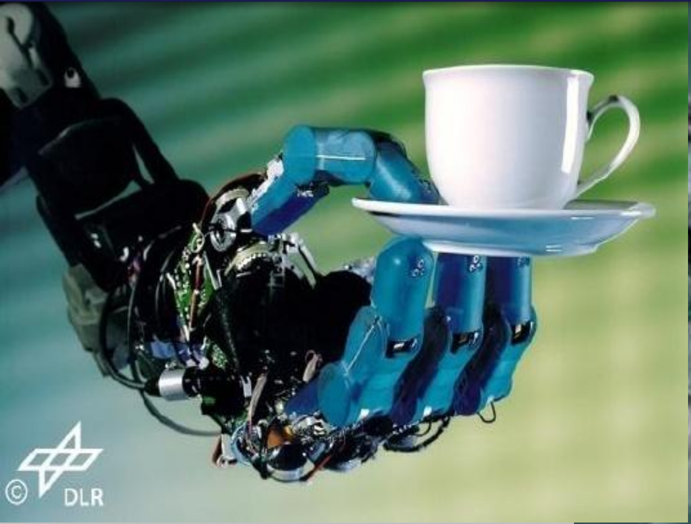
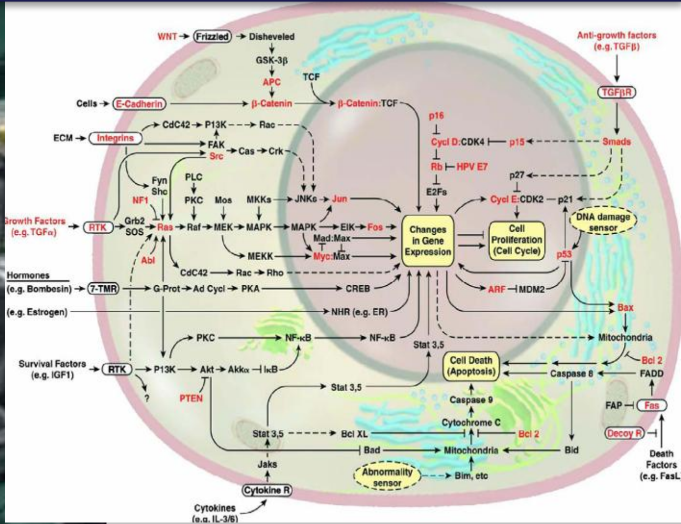


Systémy a řízení
Nelineární Systémy

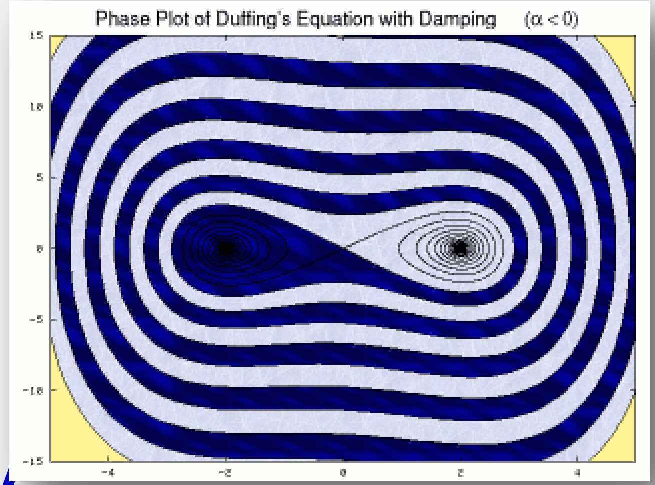
21.9.2009

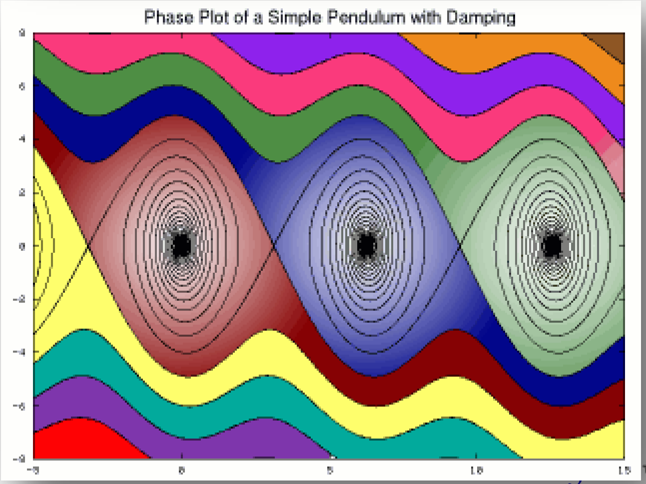




Obsah

Nelineární systémy





Nelineární systémy

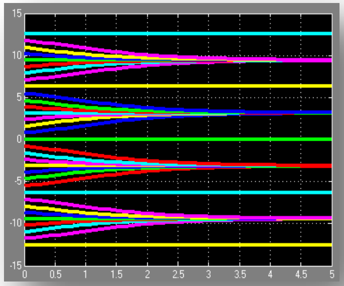
- Lineární systémy: superposice, věrnost frekvence, frekv. Caharakteristiky a modely, přenosy, …
- Reálné systémy většinou (ne vždy) nelineární, při relativně malých signálech často můžeme aproximovat lineární modelem
- Nelinearitu musíme vzít v úvahu když: větších signály / projevuje se i pro malé / nelze linearizovat apod.
- Nelineární systémy popisujeme jen v časové oblasti nelin. dif. rovnice, speciálně stavové

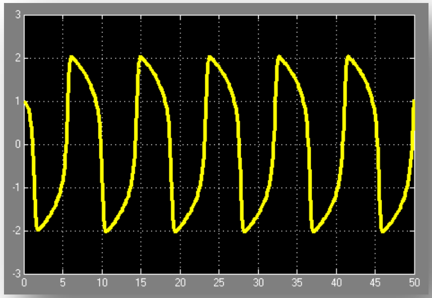
$$\dot{x} = f(x,u)$$
$$y = h(x,u)$$

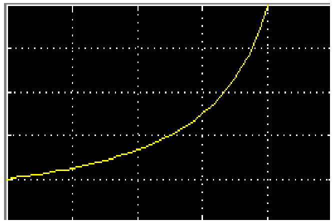
- Co nemá smysl: přenos (neplatí superpozice), frekvenční přenos a charakteristiky (přenos frekvence závisí i na amplitudě, na výstupu mohou být nové frekvence, které nebyly na vstupu, …), póly, nuly
- Co má trochu jiný smysl: stabilita (lokální vs. globální)
- Dochází k jevům u lineárních systémů nevídaným
- mnoho příkladů těchto jevů je na doplňkových slajdech

Nelineární jevy

- U nelineárních systémů: jevy u lineárních nevídané
- Řešení neexistuje nebo není jednoznačné
- Více izolovaných ekvilibrií (rovnovážných stavů)
- Stabilní oscilace







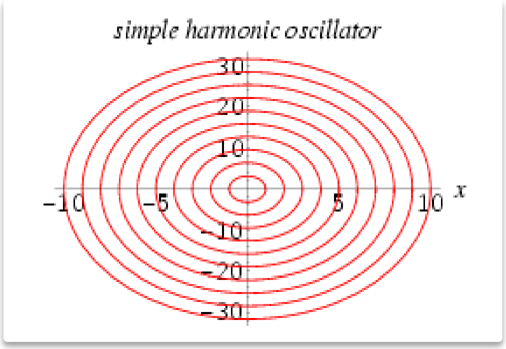
- Únik v konečném čase
- bifurkace (kvalitativní rysy se mění se změnou parametrů)
- synchronizace (vázané oscilátory se synchronizují)
- složité dynamické chování: turbulence , chaos, …
- mnoho příkladů těchto jevů je na doplňkových slajdech

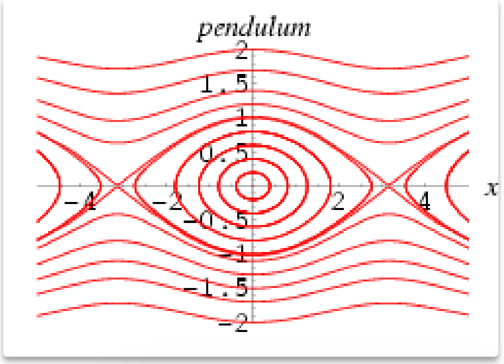
Fázové portréty

- Řešení nelineárního systému druhého řádu
- vyjadřujeme jako funkce času

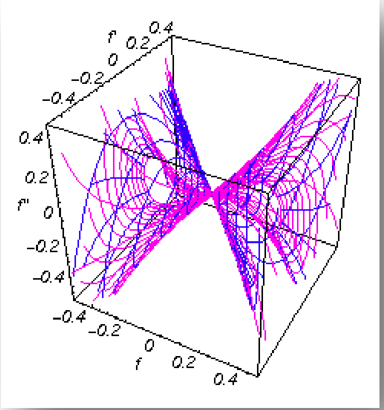
$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t)$$





- Je to parametrické vyjádření 2-D křivky (trajektorie syst.) v rovině x_1, x_2 s param. t
- Fázový portrét systému je grafické vyjádření soustavy takových křivek pro různé poč. stavy
- Fázový portrét by měl zobrazovat všechny zajímavé jevy v systému: ekvilibria, limitní cykly…
- Fázový portrét má smysl i pro systémy řádu >2 ale není tak názorný (neumíme ho hezky nakreslit)
- Podrobnosti k numerickému vykreslování portrétů jsou v doplňkových slajdech



Nelinearita v soustavě a v aktuátoru

Systémy
a řízení

Je-li nelinearita v soustavě (systému, procesu), pak se

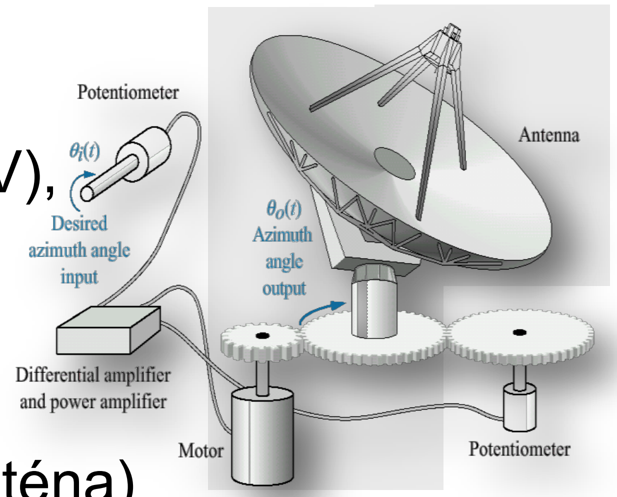
- většinou snažíme ji linearizovat a pak použít lineární model
- a to buď přibližně (přibližný lin. model v okolí prac. bodu)
- anebo přesně pomocí ZV (nelineární nebo i lineární)

Je-li soustava lineární, ale nelinearita je v aktuátoru

- Tedy ji do řídicího systému přidáváme my, neboť jinak nelze
- pak ji buď ignorujeme, navrhujeme lineárně a ověříme výsledek
- nebo ji musíme vzít v úvahu od začátku
- Snažíme se její vliv omezit (např. lineární ZV)
- nikdy ji přibližně nelinearizujeme

Vliv nelinearit na časovou odezvu

- Někdy nelinearitu do systému přidáme sami při řízení (v aktuátoru)
- navrhujeme lineárně ale myslíme na ni (malé signály) a ověříme výsledek simulací
- Snažíme se její vliv omezit (např. lineární ZV), ale přibližně ji nelinearizujeme
- na příkladech si ukážeme vliv takové nelinearity na časovou odezvu



Polohování antény v azimutu: motor+zátěž (anténa)

- přenos napětí na kotvě na úhlovou rychlost antény

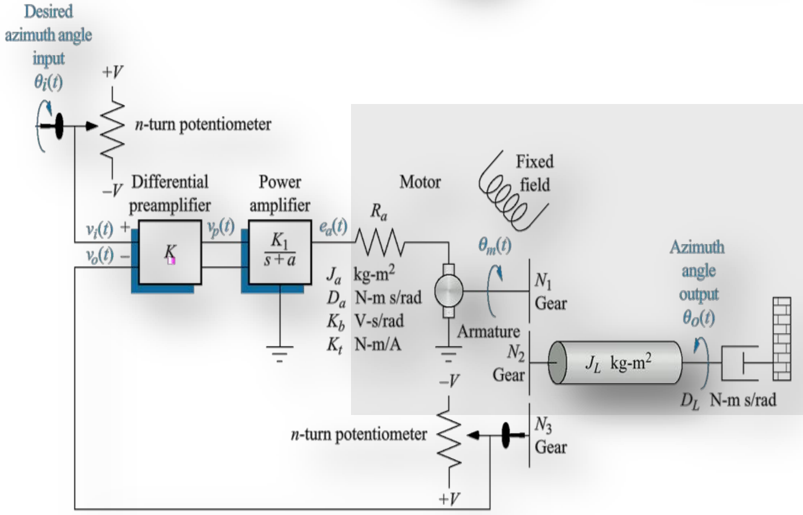
převody

$$\omega_o(s) = 0.1 s\theta_m(s) = \frac{0.2083}{s+1.71} E_a(s)$$

úhlová rychlost antény

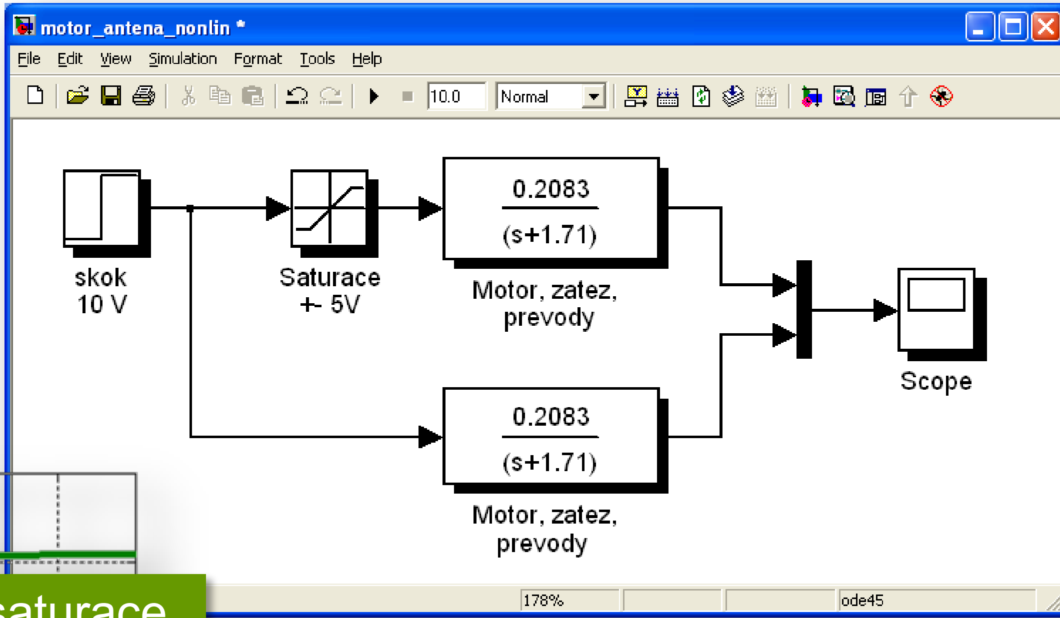
úhlová poloha kotvy

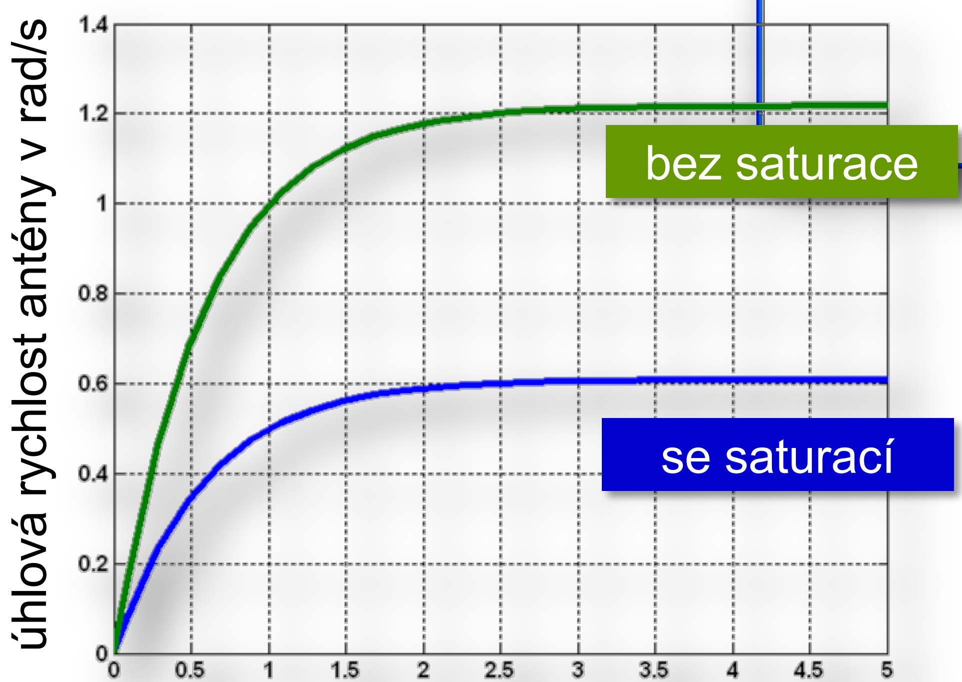
napětí na kotvě



Příklad: vliv saturace na vstupu

- saturace
- ve výkonovém zesilovači
- se zesílením 1, ale se saturací ± 5 V



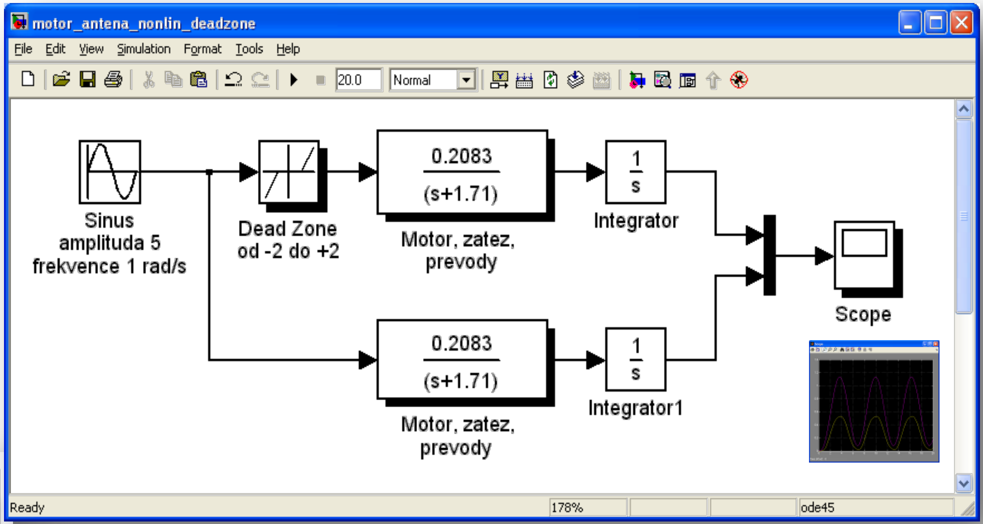


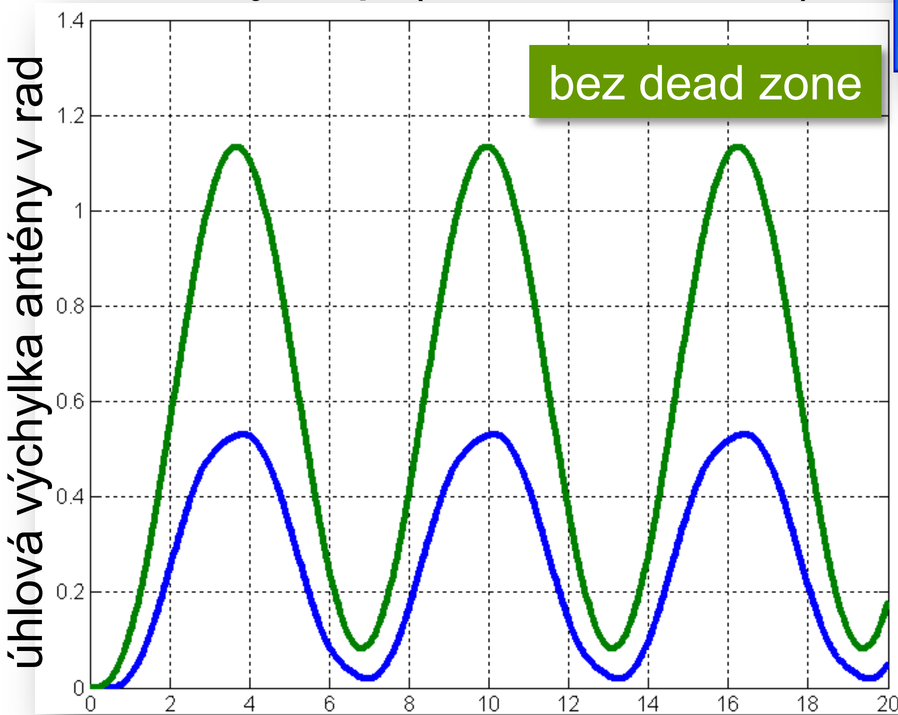
Efekt saturace v zesilovači je podle očekávání:

- saturace pouze zmenší skokový signál na vstupu
- a tomu odpovídá výstup

Příklad: vliv pásma necitlivosti

- pásmo necitlivosti
  dead zone
- na výstupní hřídeli
- vstupní signály v pásmu od -2 V do +2 V nemají efekt na výstup (neotočí hřídelí)





- dobře se projeví při sinusovém vstupním signálu
- hřídel reaguje teprve až vstupní signál překročí práh necitlivosti
- výsledkem je menší amplituda

s dead zone

Jak řídit nelineární soustavu?

- návrh řízení provedeme metodami nelineární teorie
  (ty budete mít až v předmětu X35NES: Nelineární systémy)
- soustavu často přibližně linearizujeme a pak
  - navrhujeme pro linearizovaný sys. lineárními metodami
  - to už umíte, opakování je také na doplňkových slajdech
  - Pozor: výsledek ověříme simulacemi
    s původním nelineárním modelem
- někdy můžeme soustavu linearizovat přesně
  - nejprve navrhneme regulátor, který soustavu linearizuje
  - tak vznikne nový – lineární – systém
  - pak navrhneme další – lineární – regulátor,
    který ten nově vzniklý lineární systém řídí
  - přesnou linearizaci provedeme buď
    - nelineární FB nebo
    - nelineární FF nebo také můžeme
  - linearizovat přibližně (částečně) lineární FB

Linearizace

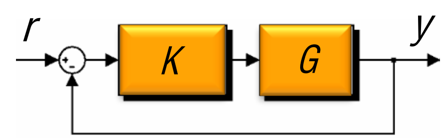
Linearizační efekt ZV

Lokálně linearizační efekt ZV

I lineární ZV linearizuje, více pro vetší zesílení

- Zavedením vhodné ZV držíme výstup soustavy poblíž požadovaného pracovního bodu, tj.
- tam, kde dobře platí lineární modely použité při návrhu
- Tak vlastně ZV ospravedlňuje užití lineárních modelů v kurzu SRI

Globálně linearizační efekt ZV



- Už v první přednášce jsme viděli, jak je výhodné použít ZV s velkým zesílení – Teď to odvodíme obecněji:

pro systémy lineární

$$y = GKr - GKy \Rightarrow y = \frac{GK}{1+GK} r$$

$$|GK| >> 1 \Rightarrow y \approx r$$

i nelineární

$$y = G\langle K\langle r\rangle\rangle - G\langle K\langle y\rangle\rangle \Rightarrow G\langle K\langle y\rangle\rangle = G\langle K\langle r\rangle\rangle - y$$

$$\Rightarrow y = r - K^{-1}\langle G^{-1}\langle y\rangle\rangle$$

$$|G\langle K\langle \circ\rangle\rangle| >> 1 \Leftrightarrow K^{-1}\langle G^{-1}\langle \circ\rangle\rangle \approx 1$$

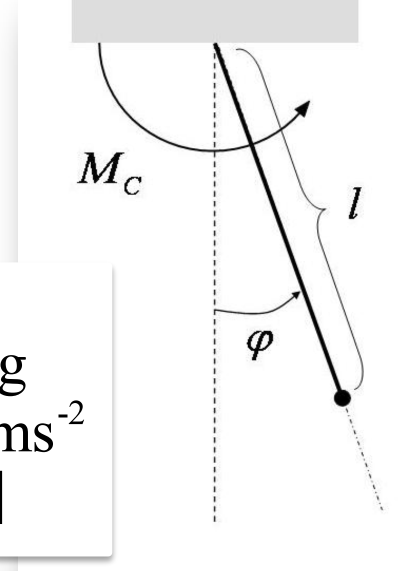
$$\Rightarrow y \approx r$$

- velké zesílení potlačí vliv neurčitostí i nelinearit
- Bohužel často také destabilizuje – nutný kompromis dle frekvencí
- Často užíváme integrátor – má pro malé frek. nekonečné zesílení

Linearizace zpětnou vazbou

- nelineární členy odečteme a přidáme k řízení
- výsledkem je přesně lineární systém -
  pokud řídicí počítač vypočte nelineární člen rychle

Příklad: kyvadlo řízené momentem



$$
\begin{aligned}
l &= 1\,\mathrm{m}\\
m &= 0.5\,\mathrm{kg}\\
g &= 9.81\,\mathrm{ms}^{-2}\\
M_c &\,[\mathrm{Nm}]
\end{aligned}
$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = M_c$$

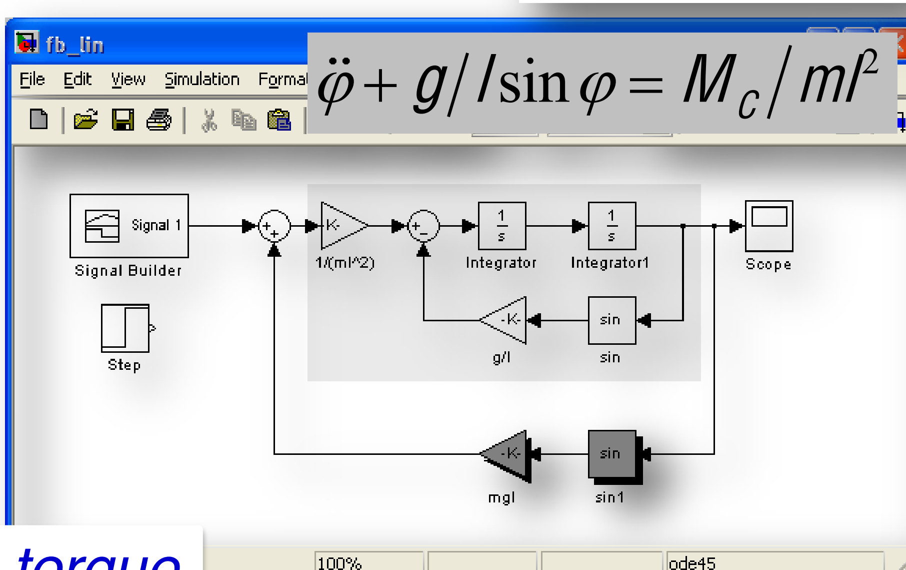
$$ml^2\ddot{\varphi} = \underbrace{M_c - mgl\sin\varphi}_{u}$$

použijeme pro návrh

- výsledná rovnice $ml^2\ddot{\varphi} = u$
  je lineární i pro velká φ, ale
- k řízení se přičte nelin. ZV

$$M_c = u + mgl\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} + g/l\sin\varphi = M_c/ml^2$$



- používá se to např. pro řízení robotů jako methoda *computed torque*

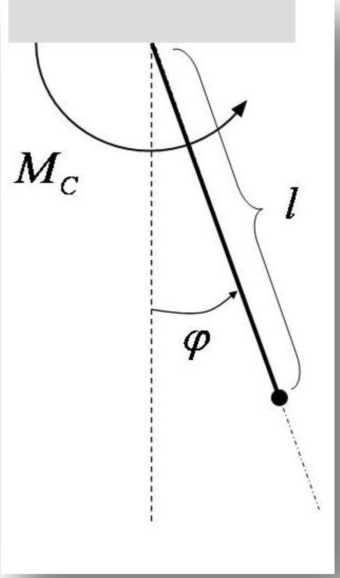
Linearizace - pokračování

- při přesné ZV linearizaci jsme převedli

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = M_c$$

- na

$$ml^2\ddot{\varphi} = u \qquad M_c = u + mgl\sin\varphi$$



- funguje to dobře, ale musíme
  tu přidanou nelinearitu realizovat dobře (= dost rychle)
- u dnešních robotů zvládneme až 3-dílná ramena

Pro srovnání:

- přibližnou linearizací kyvadla pro malé φ (v okolí dolní polohy) dostaneme

$$\sin\varphi \approx \varphi \;\Rightarrow\; ml^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi = M_c$$

- tj. rovnici lineárního oscilátoru

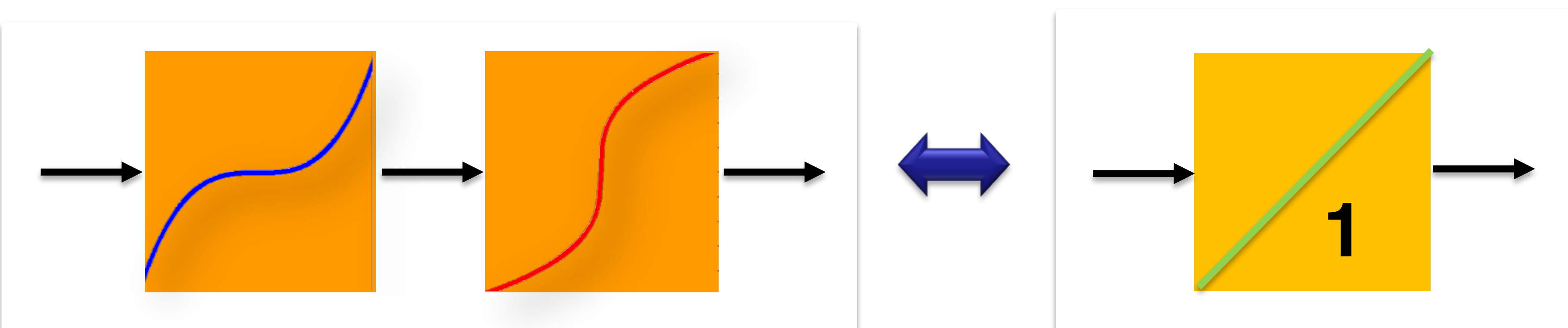
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = \frac{M_c}{ml^2}$$

Linearizace inverzní nelinearitou

- pro soustavy s oddělenou lineární dynamikou a statickou nelinearitou na vstupu
- můžeme použít

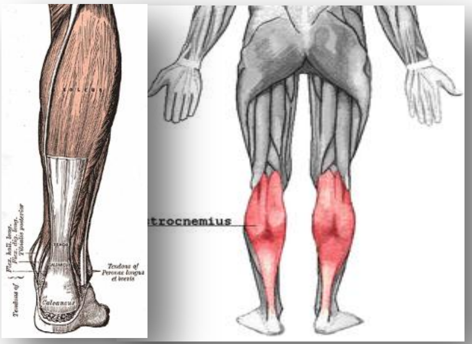
Linearizaci inverzní nelinearitou

- k některým nelineárním funkcím $f\langle\circ\rangle$
- existuje inverzní nelinearita $h\langle\circ\rangle = f^{-1}\langle\circ\rangle$
- takže jejich sériové spojení $f\langle h\langle\circ\rangle\rangle = f\langle f^{-1}\langle\circ\rangle\rangle = \circ$ je lineární
- používá se to hlavně pro korekci mírně nelin. senzorů a aktuátorů



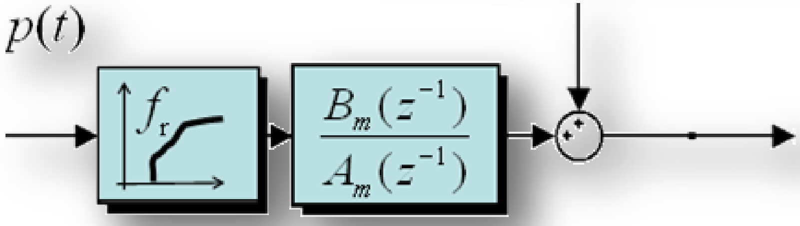
Hammersteinův model lidského svalu

- Lýtkové svaly: triceps surae
  = Gastrocnemius + Soleus
- jejich reakci na elektrickou stimulaci popisuje

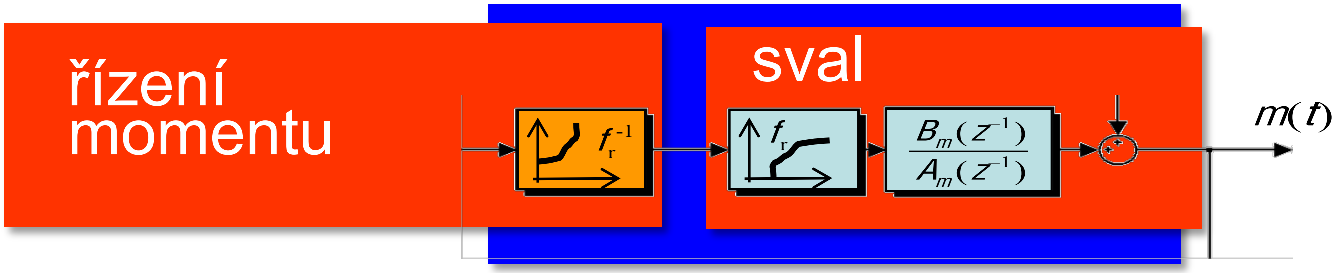


Hammersteinův empirický model

- statická nelinearita + lineární dynamika
- z experimentální impulsní charakteristiky se odvodí tvar nelinearity



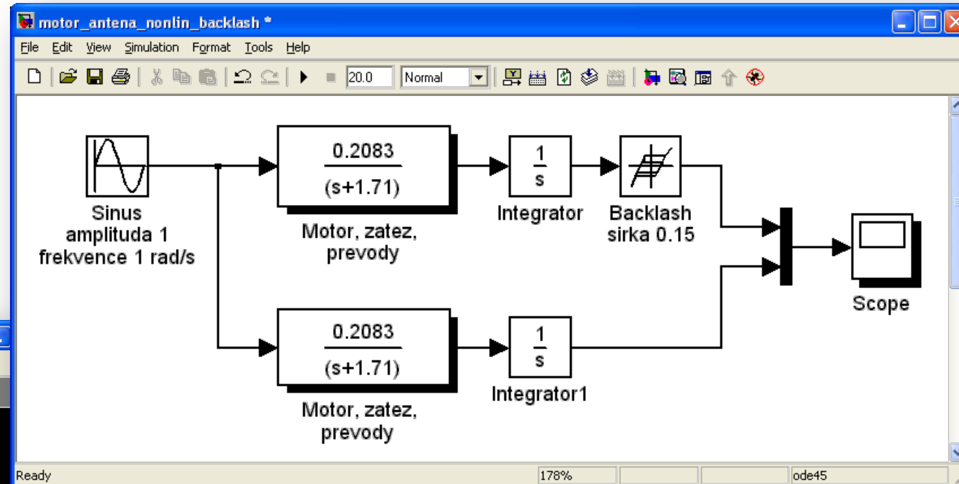
- potom se nelinearita vykrátí umělou inverzí



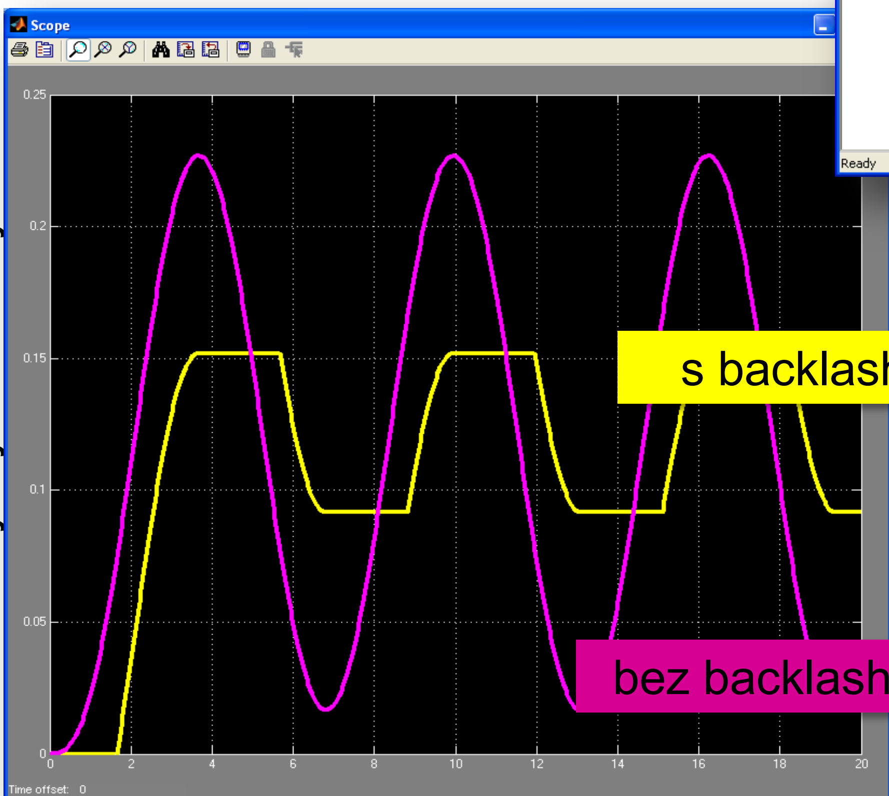
- a z výsledkem je lineární systém

Příklad: vliv mrtvého chodu backlash

- mrtvý chod - backlash
- vůle v ložiscích
- šířka pásma necitlivosti 0.15



úhlová výchylka antény v rad



- dobře se projeví při sinusovém vstupním signálu
- po změně směru rotace motoru
- zůstane výstupní hřídel na chvilku v klidu
- „dokud ložiska nezaberou opačně“

Stabilita nelineárních systémů

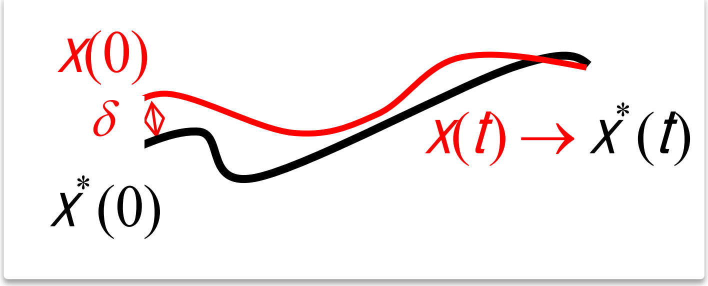
Stabilita řešení

- řešení nelineárního systému je stabilní když malá změna počátečních podmínek způsobí jen malou změnu toho řešení
- nechť systém $\dot{x}(t) = f(x(t))$ má pro počáteční stav $x^*(0)$ řešení $x^*(t)$. Toto řešení je
- stabilní (Lyapunovsky stabilní) když

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0: \quad \left| x^*(0) - x(0) \right| < \delta \Rightarrow \left| x^*(t) - x(t) \right| < \varepsilon$$

- asymptoticky stabilní když

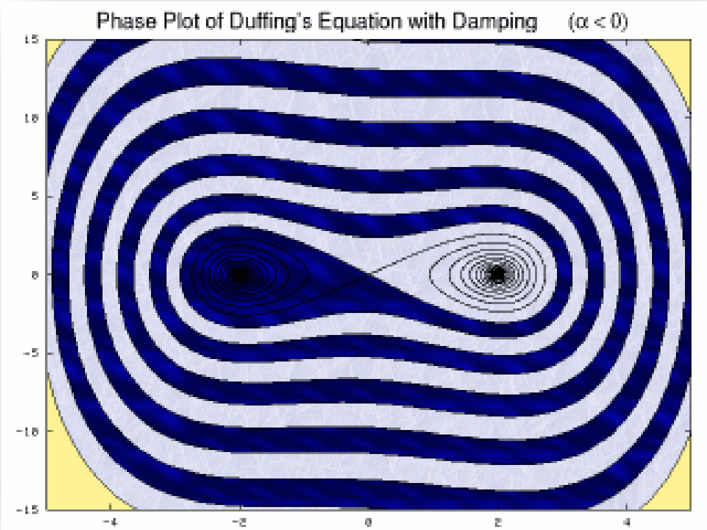
$$\exists \delta > 0: \quad \left| x^*(0) - x(0) \right| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \left| x^*(t) - x(t) \right| = 0$$



- u nelineárních systémů: ani jedna z vlastností obecně neimplikuje druhou
- speciálně u lineárních systémů: asymptotická stabilita implikuje Lyapunovskou

Stabilita ekvilibria

- Řešení, které začne v ekvilibriu, tam také setrvá navždy
- Stabilita ekvilibria = stabilita řešení, které v něm začne (a skončí)
- Říkáme, že ekvilibrium je stabilní, asymptoticky stabilní, nestabilní když toto řešení je takové



Definice

Ekvilibrium je tedy lokálně stabilní (asymptoticky stabilní) právě když všechna řešení začínající blízko něj zůstanou blízko (konvergují k němu)

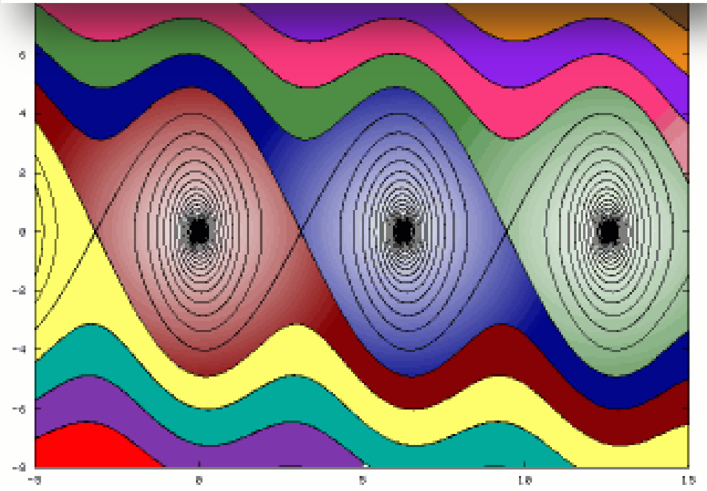
- to je zřejmě žádaná vlastnost, ale ještě lepší je, když to platí pro všechna řešení:

Definice

Ekvilibrium x_e je globálně asymptoticky stabilní, právě když je stabilní a

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_e \quad \forall x(0)$$

atraktor, doména atrakce, povodí



Kdy je lineární systém Lyapunovsky stabilní?

Zvláštním případem nelineárního systému je systém lineární: $\dot{x} = Ax$

- U lineárního systému je stabilita ekv. globální a = stabilitě systému
- Už víme, kdy je lineární systém asymptoticky stabilní
- U lineárního systému asymptotická stabilita ⇒ Lyapunov. stab.
- Kdy ještě je lineární systém Lyapunovsky stabilní?
- Role vlastních čísel na mezi stability:
  - jednonásobná vlastní čísla na Im neporuší Lyapunovu stabilitu
  - a co vícenásobná?
  - Neporuší ji takové vícenásobné vl. č. na Im, pro které platí

násobnost vl.č. = počet jeho lineárně nezávislých vl. vektorů

alternativně: násob. vl. č. = počet jeho Jordanových bloků

Příklad:

Paralelní spojení integrátorů je Lyapunovsky stab. $A = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{0} \end{bmatrix}$

Kaskáda integrátorů není Lyap. stab. $A = \left[\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}}\right]$

Stabilita ekvilibria a linearizace v jeho okolí

Intuitivně čekáme, že

- ekvilibrium x_0 systému $\dot{x}(t) = f(x(t), u_0)$ je stabilní
- je-li stabilní linearizace v jeho okolí

$$z = x - x_0, v = u - u_0$$
$$\dot{z} = Az + Bv$$

Přesněji platí tohle

- Má-li matice A všechna vlastní čísla stabilní, pak je ekvilibrium stabilní
- Má-li matice A aspoň jedno vlastní číslo nestabilní, pak je ekvilibrium nestabilní
- Má-li matice A aspoň jedno vlastní číslo na mezi stability a žádné nestabilní, pak o stabilitě ekvilibria jen ze znalosti A nemůžeme rozhodnout

Jak zkoumat stabilitu - motivace

Systémy a řízení

Určeme stabilitu ekvilibria v počátku pro systém 2. řádu

- zkoumáním vzdálenosti jeho řešení od počátku $d^2(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$
- sledujme její změnu jako funkce času podél tohoto řešení

Nejprve

- pro systém $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1^3\\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2^3\end{aligned}$ je $\frac{d}{dt}\left(x_1^2(t) + x_2^2(t)\right) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$
- dosazením rovnic systému dostaneme

$$\frac{d}{dt}\left(x_1^2(t) + x_2^2(t)\right) = 2x_1\left(x_2 - x_1^3\right) + 2x_2\left(-x_1 - x_2^3\right) = -2\left(x_1^4 + x_2^4\right) \le 0 \quad \forall t$$

- dokud nejsou x_1 a x_2 současně 0, čtverec vzdálenosti klesá k 0 a tak se řešení blíží k nule ➡ ekv. je lok. asymptoticky stabilní

Naopak

- pro systém $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1^3\\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2^3\end{aligned}$ je

$$\frac{d}{dt}\left(x_1^2(t) + x_2^2(t)\right) = 2x_1\left(x_2 + x_1^3\right) + 2x_2\left(-x_1 + x_2^3\right)$$

$$= 2\left(x_1^4 + x_2^4\right) \ge 0 \quad \forall t$$ tedy vzdálenost

- roste bez omezení a ekvilib. je nestabilní

Oba systémy mají stejnou linearizaci

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1\end{aligned}$$

s vlastními čísly $\pm \boldsymbol{i}$ a stabilitu z ní nepoznáme.

Lyapunova funkce

- V předchozích příkladech jsme určovali stabilitu z toho, zda kvadrát vzdálenosti řešení od počátku s časem roste nebo klesá

$$d^2(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$$

Tuto myšlenku dál zobecníme:

- Uvažme systém $\dot{x} = f(x)$ s ekvilibriem x_0 a dále
- předpokládejme, že existuje funkce V taková, že

$V(x_0) = 0$

positivně def. $V(x) > 0,\ x \neq x_0$

neg.semidef. $V_x(x)\, f(x) \leq 0$ derivace podél trajektorie

kde $V_x(x) \overset{\text{def}}{=} [\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n}]$

V musí být spojitá a mít spojité derivace

- funkce splňující v nějakém okolí x_0 se nazývá Lyapunova
- má význam energie či zobec. vzdálenosti řešení x od bodu x_0
- s rostoucím časem klesá pro všechna řešení $\dot{x} = f(x)$, neboť

$$\frac{d}{dt} V\big(x(t)\big) = V_x(x)\dot{x}(t) = V_x\big(x(t)\big)\ f\big(x(t)\big) \leq 0$$

- pokud splňuje ještě další podmínky, slouží k různým testům stability nelineárních systémů
- podmínky jsou vždy postačující (najdeme vhodnou fci $\Rightarrow$ stabilita)
- hledáme vždy pro určitý systém, často je problém vhodnou fci najít

Stabilita a další podmínky na Lyapunovu f.

- pokud pro danou soustavu existuje Lyapunova funkce splňující ještě další podmínky, pak je soustava v nějakém smyslu stabilní
- různé další podmínky ➡ různé věty o stabilitě (postačující pod.)

Jestliže existuje Lyapunova funkce a navíc

bez dalších podmínek ➡ x_0 je (lokálně) Lyapunovsky stabilní

\+ $V_x(x)\,f(x) < 0, x \neq x_0$ ➡ x_0 je (lokálně) asymptoticky stabilní

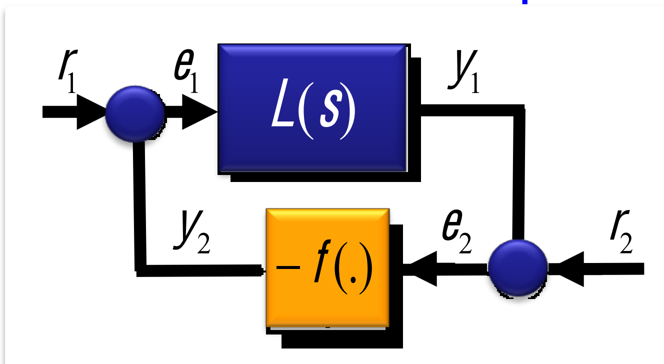
\+ $V_x(x)\,f(x) < 0, x \neq x_0$, $V(x) \to \infty, |x| \to \infty$ ➡ x_0 je globálně asymptoticky stabilní = celý systém je asymptoticky stab

apod. další varianty

Stabilita nelineárního ZV systému

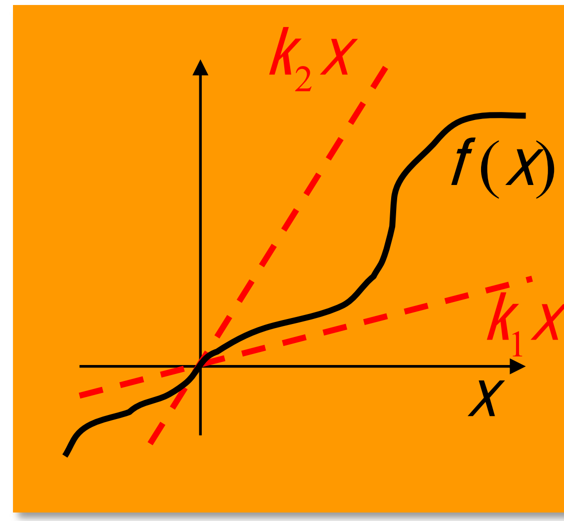
- Uvažme systém s nelinearitou ve zpětné vazbě

$$y_2 = -f(e_2)$$



- kde nelinearita splňuje podmínky

$$f(0)=0,\ \ k_1 \le \frac{f(x)}{x} \le k_2,\ x \neq 0,\ k_1 \ge 0,\ k_2 > 0$$



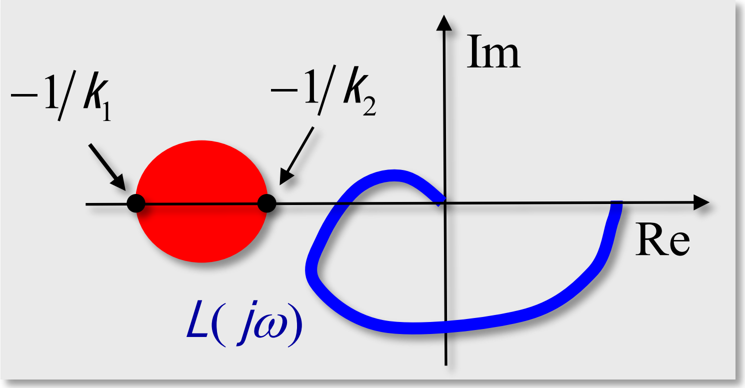
- pak platí obecnější verze Věty o malém zesílení
  ZV je stabilní jestliže L je stabilní a

$$k_2 \sup_{\omega} \left| L(j\omega) \right| < 1$$

- to je postačující podmínka, ale většinou moc konzervativní (protože je L často větší, aspoň pro některé frekvence)

Kruhové kritérium stability

- nakresleme Nyquistův graf $L(j\omega)$
- a k němu přikresleme kruh se středem na reálné ose, který prochází body $-1/k_1$ a $-1/k_2$



Věta – kruhové kriterium

Systém se

- Stabilním L
- nelinearitou splňující podmínky a takový, že
- Nyquistův graf $L(j\omega)$ neobkrouží kruh ani jím neprochází

je BIBO stabilní

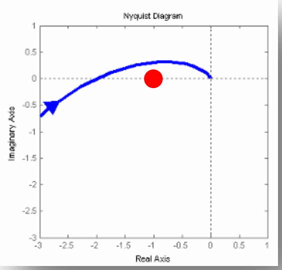
- Pokud je ještě L racionální a nesoudělný, pak je systém (jeho ekvilibrium v počátku) globálně asymptoticky stabilní
- podmínka je to jen postačující, nikoli nutná
- pro lineární f přechází v Nyquistovo kritérium stability
- k_1 může být 0

Oscilace nelineárních systémů

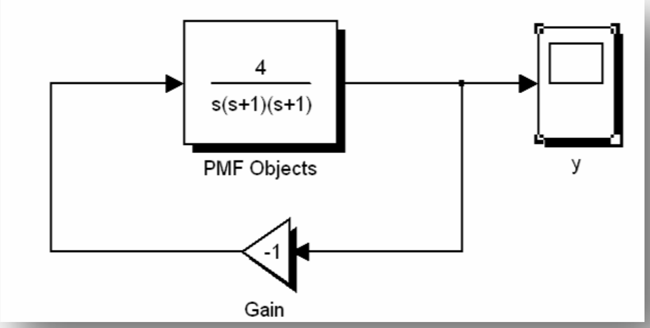
Oscilace

- Někdy se systém neustálí v ekvilibriu, ale navždy kmitá

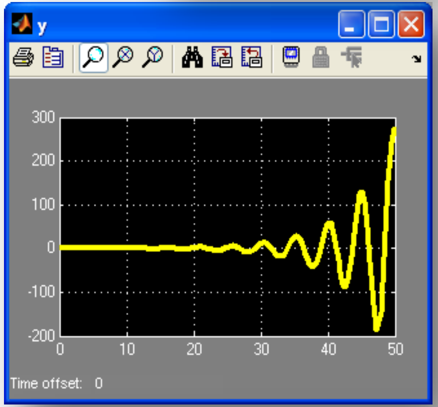
$$G(s)=\frac{4}{s(s+1)^2}$$



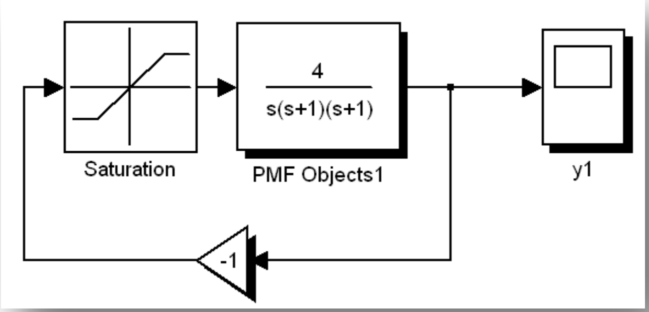
- Uvažme nejprve systém, který je bez nelinearity

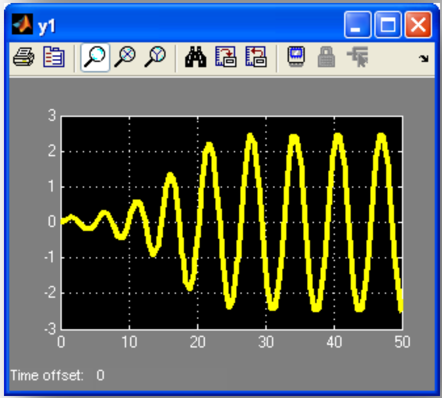


CL nestabilní



- Přidáním nelinearity typu saturace

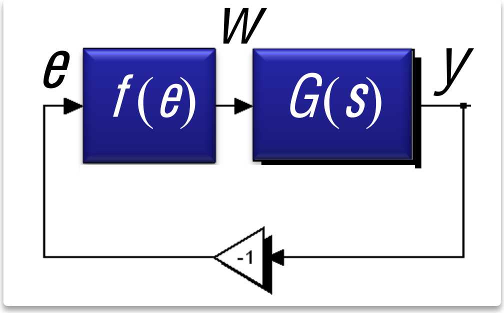




- vzniknou stabilní oscilace – jak to předem zjistit?

Metoda ekvivalentního přenosu

describing function method



- Lichá statická nelinearita + lineární dynamika
- Předpokládáme $e(t) = C\sin\omega t$
- na výstupu nelinearity pak je periodická funkce, rozvineme ve Fourierovu řadu

$$w(t) = f_0(C) + A(C)\sin(\omega t + \phi(C)) + A_2(C)\sin(2\omega t + \phi_2(C)) + \cdots$$

- koeficienty řady (tvar signálu uvnitř jedné periody) závisí na C, ale ne na ω (protože je nelinearita statická a ne dynamická))
- Uvažujeme jen první harmonickou (dynamická část odfiltruje vyšší a lichá nelinearita $\rightarrow$ $f_0(C) = 0$
- Nelinearitu nahradíme komplexním zesílením (ekvivalentním přenosem) závislým na amplitudě $Y_f(C) = \dfrac{b(C) + ia(C)}{C}$
- Ke kmitům dojde, když je OL přenos rovný jedné, tedy když

$$Y_f(C)G(j\omega) = -1$$

Ekvivalentní přenos

Systémy a řízení

- ekvivalentní přenos (describing function) nelinearity můžeme vyjádřit pomocí Fourierových koeficientů (pro periodu 2π)

$$Y_f(C) = \frac{b(C) + ia(C)}{C}$$

$$a(C) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(C\sin\alpha)\cos\alpha\, d\alpha = A(C)\sin\phi(C)$$

$$b(C) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(C\sin\alpha)\sin\alpha\, d\alpha = A(C)\cos\phi(C)$$

- obvykle nepočítáme, pro typické nelinearity vypočteny v tabulkách
- amplitudu a frekvenci možných oscilací získáme z rovnice

$$Y_f(C)\,G(j\omega) = -1 \Rightarrow G(j\omega) = \frac{-1}{Y_f(C)}$$

- Obvykle graficky
- Výsledek ověříme simulací: v závislosti na splnění předpokladů nemusí být přesný nebo nemusí existovat