

Doc. Ing. Jiří Melichar, CSc.:

LINEÁRNÍ SYSTÉMY 1

(Učební text)

KKY 2007

Obsah LS1:

ÚVOD

1. STAVOVÁ REPREZENTACE DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

1.1. Příklady stavového popisu reálných systémů	6
1.2. Rovnovážné a ustálené stavy dynamických systémů.....	12
1.3. Linearizace nelineárních dynamických systémů	13
1.4. Typy rovnovážných stavů LDS a průběh trajektorií systému	15
1.5. Stavový model LDS, řešení stavové rovnice	18
1.6. Vlastnosti spojitých lineárních dynamických systémů	20
1.7. Vstupně-výstupní ekvivalence lineárních dynamických systémů.....	25
1.8. Normální formy stavové reprezentace LDS	28

2. PŘENOSOVÁ FUNKCE SPOJITÝCH LDS

2.1. Laplaceova transformace	32
2.2. Přenosová funkce, základní pojmy, rozklad na parciální zlomky	33
2.3. Algebra blokových schémat	37
2.4. Přenosové funkce elementárních členů	41
2.5. Souvislosti mezi modely vnitřního a vnějšího popisu LDS.....	42

3. DYNAMICKÉ ODEZVY LDS

3.1. Časové odezvy LDS při vnitřním a vnějším popisu.....	47
3.2. Impulsní a přechodová funkce. Odezva na obecný vstupní signál	49
3.3. Frekvenční odezva LDS	56
3.4. Fourierova transformace. Frekvenční přenos.	60
3.5. Nyquistovy a Bodeho frekvenční charakteristiky	61
3.6. Frekvenční charakteristiky pro obecný tvar přenosu	68
3.7. Minimálně-fázové a neminimálně-fázové systémy	73

4. REGULAČNÍ OBVOD A STABILITA REGULAČNÍHO OBVODU

4.1. Struktura regulačního obvodu, přímovazební a zpětnovazební řízení.....	77
4.2. Přenosy v regulačním obvodu. Regulátory s jedním a dvěma stupni volnosti.....	79
4.3. Stabilita a kritéria stability regulačních obvodů.....	82
4.4. Robustnost ve stabilitě. Kritické zesílení, bezpečnost v zesílení a bezpečnost ve fázi.....	91
4.5. Metoda geometrického místa kořenů	94

5. DISKRÉTNÍ LINEÁRNÍ DYNAMICKÉ SYSTÉMY

5.1. Regulační obvod při diskrétním řízení spojitých LDS	99
5.2. Funkce diskrétní v čase	103
5.3. Laplaceova transformace funkcí diskrétních v čase. Z-transformace.....	104
5.4. Matematické modely pro vnější popis diskrétních LDS	107
5.5. Diskrétní stavový model spojitého LDS s tvarovačem 0.-řádu	110
5.6. Diskretizace spojitých přenosů na základě aproximace integrálu nebo derivace	112
5.7. Transformační vztah $z = e^{pT}$ a převedení pólů spojitého LDS na póly diskrétního LDS	114
5.8. Stavový model diskrétních LDS, explicitní řešení stavové rovnice, základní odezvy	111
5.9. Vlastnosti diskrétních LDS	117
5.10. Vzorkování spojitého signálu a Shannonova věta o rekonstrukci signálu	120

Doporučená a použitá literatura:

- Štecha J., Havlena V.: Teorie dynamických systémů, skr. ČVUT Praha, 1996
Havlena V., Štecha J.: Moderní teorie řízení, , skr. ČVUT Praha, 1999
Goodwin G.C., Graebe S., Salgado M.: Control System Design, Prentice-Hall 2000
Aström K.J., Wittenmark B.: Computer Controlled System: Theory and Design, Prentice-Hall 1997
Wolovich W.A.: Automatic Control Systems: Basic Analysis and Design, Saunders College Publishing 1994
Leigh J.R.: Applied Digital Control, Prentice Hall 1992

Obsah LS 2:

6. DETERMINISTICKÁ IDENTIFIKACE LDS

6.1. Lineární regrese a metoda nejmenších čtverců	5
---	---

7. POŽADAVKY NA REGULAČNÍ OBVOD A NÁVRHOVÁ OMEZENÍ

7.1. Stabilita a robustnost ve stabilitě, korekční články	8
7.2. Návrh diskretních korekčních článků	15
7.3. Přesnost regulace	19
7.4. Dynamický činitel regulace	20
7.5. Kmitavost uzavřené regulační smyčky	23
7.6. Citlivost uzavřené regulační smyčky na změnu parametrů řízeného systému	25
7.7. Tvarování frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky	25
7.8. Požadavky na kvalitu regulace v časové oblasti	28
7.9. Požadavky na kvalitu regulace v algebraické oblasti	29
7.10. Integrovaná omezení a dosažitelná kvalita regulace	30

8. ZÁKLADNÍ TYPY REGULÁTORŮ

8.1. Spojité PID (PI, PD) regulátory	35
8.2. Diskretní PID (PI, PD) regulátory	38
8.3. Obecný dynamický regulátor	39
8.4. Lineární stavový regulátor	39

9. KLASICKÉ METODY NÁVRHU REGULÁTORŮ

9.1. Empirické postupy při návrhu regulátorů	41
9.2. Návrh regulátorů dle požadavku na minimum integrálních kritérií kvality	43
9.3. Návrh regulátorů s využitím GMK	47
9.4. Návrh regulátorů dle požadovaného umístění pólů (nul) uzavřené regulační smyčky	53
9.5. Množina stabilizujících regulátorů, afinní parametrizace	58
9.6. Návrh regulátoru dle zadaného přenosu uzavřené regulační smyčky	70
9.7. Sledování obecného referenčního signálu a kompenzace poruch v ustáleném stavu („princip vnitřního modelu“)	73
9.8. Umístitelnost pólů lineárním stavovým regulátorem	75
9.9. Lineární stavový regulátor s integrací	78
9.10. Lineární stavový regulátor pro sledování obecného referenčního signálu a kompenzaci poruch v ustáleném stavu	79
9.11. Lineární stavový regulátor pro konečný počet kroků regulace	81
9.12. Dynamický regulátor pro řízení skokové odezvy polohového servosystému s konečným počtem kroků regulace	83
9.13. Návrh regulátorů pro LDS s dopravním zpožděním – Smithův prediktor	88

10. DETERMINISTICKÁ REKONSTRUKCE STAVU

10.1. Lineární asymptotický rekonstruktor stavu	91
10.2. Redukovaný rekonstruktor stavu (Luenbergerův, minimální)	94
10.3. Lineární stavový regulátor s rekonstruktoru stavu (dynamický kompenzátor)	97
10.4. Dynamický kompenzátor v regulačních úlohách	98

11. NELINEÁRNÍ DYNAMICKÉ SYSTÉMY

11.1. Matematické modely nelineárních dynamických systémů	102
11.2. Metoda harmonické linearizace	103
11.3. Reléové regulační obvody	106
11.4. Ljapunovova teorie stability	109
11.5. Analýza stability LDS – Ljapunovy rovnice	112

Doporučená a použitá literatura:

- Štecha J., Havlena V.: Teorie dynamických systémů, skr. ČVUT Praha, 1996
Havlena V., Štecha J.: Moderní teorie řízení, , skr. ČVUT Praha, 1999
Goodwin G.C., Graebe S., Salgado M.: Control System Design, Prentice-Hall 2000
Aström K.J., Wittenmark B.: Computer Controlled System: Theory and Design, Prentice-Hall 1997
Wolovich W.A.: Automatic Control Systems: Basic Analysis and Design, Saunders College Publishing 1994
Leigh J.R.: Applied Digital Control, Prentice Hall 1992

ÚVOD

Předkládané učební texty k předmětům Lineární systémy 1,2 jsou určeny především studentům bakalářského a magisterského studijního programu Aplikované vědy a informatika (AVI), obor Kybernetika a řídicí technika, ale i studentům jiných technických oborů, kteří získali základní znalosti z matematické analýzy (lineární algebra, lineární diferenciální rovnice), z teorie systémů a jsou seznámeni s programovým prostředím Matlab-Simulink.

Tématické okruhy přednášené látky se zabývají analýzou a návrhem systémů automatického řízení s omezením na deterministické spojité a diskrétní lineární dynamické systémy, obvykle s jedním vstupem a jedním výstupem (SISO systémy).

V první kapitole je věnována pozornost problematice určení matematického modelu reálného dynamického systému na základě matematicko-fyzikálního modelování. Na typických příkladech reálných systémů je ukázáno, že získaný model je obvykle popsán nelineární diferenciální rovnicí vyššího řádu nebo soustavou takových rovnic (lineární model je spíše akceptovatelnou idealizací), tedy modelem vnějšího popisu. Vhodnou volbou stavových proměnných lze přejít na model vnitřního popisu a získat tak obecně nelineární stavovou reprezentaci jako soustavu nelineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Teprve po určení rovnovážných či ustálených stavů nelineárního dynamického systému (NDS), lze v jejich okolí provést linearizaci a získat lokální, aproximativní model v podobě stavové reprezentace lineárního dynamického systému (LDS). Stavové reprezentaci a vlastnostem LDS (stabilita, říditelnost, dosažitelnost, pozorovatelnost, rekonstruovatelnost, stabilizovatelnost, detekovatelnost, ekvivalence, dualita a j.) je věnována zbylá část kapitoly.

Použití Laplaceovy transformace ve druhé kapitole umožňuje zavést pojem přenosová funkce LDS, která vedle diferenciální rovnice je dalším modelem vnějšího popisu. Řešení diferenciálních rovnic je nahrazeno řešením algebraických rovnic, problémy analýzy i syntézy přechází do algebraické oblasti a je ukázáno, že algebra blokových schémat je účinným nástrojem pro zjednodušování složitých systémů či naopak pro vytvoření složitějších systémů z jednodušších. V této kapitole jsou vysvětleny nově zavedené pojmy (nuly, póly, časové konstanty, zesílení aj.), jsou analyzovány přenosové funkce elementárních členů a uvedeny vzájemné souvislosti modelů vnějšího a vnitřního popisu LDS.

Ve třetí kapitole je analýza systémů rozšířena do frekvenční oblasti použitím Fourierovy transformace a definováním frekvenčního přenosu LDS. Jsou zde zkoumány časové odezvy na typové vstupní signály pro modely vnitřního i vnějšího popisu LDS, impulsní a přechodové funkce (a charakteristiky) elementárních členů a použití konvoluce pro výpočet odezvy na obecný vstupní signál. Podrobně je zkoumána frekvenční odezva LDS na harmonický vstupní signál, frekvenční charakteristiky v komplexní rovině (Nyquist) a v logaritmických souřadnicích (Bode) a to pro elementární členy i pro obecný tvar přenosu.

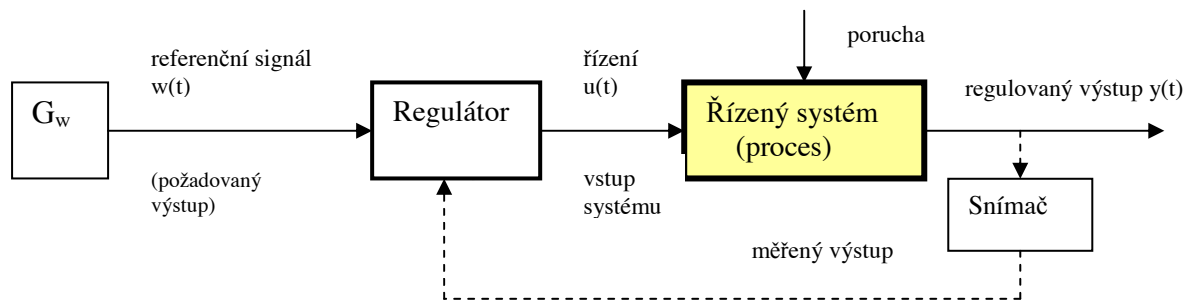
Ve čtvrté kapitole jsou uvedeny základní struktury spojených regulačních obvodů používané v regulačních úlohách a při kompenzaci poruch, je vysvětlena funkce přímovazebního a zpětnovazebního řízení a význam regulátorů s jedním a dvěma stupni volnosti. Dále je analyzována stabilita a chování uzavřené regulační smyčky na základě vlastností otevřené regulační smyčky a to ve frekvenční oblasti (Nyquistovo kritérium stability) a v algebraické oblasti (geometrické místo kořenů - GMK).

Pátá kapitola je věnována diskrétním LDS a problémům číslicového (diskrétního) řízení spojených systémů. Výklad vychází ze struktury a funkce regulačního obvodu při číslicovém řízení spojených systémů a z problému vzorkování. Po zavedení Z-transformace jsou specifikovány modely vnějšího a vnitřního popisu diskrétních LDS a uvedeny vzájemné souvislosti se spojitými modely. Při analýze vlastností diskrétních LDS je upozorněno zejména na odlišnosti od spojitých systémů. Z hlediska budoucího návrhu číslicových regulátorů sleduje přednášená látka dva základní přístupy k syntéze – návrh spojitého regulátoru a jeho následná diskretizace a přímý návrh číslicového regulátoru.

1. STAVOVÁ REPREZENTACE DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

Primární funkcí prakticky každého řídicího systému (regulátoru) je regulovat chování jedné či více proměnných (regulovaných výstupů) na reálném řízeném systému či procesu tak, aby bylo dosaženo nějakých předem daných požadavků a to při současném respektování specifikovaných omezení a realizovatelnosti řídicího systému.

Řízený reálný systém či proces má jeden nebo více vstupů, na které lze působit řízením a následně docílit požadované změny chování regulovaných veličin. Řízení generuje jako svůj výstup regulátor a požadované chování je mu zadáváno v podobě referenčního signálu, jehož průběh by měl být sledován regulovanou veličinou. V případě, že je k dispozici přesný matematický model řízeného systému a jeho okolí a vylučujeme výskyt jakékoliv neurčitosti, lze požadovaného chování docílit výpočtem *přímovazebního řízení*, které je charakteristické tím, že regulátor nevyužívá zpětnou informaci o skutečném průběhu regulovaných veličin a vstupem regulátoru je pouze referenční signál. V reálných situacích je však nějaká forma neurčitosti vždy přítomna (matematický model řízeného systému není přesným modelem chování reálného systému, výskyt náhodných poruch, změny parametrů aj.), a proto dáváme přednost návrhu *zpětnovazebního řízení*, kdy regulátor kromě referenčního signálu využívá také informaci o skutečném průběhu regulovaných veličin a může tak reagovat na nežádoucí změny způsobené neurčitostí.



Přímovazební a zpětnovazební řízení

Návrh přímovazebního či zpětnovazebního řízení tedy předpokládá důkladnou znalost funkce a chování *reálného řízeného systému*, které musí být podchyceny vytvořením adekvátního *matematického modelu reálného řízeného systému*.

Matematický model reálného systému lze určit dvěma způsoby (nebo jejich kombinací):

a/ *matematicko-fyzikálním modelováním* (model je odvozen s využitím znalosti fyzikálních zákonů - lze určit strukturu i parametry modelu)

b/ *experimentálně* (obvykle zvolíme strukturu matematického modelu, reálný systém vybudíme vhodným testovacím signálem a nějakou identifikační metodou identifikujeme parametry modelu s využitím souboru naměřených vstupních a výstupních dat)

Použití matematicko-fyzikálního modelování vede obvykle na matematický model vnějšího popisu, který popisuje účinek vybrané vstupní veličiny na reálném systému $u(t)$ na dynamické chování vybrané výstupní veličiny $y(t)$.

Spojité model může být v idealizovaném případě popsán lineární diferenciální rovnicí vyššího řádu s konstantními parametry

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_0u(t); \quad m \leq n, \quad (1.1)$$

nebo obecněji nelineární diferenciální rovnicí

$$y^{(n)}(t) = f[y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(m)}(t)]; \quad f(\dots) \dots \text{nelineární funkce}, \quad (1.2)$$

přičemž stupeň nejvyšší derivace n určuje řád dynamického modelu.

Vhodnou volbou stavových (vnitřních) proměnných $x_1(t), \dots, x_n(t)$ lze uvedené rovnice převést na soustavu n lineárních či nelineárních diferenciálních rovnic prvního řádu a získat tak stavové rovnice spolu s nedyamickou rovnicí pro sledovaný výstup systému, který je obecně funkcí

vnitřních proměnných a vstupu systému. Přejít tak na model vnitřního neboli stavového popisu, pro který používáme název stavová reprezentace dynamického systému.

Stavovou reprezentaci lineárního dynamického systému n-tého řádu s jedním vstupem a jedním výstupem zapisujeme obvykle v maticovém tvaru

$$S: \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ b \end{bmatrix} u(t); \quad \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} \dots \text{vektor počátečního stavu} \quad (1.3)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + du(t)$$

kde A, b, c^T, d jsou matice odpovídajících rozměrů s konstantními parametry, přičemž jejich konkrétní specifikace závisí na volbě stavových proměnných.

Stavovou reprezentaci nelineárního dynamického systému n-tého řádu s jedním vstupem a jedním výstupem zapisujeme ve tvaru

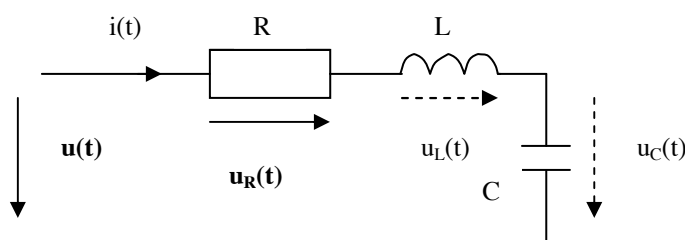
$$S: \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1[x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)] & x_1(t_0), \dots, x_n(t_0) & \text{jsou počáteční podmínky,} \\ \vdots & \vdots & f_1(\cdot), \dots, f_n(\cdot) & \text{a } h(\cdot) \text{ jsou obecně nelineární} \\ \dot{x}_n(t) &= f_n[x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)] & & \text{funkce stavových proměnných a vstupu.} \\ \dots & \dots & & \\ y(t) &= h[x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)] & & \end{aligned} \quad (1.4)$$

Poznamenejme, že prakticky všechny reálné systémy jsou nelineární, ale jednoduchá a účinná metodika analýzy systémů a návrhu řídicích systémů je vypracována zejména pro lineární dynamické systémy. Je tedy přirozenou snahou získat nějakou linearizační metodou lineární model i pro nelineární dynamické systémy, byť za cenu jeho omezené platnosti.

1.1. Příklady stavového popisu reálných systémů

Postup při určování stavových modelů lineárních a nelineárních dynamických systémů na základě matematicko-fyzikálního modelování ukážeme na několika typických příkladech reálných systémů.

a) Jednoduchý RLC obvod



R, L, C... odpor, indukčnost, kapacita (konstantní parametry)
 $u(t)$... vstup (vstupní napětí)
 $u_R(t), u_L(t), u_C(t)$... napětí na impedancích
 $u_R(t)$... definovaný výstup $y(t)$
 $i(t)$... proud v obvodu
 Předpokládáme nulové počáteční podmínky

Z Kirchhoffova zákona $\sum_i u_i(t) = 0$ vyplývá základní vztah

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = u(t) \quad (1.5)$$

Po formální derivaci dostáváme lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními parametry

$$\frac{di^2(t)}{dt} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L} \frac{du(t)}{dt} \quad (1.6)$$

Uvedli jsme, že vhodnou volbou stavových proměnných lze rovnici převést na dvě diferenciální rovnice 1. řádu a získat tak stavový model LDS. Z matematického hlediska není převod jednoznačný, z praktického hlediska je při volbě stavových proměnných žádoucí vzít do úvahy např. jejich jednoduchou fyzikální interpretaci a měřitelnost.

Použijeme-li např. metodu snižování řádu derivace, lze rovnici (1.6) upravit do tvaru

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{L}u(t) \right] + \frac{1}{LC}i(t) = 0 \quad (1.7)$$

Volbou stavových proměnných $x_1(t) = i(t)$ a $x_2(t) = \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{L}u(t)$ obdržíme po úpravě

stavové rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -\frac{R}{L}x_1(t) + x_2(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -\frac{1}{LC}x_1(t) \end{aligned}$$

a výstupní rovnici:

$$y(t) = Rx_1(t) \quad (1.8)$$

V maticovém zápisu LDS zjistíme odpovídající tvar matic A, b, c^T s konstantními parametry:

$$S(A, b, c^T): \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 1 \\ -\frac{1}{LC} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \quad y(t) = [R \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

V daném případě byla volba stavové proměnné $x_2(t)$ provedena z matematických důvodů. Z praktického hlediska není proměnná $x_2(t)$ ani dobře fyzikálně interpretovatelná ani jednoduše měřitelná, a proto volbu $x_2(t)$ změňme. Ponecháme $x_1(t) = i(t)$ a jako druhou stavovou proměnnou zvolíme napětí na kondenzátoru $x_2(t) = u_c(t) = \frac{1}{C} \int idt$.

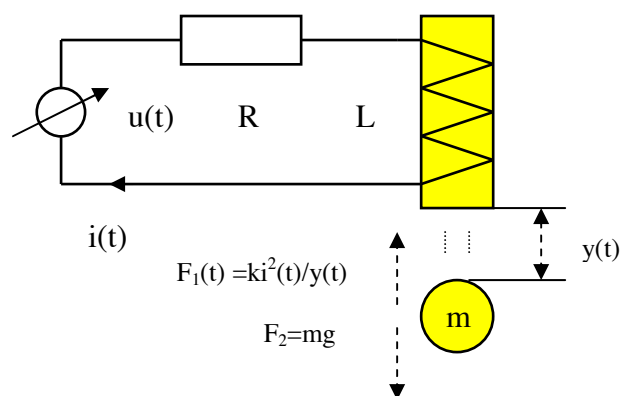
Dosazením do základního vztahu (1.5) dostaneme po úpravě stavovou reprezentaci LDS ve tvaru

$$S(A, b, c^T): \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \quad y(t) = [R \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Stavové reprezentace LDS (1.9) a (1.10) byly odvozeny ze stejné diferenciální rovnice a jsou tedy ekvivalentní z hlediska vstupně-výstupního chování daného systému - časový průběh stavových (vnitřních) veličin bude ovšem odlišný.

b/ Levitace kuličky v magnetickém poli

Řízení polohy kuličky v magnetickém poli je jednoduchou demonstrací principu využívaného v praxi u motorů s hřídelem „uloženým v magnetickém poli“ (tzv. magnetická ložiska).



- $u(t)$... řízený zdroj napětí (proudu), **vstup systému**
- R odpor vinutí cívky elektromagnetu
- L indukčnost vinutí cívky elektromagnetu
- m ... hmota kuličky
- $i(t)$... proud vinutím
- $y(t)$... poloha kuličky, **výstup systému**
- $F_1(t)$... přitažná síla elektromagnetu
- F_2 gravitační síla
- g gravitační zrychlení, k ... konstanta

Akceptovaná zjednodušení při tvorbě modelu:
 neuvažujeme odpor vzduchu, předpokládáme nezávislost indukčnosti L na protékajícím proudu

Kombinací Kirchhoffova a Newtonova zákona dostaneme vzájemně provázané rovnice,

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = u(t) \qquad m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = mg - \frac{ki^2(t)}{y(t)} \qquad (1.11)$$

kteří lze převést na nelineární diferenciální rovnici třetího řádu. Stavový model popisující řízenou levitaci kuličky bude tedy nelineárním dynamickým systémem třetího řádu.

Volbou stavových proměnných $x_1(t) = i(t)$; $x_2(t) = y(t)$; $x_3(t) = \dot{y}(t)$ dostaneme stavové rovnice

$$\begin{aligned} \text{stavové rovnice:} \quad \dot{x}_1(t) &= -\frac{R}{L}x_1(t) + \frac{1}{L}u(t) \dots\dots\dots = f_1(x_1, x_2, x_3, u) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \dots\dots\dots = f_2(x_1, x_2, x_3, u) \\ \dot{x}_3(t) &= -\frac{kx_1^2(t)}{mx_2(t)} + g \dots\dots\dots = f_3(x_1, x_2, x_3, u) \end{aligned} \qquad (1.12)$$

$$\text{a výstupní rovnici:} \quad y(t) = x_2(t) \dots\dots\dots = g(x_1, x_2, x_3, u) \qquad (1.13)$$

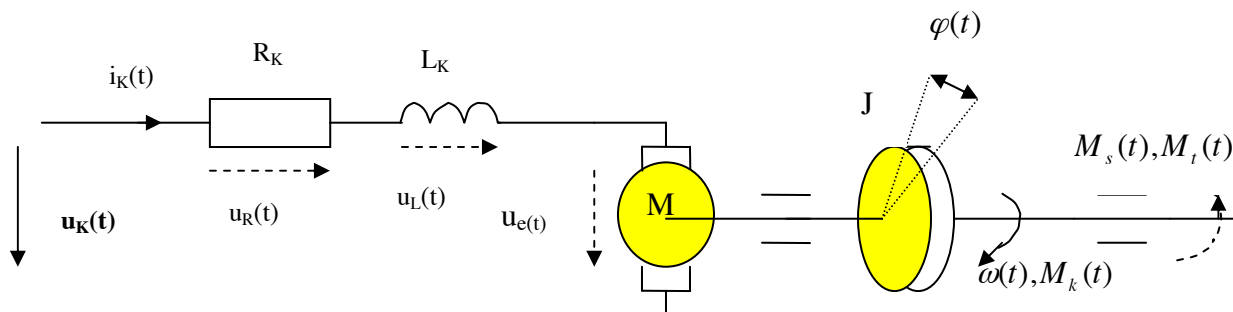
Poznamenejme, že přesnější nelineární model bychom získali respektováním skutečnosti, že indukčnost cívky na magnetickém jádře je nelineární funkcí protékajícího proudu $L = L[i(t)]$

a první rovnice by byla rovněž nelineární diferenciální rovnicí.

c/ Stejnoseměrný motor řízený do kotvy

S řízením rychlosti otáček či úhlu natočení hřídele (polohy) stejnosměrného motoru se setkáváme v nejrůznějších aplikacích, neboť stejnosměrný motor je velmi často používaný akční orgán, je používán jako pohonná jednotka - ať již pro rotační či translační pohyb, tvoří základní část servomechanismů a pod.

Jeho matematický model odvodíme za zjednodušujících (většinou akceptovatelných) předpokladů linearitu všech funkcí vystupujících v jeho popisu – viz schéma:



Označení:

R_K, L_K ... odpor a indukčnost vinutí kotvy (konstantní parametry)

$u_k(t)$... vstup (napětí přiváděné do kotvy motoru), $i_k(t)$... proud kotvy

$u_R(t), u_L(t)$... úbytky napětí na impedancích kotvy, $u_e(t) = k_e \omega(t)$... napětí vzniklé v důsledku rotace kotvy

$\omega(t), \varphi(t)$... úhlová rychlost otáčení hřídele motoru, úhel natočení hřídele motoru - **definované výstupy y(t)**

J ... moment setrvačnosti rotoru (zátěže)

$M_k(t) = k_M i_k(t)$... krouticí moment motoru (přepokládáme lineární závislost na proudu kotvy; k_M je konst.)

$M_s(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$... setrvačný moment

$M_t(t) = b\omega(t)$... třecí moment (přepokládáme lineární závislost na ω ; b je konstanta viskózního tření)

Diferenciální rovnice popisující chování stejnosměrného motoru získáme z Kirchhoffova zákona, ze známého vztahu pro úhlovou rychlost otáčení $\omega(t) = d\varphi(t)/dt$ a z rovnováhy momentů ($\sum_i M_i = 0$). Jinak řečeno, krouticí (hnací) moment motoru $M_k(t)$ se v každém časovém okamžiku „spotřebovává“ na setrvačný moment $M_s(t)$ a třecí (brzdňý) moment $M_t(t)$.

$$L_K \frac{di_K(t)}{dt} + R_K i_K(t) = u_K(t) - k_e \omega(t); \quad J \frac{d\omega(t)}{dt} + b \omega(t) = k_M i_K(t); \quad \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega(t) \quad (1.14)$$

Budeme-li definovat výstup systému jako úhlovou rychlost $y(t) = \omega(t)$, nepotřebujeme třetí rovnici a po vyloučení vnitřní proměnné $i_K(t)$ lze model systému popsat jedinou lineární diferenciální rovnicí druhého řádu.

Pokud budeme definovat výstup systému jako úhel natočení hřídele $y(t) = \varphi(t)$, lze po vyloučení vnitřních proměnných $i_K(t)$, $\omega(t)$ popsat model systému jedinou lineární diferenciální rovnicí třetího řádu. V obou případech je za vstup systému považováno napětí na kotvě $u_K(t)$.

Volbou měřitelných stavových proměnných $x_1(t) = i_K(t)$, $x_2(t) = \omega(t)$, $x_3(t) = \varphi(t)$ lze upravit rovnice (1.14) a získat příslušné stavové reprezentace LDS druhého resp. třetího řádu.

Výstupem je úhlová rychlost $y(t) = \omega(t)$:

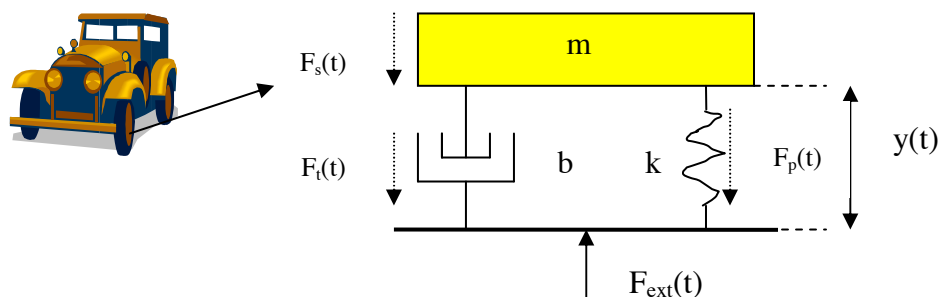
$$S(A,b,c^T): \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_K}{L_K} & -\frac{k_e}{L_K} \\ \frac{k_M}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_K} \\ 0 \end{bmatrix} u_K(t); \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Výstupem je úhel natočení hřídele motoru $y(t) = \varphi(t)$:

$$S(A,b,c^T): \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_K}{L_K} & -\frac{k_e}{L_K} & 0 \\ \frac{k_M}{J} & -\frac{b}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_K} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_K(t); \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

d/ Jednoduchý tlumič

Jako příklad dynamického chování mechanické soustavy uvažujme zjednodušený model pérování nápravy automobilu dle uvedeného schéma. Za vstup systému považujeme externí sílu vyvozanou na nápravu v důsledku jízdy po nerovné podložce, výstupem je vzdálenost karoserie od podložky (silnice).



Označení:

$F_{ext}(t)$... vstup systému (externí síla); $y(t)$... výstup systému (vzdálenost karoserie od podložky)

m ... hmota karoserie; k ... konstanta pružiny; b ... konstanta viskózního tření

$F_s(t) = m \frac{d^2y(t)}{dt^2}$... setrvačná síla; $F_p(t) = k \cdot y(t)$... síla pružiny; $F_t(t) = b \cdot \dot{y}(t)$... třecí síla

Poznámka: Za těchto předpokladů získáme lineární model, obecně však síla pružiny resp. třecí síla mohou být nelineární funkce $F_p(t) = \varphi[y(t)]$ resp. $F_t(t) = \psi[\dot{y}(t)]$.

Z rovnováhy sil ($\sum_i F_i = 0$) dostáváme lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F_{ext}(t) \quad (1.17)$$

Volbou stavových proměnných $x_1(t) = y(t)$; $x_2(t) = \dot{y}(t)$ (měření polohy a rychlosti) dostáváme stavové rovnice

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{b}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}F_{ext}(t)$$

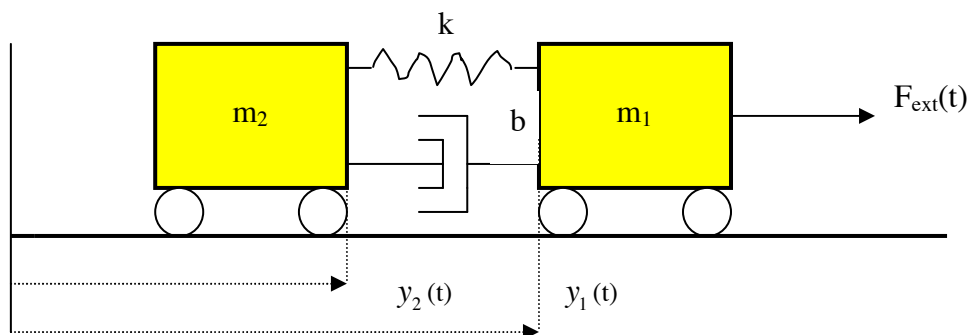
a výstupní rovnici $y(t) = x_1(t)$ (1.18)

V maticovém zápisu dostáváme hledaný model jako stavovou reprezentaci LDS 2. řádu

$$S(A,b,c^T): \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F_{ext}(t); \quad y(t) = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

e/ Vozová souprava

Model dynamického chování vozové soupravy je rozšířenou aplikací použití tlumiče při spojení dvou hmotných těles. Vstupem systému je opět externí síla $F_{ext}(t)$, za výstup můžeme považovat například vzdálenost mezi vozidly $y(t) = y_2(t) - y_1(t)$. Ostatní označení a předpoklady (lineární závislost síly pružiny a třecí síly) ponecháváme stejné jako v předchozím příkladu.



Z rovnováhy sil dostaneme dvě vzájemně vázané lineární diferenciální rovnice druhého řádu.

Pro vůz s hmotností m_1 : $m_1 \ddot{y}_1(t) = -k[y_1(t) - y_2(t)] - b[\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)] + F_{ext}(t)$

Pro vůz s hmotností m_2 : $m_2 \ddot{y}_2(t) = k[y_1(t) - y_2(t)] + b[\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)]$ (1.20)

Jako stavové proměnné zvolíme jednoduše měřitelnou polohu a rychlost jednotlivých vozů $x_1(t) = y_1(t)$; $x_2(t) = \dot{y}_1(t)$; $x_3(t) = y_2(t)$; $x_4(t) = \dot{y}_2(t)$ a rovnice převedeme na čtyři lineární diferenciální rovnice 1. řádu .

Získáme stavové rovnice $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m_1}x_1(t) + \frac{k}{m_1}x_3(t) - \frac{b}{m_1}x_2(t) + \frac{b}{m_1}x_4(t) + \frac{1}{m_1}F_{ext}(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = \frac{k}{m_2}x_1(t) - \frac{k}{m_2}x_3(t) + \frac{b}{m_2}x_2(t) - \frac{b}{m_2}x_4(t)$$

a výstupní rovnici $y(t) = x_1(t) - x_3(t)$ (1.21)

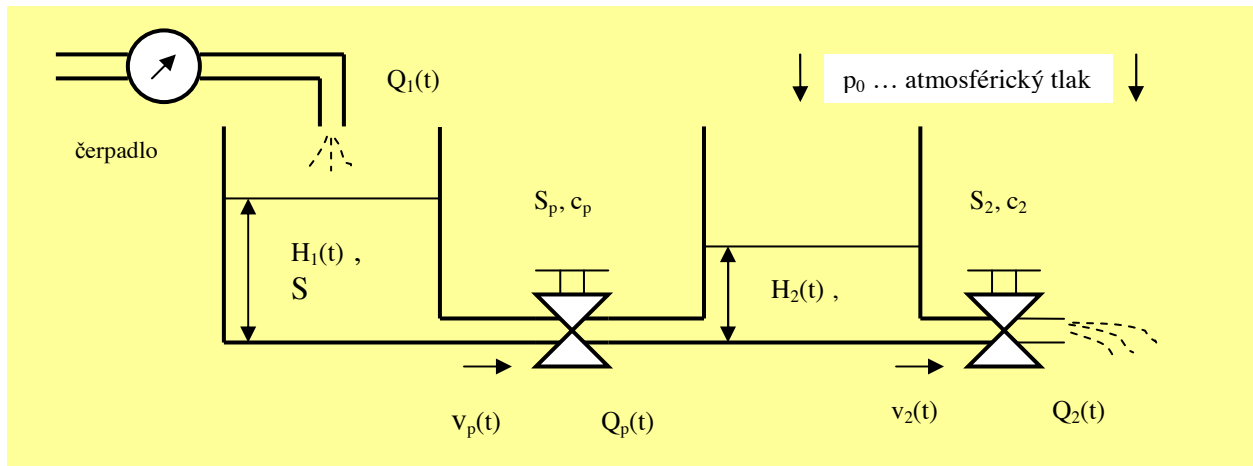
V maticovém zápisu dostáváme hledaný model jako stavovou reprezentaci LDS 4. řádu

$$S(A, b, c^T): \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k/m_1 & -b/m_1 & k/m_1 & b/m_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k/m_2 & b/m_2 & -k/m_2 & -b/m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{ext}(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

f/ Soustava propojených nádrží

S požadavkem na řízení přítoku kapaliny do soustavy propojených nádrží za účelem regulace výšky hladin se setkáváme v praxi poměrně často, a proto jako poslední ilustrativní příklad určíme matematický model dynamiky změn výšky hladin v závislosti na přítoku kapaliny do soustavy propojených nádrží a při volném odtoku kapaliny do atmosféry (viz obr.):



Označení:

$Q_1(t)$...přítokové množství kapaliny [m^3/sec] - **vstup**; $Q_p(t)$...průtokové množství; $Q_2(t)$...výtokové množství
 $H_1(t), H_2(t)$... výšky hladin, za **výstup** systému zvolíme např. výšku hladiny v druhé nádrži $y(t) = H_2(t)$.

$v_p(t)$ resp. $v_2(t)$... průtoková resp. výtoková rychlost kapaliny [m/sec]

S ...plocha nádrží [m^2]; S_p resp. S_2 průřez průtokového resp. výtokového potrubí [m^2]

c_p, c_2 ... rychlostní součinitel; ρ ... měrná hustota kapaliny; g ... gravitační zrychlení

Označíme-li $V_1(t)$ resp. $V_2(t)$ objem kapaliny v první resp. druhé nádrži, můžeme psát

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = S \frac{dH_1(t)}{dt} = Q_1(t) - Q_p(t); \quad \frac{dV_2(t)}{dt} = S \frac{dH_2(t)}{dt} = Q_p(t) - Q_2(t) \quad (1.23)$$

přičemž průtokové resp. výtokové množství kapaliny lze vyjádřit pomocí průtokové resp. výtokové rychlosti kapaliny

$$Q_p(t) = c_p S_p v_p(t) \quad \text{a} \quad Q_2(t) = c_2 S_2 v_2(t) \quad (1.24)$$

Rychlosti proudění kapaliny $v_p(t)$ a $v_2(t)$ lze určit na sledované proudnici z Bernoulliho zákona (součet atmosférického, hydrostatického a hydrodynamického tlaku je konstantní).

$$\text{Průtokový ventil: } p_0 + \rho g H_1(t) = p_0 + \rho g H_2(t) + \frac{1}{2} \rho v_p^2(t) \Rightarrow v_p(t) = \sqrt{2g[H_1(t) - H_2(t)]}$$

$$\text{Výtokový ventil: } p_0 + \rho g H_2(t) = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2(t) \Rightarrow v_2(t) = \sqrt{2gH_2(t)} \quad (1.25)$$

Po dosazení (1.25) do (1.24) a následně (1.24) do (1.23) dostaneme dvě nelineární diferenciální rovnice prvního řádu, které můžeme považovat za stavové rovnice.

Reálný systém lze tedy popsat matematickým modelem ve tvaru *nelineárního* dynamického systému 2. řádu se stavovými proměnnými $H_1(t)$, $H_2(t)$ a s lineární výstupní rovnicí.

$$S: \begin{aligned} \frac{dH_1(t)}{dt} &= -\frac{1}{S} c_p S_p \sqrt{2g[H_1(t) - H_2(t)]} + \frac{1}{S} Q_1(t) \dots\dots\dots = f_1[H_1(t), H_2(t), Q_1(t)] \\ \frac{dH_2(t)}{dt} &= \frac{1}{S} c_p S_p \sqrt{2g[H_1(t) - H_2(t)]} - \frac{1}{S} c_2 S_2 \sqrt{2gH_2(t)} \dots\dots\dots = f_2[H_1(t), H_2(t)] \\ y(t) &= [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.26)$$

1.2. Rovnovážné a ustálené stavy dynamických systémů

Uvažujme nejprve lineární t-invariantní dynamický systém n – tého řádu

$$LDS: \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) ; x(t_0) = x_0, x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^p, m, p \leq n$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.27)$$

Rovnovážné stavy $x_r \in R^n$ definujeme jako stavy neřízeného systému ($u(t) \equiv 0, \forall t$) ve kterých ustává veškerý pohyb v dynamickém systému, což lze vyjádřit podmínkou nulové časové derivace vektoru stavu $\dot{x}(t) \Big|_{x=x_r} = 0$.

Rovnovážné stavy LDS jsou tedy určeny řešením lineární homogenní soustavy rovnic $Ax_r = 0$.

Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení:

- Je-li hodnota matice dynamiky rovna dimenzi vektoru stavu $h(A) = n$, potom existuje *jediné triviální řešení* $x_r = 0$.
- Je-li hodnota matice dynamiky menší než dimenze vektoru stavu $h(A) = k < n$, potom existuje *nekonečně mnoho řešení* x_r , z nichž lze nekonečně mnoha způsoby vybrat $n - k$ řešení lineárně nezávislých (matice A není regulární např. u systémů s astatismem).

Poznámka: Z matematického hlediska je rovnovážný stav x_r singulárním bodem řešení stavových rovnic. Tímto bodem procházejí (nebo zůstávají v jeho okolí) všechny trajektorie $x(t)$. Každým jiným bodem stavového prostoru prochází právě jedna trajektorie $x(t)$.

Za ustálené stavy („pracovní body“) $x_r \in R^n$ budeme považovat rovnovážné stavy systému při konstantním řízení $u(t) \equiv u_{konst.} \neq 0, \forall t$.

Ustálené stavy LDS jsou tedy určeny vztahem $x_r = -A^{-1}Bu_{konst.}$ (pro regulární matici A).

Z výstupní rovnice LDS vyplývá i existence rovnovážného či ustáleného výstupu $y_r = Cx_r$.

Uvažujme nyní nelineární t – invariantní dynamický systém n – tého řádu

$$NDS: \dot{x}(t) = f[x(t), u(t)] ; x(t_0) = x_0, x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^p, m, p \leq n$$

$$y(t) = h[x(t), u(t)] \quad f[\cdot], h[\cdot] \dots \text{dané nelineární (vektorové) funkce} \quad (1.28)$$

Definice rovnovážných a ustálených stavů x_r či výstupů y_r zůstává v platnosti i pro NDS:

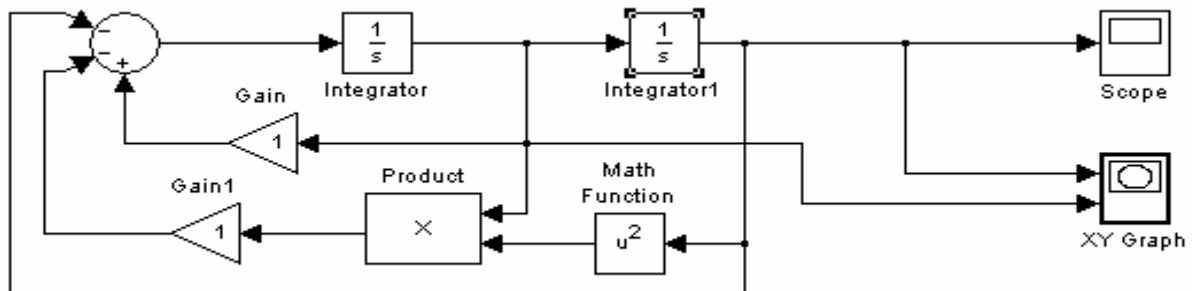
Rovnovážné stavy x_r jsou dány řešením $0 = f[x_r, 0]$, rovnovážný výstup $y_r = h[x_r, 0]$
 Ustálené stavy x_r jsou dány řešením $0 = f[x_r, u_{konst.}]$, ustálený výstup $y_r = h[x_r, u_{konst.}]$ (1.29)

Nelineární dynamický systém může mít *jeden nebo více rovnovážných stavů* a navíc může vzniknout i jeden nebo více rovnovážných stavů nazývaných **„izolované mezní cykly“**. Jsou to periodická řešení nelineární diferenciální rovnice, která mohou nastat pouze při určitých počátečních podmínkách (netvoří kontinuum) a nevyskytují se u LDS. Ve stavovém prostoru se mezní cykly projevují jako uzavřené křivky, v časové oblasti jako periodické funkce. Mezní cykly mohou být stabilní (trajektorie vycházející z počátečních podmínek v nějaké oblasti stavového prostoru konvergují k meznímu cyklu), nestabilní (trajektorie z libovolně malého okolí mezního cyklu divergují) a polostabilní (trajektorie mezní cyklus přecházejí).

Jako příklad ilustrující existenci stabilního mezního cyklu bývá často uváděna Van der Polova rovnice

$$\ddot{y}(t) + 3[y^2(t) - 1]\dot{y}(t) + y(t) = 0 ; \quad y(0), \dot{y}(0) \dots \text{počáteční podmínky}$$

Na simulačním schéma stavové reprezentace tohoto neřízeného nelineárního dynamického systému lze ověřit existenci stabilního mezního cyklu pro libovolné počáteční podmínky (ověření ponecháváme na čtenáři).



1.3. Linearizace nelineárních dynamických systémů

I když dynamické chování většiny fyzikálních systémů je nelineárního charakteru, mnoho z těchto systémů se chová „téměř lineárně“ při malých změnách systémových proměnných. Nabízí se tak možnost nahradit model nelineárního dynamického systému jeho linearizovaným modelem, získaným linearizací stavové a výstupní rovnice NDS v okolí jednoho či více rovnovážných nebo ustálených stavů – „pracovních bodů“. Jedná se tedy o *lokální aproximativní linearizaci* NDS. Pokud budou vlastnosti NDS odvozovány z jeho linearizovaného modelu, je vždy nutno mít na zřeteli jejich lokální (vlastně „bodovou“) platnost a možnost i výrazných změn těchto vlastností při větších odchylkách systémových proměnných od „pracovního bodu“.

Poznámka:

Za určitých podmínek lze nelineární transformací stavu a vstupu převést NDS přímo na lineární dynamický systém, jehož vlastnosti (např. stabilita) potom vykazují globální platnost. Tento přístup se nazývá *exaktní linearizace* NDS, překračuje však rámec přednášené látky v LS1,2 a nebudeme se jím dále zabývat.

Uvažujme nelineární dynamický systém (1.28)

$$\begin{aligned} \text{NDS: } \dot{x}(t) &= f[x(t), u(t)] & x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^p ; & f[\cdot] \text{ resp. } h[\cdot] \text{ jsou dané} \\ y(t) &= h[x(t), u(t)] & n\text{-rozměrové resp. } p\text{-rozměrové nelineární vektorové funkce} \end{aligned}$$

a vytvořme jeho linearizovaný model, který by měl aproximovat chování NDS v blízkém okolí ustáleného stavu (pracovního bodu) x_r , určeného vztahy (1.29).

Blízké okolí pracovního bodu budeme respektovat zavedením *odchylkových proměnných*

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= x(t) - x_r & \Rightarrow & x(t) = x_r + \Delta x(t) \\ \Delta u(t) &= u(t) - u_{konst.} & \Rightarrow & u(t) = u_{konst.} + \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= y(t) - y_r & \Rightarrow & y(t) = y_r + \Delta y(t) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Linearizovaný model získáme rozvojem nelineárních vektorových funkcí $f[\cdot]$ resp. $h[\cdot]$ ve stavové resp. výstupní rovnici NDS v Taylorovu řadu v okolí pracovního bodu při zanedbání vyšších členů rozvoje.

Pro stavovou a výstupní rovnici dostáváme

$$\dot{x}_r + \Delta \dot{x}(t) = f[x_r + \Delta x(t), u_{konst} + \Delta u(t)] = f(x_r, u_{konst}) + \left. \frac{\partial f[\cdot]}{\partial x} \right|_{x_r, u_{konst}} [x(t) - x_r] + \left. \frac{\partial f[\cdot]}{\partial u} \right|_{x_r, u_{konst}} [u(t) - u_{konst}]$$

$$y_r + \Delta y(t) = h[x_r + \Delta x(t), u_{konst} + \Delta u(t)] = h(x_r, u_{konst}) + \left. \frac{\partial h[\cdot]}{\partial x} \right|_{x_r, u_{konst}} [x(t) - x_r] + \left. \frac{\partial h[\cdot]}{\partial u} \right|_{x_r, u_{konst}} [u(t) - u_{konst}]$$

a protože pro ustálený stav resp. výstup platí $\dot{x}_r = 0 = f(x_r, u_{konst})$ resp. $y_r = h(x_r, u_{konst})$, dostaneme *stavovou a výstupní rovnici linearizovaného modelu* v odchylkových proměnných

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}(t) &= \left. \frac{\partial f[\cdot]}{\partial x} \right|_{x_r, u_{konst}} \Delta x(t) + \left. \frac{\partial f[\cdot]}{\partial u} \right|_{x_r, u_{konst}} \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= \left. \frac{\partial h[\cdot]}{\partial x} \right|_{x_r, u_{konst}} \Delta x(t) + \left. \frac{\partial h[\cdot]}{\partial u} \right|_{x_r, u_{konst}} \Delta u(t) \end{aligned} \quad (1.31)$$

V blízkém okolí pracovního bodu jsou tyto rovnice formálně shodné se stavovou reprezentací lineárního dynamického systému

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t); & x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^p \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) & A \dots nxn, B \dots nxm, C \dots pxn, D \dots pxm \end{aligned} \quad (1.32)$$

přičemž matice A, B, C, D jsou určeny z *Jacobiových matic* po dosazení veličin definujících pracovní bod ($x(t) = x_r$ a $u(t) = u_{konst}$):

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial f[\cdot]}{\partial x} \right|_{x_r, u_{konst}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\cdot)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\cdot)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_r, u_{konst}} & B &= \left. \frac{\partial f[\cdot]}{\partial u} \right|_{x_r, u_{konst}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\cdot)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\cdot)}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{x_r, u_{konst}} \\ C &= \left. \frac{\partial h[\cdot]}{\partial x} \right|_{x_r, u_{konst}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_p(\cdot)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_p(\cdot)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_r, u_{konst}} & D &= \left. \frac{\partial h[\cdot]}{\partial u} \right|_{x_r, u_{konst}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_p(\cdot)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_p(\cdot)}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{x_r, u_{konst}} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Příklad 1.1.:

Určete linearizovaný model soustavy propojených nádrží v okolí ustáleného stavu, představovaného při nějakém konstantním přiváděném množství kapaliny Q_{1konst} ustálenými hodnotami výšky hladin H_{1r}, H_{2r} . Při odvození zachovejte význam fyzikálních proměnných.

Řešení:

1/ Soustava byla popsána stavovým nelineárním dynamickým modelem 2. řádu (viz 1.26) s lineární výstupní rovnicí:

$$\begin{aligned} \frac{dH_1(t)}{dt} &= -\frac{1}{S} c_p S_p \sqrt{2g[H_1(t) - H_2(t)]} + \frac{1}{S} Q_1(t) \dots\dots\dots = f_1[H_1(t), H_2(t), Q_1(t)] \\ \frac{dH_2(t)}{dt} &= \frac{1}{S} c_p S_p \sqrt{2g[H_1(t) - H_2(t)]} - \frac{1}{S} c_2 S_2 \sqrt{2gH_2(t)} \dots\dots\dots = f_2[H_1(t), H_2(t)] \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2/ Ustálený stav H_{1r}, H_{2r} při konstantním přítoku Q_{1konst} určíme dle (1.29) řešením rovnic

$$0 = -\frac{1}{S} c_p S_p \sqrt{2g[H_{1r} - H_{2r}]} + \frac{1}{S} Q_{1konst} \dots\dots\dots = f_1[H_{1r}, H_{2r}, Q_{1konst}]$$

$$0 = \frac{1}{S} c_p S_p \sqrt{2g[H_{1r} - H_{2r}]} - \frac{1}{S} c_2 S_2 \sqrt{2gH_{2r}} \dots\dots\dots = f_2[H_{1r}, H_{2r}]$$

3/ Linearizované stavové rovnice pro blízké okolí ustáleného stavu určíme výpočtem

Jacobiových matic v ustáleném stavu $\left. \frac{\partial f[\cdot]}{\partial H} \right|_{H_r, Q_{1konst}} \equiv A$, $\left. \frac{\partial f[\cdot]}{\partial Q_1} \right|_{H_r, Q_{1konst}} \equiv b$ (viz 1.31 – 1.33).

Výstupní rovnici není třeba linearizovat, neboť je lineární.

Stavovou reprezentaci linearizovaného modelu v přírůstkových proměnných získáme ve tvaru

$$\Delta \dot{H}_1(t) = -\frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S \sqrt{H_{1r} - H_{2r}}} \Delta H_1(t) + \frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S \sqrt{H_{1r} - H_{2r}}} \Delta H_2(t) + \frac{1}{S} \Delta Q_1(t)$$

$$\Delta \dot{H}_2(t) = \frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S \sqrt{H_{1r} - H_{2r}}} \Delta H_1(t) - \left[\frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S \sqrt{H_{1r} - H_{2r}}} + \frac{c_2 S_2 \sqrt{2g}}{2S \sqrt{H_{2r}}} \right] \Delta H_2(t)$$

$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{bmatrix}$$

4/ Stavová reprezentace linearizovaného modelu NDS v maticovém zápisu je formálně shodná s maticovým zápisem lineárního t-invariantního dynamického systému 2. řádu s jedním vstupem a jedním výstupem (SISO)

S: $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$; $x(t) \in R^2$, $u(t), y(t) \in R^1$
 $y(t) = c^T x(t)$,

což v našem případě odpovídá zápisu

S: $\begin{bmatrix} \Delta \dot{H}_1(t) \\ \Delta \dot{H}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Delta Q_1(t)$; $\begin{bmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{bmatrix}$ (odchylkový) vektor stavu
 $\Delta y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{bmatrix}$; $\Delta Q_1(t)$...odchyly od Q_{1konst} , $\Delta y(t)$...odchyly od y_r .

Hodnoty parametrů v maticích A, b, c^T jsou zřejmé z předchozích rovnic v rozepsaném tvaru.

1.4. Typy rovnovážných stavů LDS a průběh trajektorií systému

Uvažujme neřízený lineární t-invariantní dynamický systém

S: $\dot{x}(t) = Ax(t)$; $x(t) \in R^n$, $y(t) \in R^1$, $x(t_0) = x_0 \neq 0$... nenulové počáteční podmínky (1.34)
 $y(t) = c^T x(t)$ $x_r = 0$... nulový rovnovážný stav ($\det A \neq 0$)

Řešení stavové rovnice $x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0)$ nám dává představu o časovém průběhu stavových veličin $x_1(t), \dots, x_n(t)$. V každém časovém okamžiku $\tau \in [t_0, t]$ představuje řešení $x(\tau)$ nějaký bod ve stavovém prostoru R^n a pohyb tohoto bodu znázorňuje *trajektorii systému*.

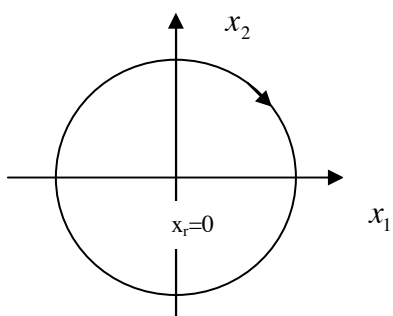
Chování LDS v okolí rovnovážného stavu x_r můžeme tedy posuzovat i podle průběhu trajektorií systému, které získáme vyloučením času z řešení $x_1(t), \dots, x_n(t)$.

Poznámka: Z podmínek existence a jednoznačnosti řešení stavové rovnice vyplývá, že každým bodem $x \in R^n$ prochází jediná trajektorie, singulárním bodem řešení, t.j. *rovnovážným stavem* x_r však může procházet více trajektorií nebo se mohou nacházet v jeho libovolně blízkém okolí.

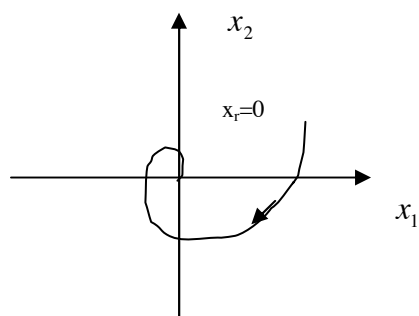
Průběh trajektorií systému závisí na vlastních číslech matice dynamiky $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^n$. Ta mohou být *reálná, ryze imaginární či komplexně sdružená*, přičemž reálná vlastní čísla či reálné části komplexně sdružených vlastních čísel mohou být čísla záporná nebo kladná a rozhodují tak o stabilitě či nestabilitě řešení $x(t)$, resp. o typu a stabilitě rovnovážného stavu.

Typy rovnovážných stavů **střed, ohnisko, uzel a sedlo** a typické průběhy trajektorií pro LDS

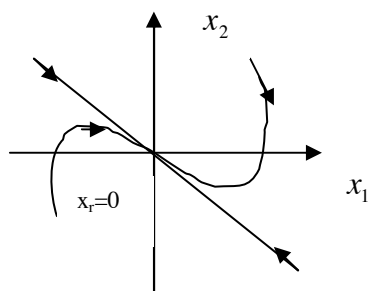
2. řádu pro daný počáteční stav $x(t_0)$ jsou schématicky znázorněny na následujících obrázcích:



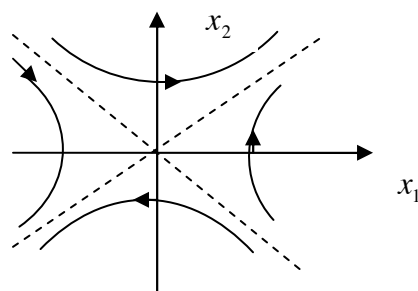
Rovnovážený stav $x_r=0$ typu „**střed**“
 $\lambda_{1,2}(A) = \pm j\omega \dots$ (ryze imaginární)
 Časový průběh $x(t)$ je kmitavý, netlumený



Rovnovážený stav $x_r=0$ typu „**ohnisko**“ (stabilní)
 $\lambda_{1,2}(A) = -\sigma \pm j\omega \dots$ (komplexně sdružená)
 Časový průběh $x(t)$ je kmitavý, tlumený



Rovnovážený stav $x_r=0$ typu „**uzel**“ (stabilní)
 $\lambda_{1,2}(A) = -\sigma_1, -\sigma_2 \dots$ (stejná znaménka)
 Časový průběh $x(t)$ je nekmitavý, aperiodický



Rovnovážený stav $x_r=0$ typu „**sedlo**“ (vždy nestabilní)
 $\lambda_{1,2}(A) = -\sigma_1, +\sigma_2 \dots$ (různá znaménka)
 Časový průběh $x(t)$ je nekmitavý, aperiodický

Charakter průběhu trajektorií a vlastnosti **lineárního** dynamického systému se pro určený typ rovnovážného stavu nemění se změnou počátečních podmínek a mají tedy globální charakter.

Chceme-li určit průběh trajektorií v okolí rovnovážného stavu u **nelineárního** dynamického systému, určíme nejprve jeho linearizovaný model v příslušném rovnovážném stavu (rovnovážných stavů může být více!) a o jeho typu a stabilitě rozhodujeme podle vlastních čísel matice dynamiky linearizovaného modelu (viz *Jacobiova matice*), ale s jednou důležitou výjimkou: *o typu a stabilitě rovnovážného stavu nelze rozhodnout, pokud matice dynamiky linearizovaného modelu má vlastní čísla na imaginární ose*.

Charakter průběhu trajektorií a vlastnosti nelineárního dynamického systému pro určený typ rovnovážného stavu se mohou měnit se změnou počátečních podmínek a mají tedy pouze lokální charakter.

Příklad 1.2.:

Určete typ a stabilitu rovnovážných stavů systému, popsaného

1/ lineární diferenciální rovnicí (netlumený harmonický oscilátor)

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 0 ; \quad y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0 \quad \dots \text{poč. podmínky}$$

2/ nelineární diferenciální rovnicí

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) - by(t) + cy^3(t) = 0 ; \quad y(0), \dot{y}(0) \dots \text{poč. podmínky, parametry } a, b, c > 0$$

3/ nelineární diferenciální rovnicí (viz Van der Polova rovnice v odstavci 1.2.)

$$\ddot{y}(t) + 3[y^2(t) - 1]\dot{y}(t) + y(t) = 0 ; \quad y(0), \dot{y}(0) \dots \text{poč. podmínky}$$

Řešení:

1/ Zvolíme-li stavové proměnné $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t)$, dostaneme stavové rovnice systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) & x_1(0) &= 1, x_2(0) = 0 \dots \text{poč. stav, } x_{1r} = x_{2r} = 0 \dots \text{rovnovážný stav} \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) \end{aligned}$$

V maticovém zápisu

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vlastní čísla matice dynamiky jsou ryze imaginární $\lambda_{1,2}(A) = \pm j$ a rovnovážný stav $x_r = 0$ je

typu „**střed**“ \Rightarrow trajektorie systému ve stavovém prostoru budou kružnice (**pro libovolný počáteční stav**).

Přesvědčíme se o tom určením rovnice trajektorie vyloučením času z řešení stavové rovnice $x(t) = e^{At}x(0)$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} \Rightarrow x_1^2(t) + x_2^2(t) = 1 \quad (\text{rovnice kružnice ve stavové rovině}).$$

nebo „alternativně, přímou integrací stavových rovnic

$$\frac{dx_2(t)}{dx_1(t)} = -\frac{x_1(t)}{x_2(t)} \Rightarrow \frac{x_1^2(t)}{2} + \frac{x_2^2(t)}{2} = k, \text{ integrační konstanta } k=1/2 \text{ (určena z počátečních podmínkách).}$$

2/ Zvolíme opět stavové proměnné $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t)$ a dostaneme stavové rovnice

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \equiv f_1(x_1, x_2) & x_1(0), x_2(0) \dots \text{poč. stav} \\ \dot{x}_2(t) &= bx_1(t) - cx_1^3(t) - ax_2(t) \equiv f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Položením $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$ zjistíme, že nelineární systém má 3 rovnovážné stavy

$${}^1x_r = (0,0), \quad {}^2x_r = (+\sqrt{b/c}, 0), \quad {}^3x_r = (-\sqrt{b/c}, 0)$$

V každém rovnovážném stavu určíme linearizovaný model NDS, resp. příslušné matice dynamiky (viz 1.33)

$${}^1A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x={}^1x_r}, \quad {}^2A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x={}^2x_r}, \quad {}^3A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x={}^3x_r}$$

Vlastní čísla těchto matic potom charakterizují typ rovnovážného stavu, jeho stabilitu či nestabilitu a průběh trajektorií v **blízkém okolí** rovnovážného stavu.

Pro ${}^1x_r = (0,0)$:

$${}^1A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x={}^1x_r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b - 3cx_1^2 & -a \end{bmatrix} \Big|_{x_r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & -a \end{bmatrix}.$$

Vlastní čísla 1A : $\det(\lambda I - {}^1A) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \Rightarrow {}^1x_r = (0,0)$ je „**sedlo**“.

Pro ${}^2x_r, {}^3x_r = (\pm\sqrt{b/c}, 0)$:

$${}^{2,3}A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x={}^{2,3}x_r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2b & -a \end{bmatrix}$$

Vlastní čísla ${}^{2,3}A$: $\det(\lambda I - {}^{2,3}A) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 8b}}{2} \Rightarrow$ rovnovážné stavy

${}^2x_r, {}^3x_r = (\pm\sqrt{b/c}, 0)$ jsou buď „**stabilními uzly**“ ($a^2 - 8b \geq 0$) nebo „**stabilními ohnisky**“ ($a^2 - 8b < 0$).

3/ Zvolíme opět $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t)$ a dostaneme

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \equiv f_1(x_1, x_2)$$

$x_1(0), x_2(0) \dots$ poč. stav

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + 3x_2(t) - 3x_1^2(t)x_2(t) \equiv f_2(x_1, x_2)$$

Položením $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$ zjistíme, že nelineární systém má rovnovážný stav $x_{1r} = x_{2r} = 0$.

Linearizovaný model má matici dynamiky $A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_r=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, vlastní čísla matice A jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{rovnovážný stav } x_{1r} = x_{2r} = 0 \text{ je „nestabilní uzel“}.$$

Tento systém má ještě rovnovážný stav typu „stabilní mezní cyklus“ (viz příklad v odst. 1.2), ke kterému směřují i trajektorie z blízkého okolí rovnovážného stavu „nestabilní uzel“.

1.5. Stavový model LDS, řešení stavové rovnice

Uvažujme stavový model lineárního t-invariantního dynamického systému n – tého řádu

S: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$; $x(t_0) = x_0$, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^p$, $m, p \leq n$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{1.35}$$

Řešení stavové rovnice sestává z homogenního a partikulárního řešení a má tvar

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{1.36}$$

Homogenní řešení $x_h(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$ lze interpretovat jako stavovou odezvu na počáteční

podmínky při nulovém vstupu $u(t)$, partikulární řešení $x_p(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$ jako stavovou

odezvu na vstup $u(t)$ při nulových počátečních podmínkách. Matice e^{At} je stavová matice přechodu.

Poznámka:

Homogenní i partikulární řešení vyhovují stavové rovnici, o čemž se lze přesvědčit jejich dosazením do (1.35). Pro derivaci partikulárního řešení použijeme Leibnitzovo pravidlo o derivaci integrálu dle horní meze:

$$x_p(t) = \int_{t_0}^t f(t, \tau)d\tau \Rightarrow \dot{x}_p(t) = f(t, t) + \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} f(t, \tau)d\tau$$

Výpočet stavové matice přechodu e^{At} :

$$1/ \text{Rozvojem v řadu: } e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots \tag{1.37}$$

$$2/ \text{Použitím zpětné Laplaceovy transformace: } e^{At} = L^{-1}\{(pI - A)^{-1}\} \tag{1.38}$$

3/ Využití modální transformace.

Z lineární algebry víme, že každou čtvercovou matici $A_{n \times n}$ lze převést na diagonální či blokově diagonální matici D pomocí „modální“ transformační matice V tak, že platí $D = V^{-1}AV$. Sloupce matice V jsou vlastní vektory příslušné vlastním číslům matice A .

a/ Matice A nemá násobná vlastní čísla

V tomto případě jsou na diagonále matice $D = V^{-1}AV$ vlastní čísla $\lambda_i(A)$, $i = 1, \dots, n$.

Protože také platí $A = VDV^{-1}$, můžeme stavovou matici přechodu vyjádřit řadou

$$\begin{aligned}
e^{At} &= I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots = VV^{-1} + \frac{VDV^{-1}t}{1!} + \frac{VDV^{-1}VDV^{-1}t^2}{2!} + \dots = V\left(I + \frac{Dt}{1!} + \frac{D^2t^2}{2!} + \dots\right)V^{-1} = \\
&= Ve^{Dt}V^{-1} = V \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} V^{-1}
\end{aligned} \tag{1.39}$$

b/ Matice A má násobná vlastní čísla

Uvažujme např. k-násobné vlastní číslo λ_l . V tomto případě se bude na diagonále matice D nacházet $k \times k$ matice J_l („Jordanova klec“) a nenásobná vlastní čísla $\lambda_i(A)$, $i = 1, \dots, n-k$:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & [J_l] & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_{n-k} \end{bmatrix}, \quad \text{kde } [J_l] = \begin{bmatrix} \lambda_l & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_l \end{bmatrix}_{k \times k}$$

Stavovou matici přechodu určíme stejným postupem jako v předchozím případě a dostaneme

$$e^{At} = V \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & [e^{J_l t}]_{k \times k} & & \\ & & e^{\lambda_{n-k} t} & \\ & & & \end{bmatrix} V^{-1}, \quad \text{kde } e^{J_l t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_l t} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda_l t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_l t} \end{bmatrix}_{k \times k} \tag{1.40}$$

4/ Využití Cayley-Hamiltonovy věty pro maticové konvergentní funkce

Věta 1-1: (Cayley-Hamiltonova)

Každá čtvercová matice $A_{n \times n}$ vyhovuje své charakteristické rovnici.

Aplikujme větu na matici dynamiky neřízeného lineárního dynamického systému

S: $\dot{x}(t) = Ax(t)$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_i(A)$, $i = 1, \dots, n$, jsou známá vlastní čísla matice $A_{n \times n}$.

Pro danou matici A určíme *charakteristickou rovnici* $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0 \quad (\text{rovnici vyhovují všechna } \lambda_i(A), i = 1, \dots, n).$$

Podle Cayley-Hamiltonovy věty musí matice A vyhovovat své charakteristické rovnici

$$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1A + \alpha_0I = 0$$

Z rovnice lze vyjádřit *maticovou funkci* $f(A) = A^n$ jako *maticový polynom* $P(A)$, st $P(A) = n-1$

$$f(A) \equiv A^n = -\alpha_{n-1}A^{n-1} - \dots - \alpha_1A - \alpha_0I = P(A) \tag{1.41}$$

Podle C.-H. věty, můžeme maticovou funkci $f(A)$ vyjádřit jako funkci proměnné λ_i , $i = 1, \dots, n$

$$f(\lambda_i) \equiv \lambda_i^n = -\alpha_{n-1}\lambda_i^{n-1} - \dots - \alpha_1\lambda_i - \alpha_0 = P(\lambda_i), \quad i = 1, \dots, n \tag{1.42}$$

Dostaneme tak n rovnic pro výpočet koeficientů $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ a po jejich dosazení

do maticového polynomu $P(A)$ určíme maticovou funkci $f(A) \equiv A^n$.

Tento postup lze použít pro libovolnou konvergentní maticovou funkci, kterou vyjádříme maticovým polynomem stupně $(n-1)$ s neznámými koeficienty (viz Gantmacher: Teorie matic).

Jak jsme ukázali, pro výpočet maticové funkce je postačující znalost vlastních čísel matice A .

Můžeme tak vypočítat např. maticové funkce $A^{1/2}$, A^k ($k < n$), $\ln A$ nebo e^A , a tedy i stavovou matici přechodu e^{At} . Při k -násobném vlastním čísle λ_i matice A použijeme pro určení koeficientů $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ ještě $(k-1)$ derivací vztahu (1.42).

Příklad 1.3.:

Určete stavovou matici přechodu e^{At} pro netlumený harmonický oscilátor (viz Příklad 1 v odstavci 1.4.) použitím
a/ Zpětné Laplaceovy transformace **b/** Modální transformace **c/** C.-H. věty pro maticové funkce

Řešení:

Matice dynamiky netlumeného lineárního harmonického oscilátoru je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; $\lambda_{1,2} = \pm i$, $n = 2$.

$$\mathbf{a/} \quad e^{At} = L^{-1}\{(pI - A)^{-1}\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2 + 1} \begin{pmatrix} p & 1 \\ -1 & p \end{pmatrix}\right\} = L^{-1}\left\{\begin{pmatrix} \frac{p}{p^2 + 1} & \frac{1}{p^2 + 1} \\ -\frac{1}{p^2 + 1} & \frac{p}{p^2 + 1} \end{pmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b/} \quad e^{At} = Ve^{Dt}V^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ i\sqrt{2}/2 & -i\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -i\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & i\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (e^{it} + e^{-it})/2 & (e^{it} - e^{-it})/2i \\ -(e^{it} - e^{-it})/2i & (e^{it} + e^{-it})/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

c/ $e^{At} = \alpha_1 At + \alpha_0 I$... maticová funkce je vyjádřena maticovým polynomem stupně $n-1 = 1$

$e^{it} = \alpha_1 it + \alpha_0$, $e^{-it} = -\alpha_1 it + \alpha_0$ přecházíme na funkce v proměnné λ_1, λ_2

Řešením rovnic určíme parametry: $\alpha_0 = \cos t$, $\alpha_1 = \frac{\sin t}{t}$

$$e^{At} = \alpha_1 At + \alpha_0 I = \frac{\sin t}{t} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} t + \cos t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

1.6. Vlastnosti spojitých lineárních dynamických systémů

Vnitřní stabilita LDS (stabilita rovnovážného stavu x_r)

Definice:

Rovnovážný stav $x_r = 0$ neřízeného spojitého LDS

S: $\dot{x}(t) = Ax(t)$; $x(t) \in R^n$, $x_r = 0$, $t \in [t_0, \infty)$, $x(t_0) = x_0$... počáteční podmínky

je **asymptoticky stabilní**, jestliže $\forall x_0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$

stabilní, jestliže $\forall x_0 \quad \exists M(x_0) : \|x(t)\| \leq M(x_0), \forall t, t \in [t_0, \infty)$

a nestabilní, jestliže $\exists x_0 : \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty$

kde $\|x(t)\|$ označuje Eukleidovu normu vektoru stavu, $x(t)$ je řešení stavové rovnice.

Věta 1-2.:

Neřízený spojitý LDS je asymptoticky stabilní $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0, \forall i, i = 1, \dots, n$

a nestabilní, jestliže existuje $\lambda_i(A) : \operatorname{Re} \lambda_i > 0$

Důkaz: $x(t) = e^{At} x(t_0) = Ve^{Dt} V^{-1} x(t_0) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} x_i(t_0)$ (řešení $x(t)$ je lineární kombinací módů systému)

Vnější stabilita LDS (BIBO stabilita, vstupně-výstupní stabilita)

Definice:

Spojité lineární dynamický systém

$$S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t); \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t), y(t) \in R^1$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

je vstupně-výstupně stabilní (BIBO stabilní), jestliže reaguje na omezený vstup omezeným výstupem:

$$\forall u(t), \forall t: |u(t)| < M_u \quad \exists M_y: |y(t)| < M_y$$

Věta 1-3:

Spojité lineární dynamický systém je BIBO stabilní $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$, kde $g(t)$ je impulsní funkce systému.

Důkaz: Vyplyvá z konvolutorního integrálu $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)u(\tau)d\tau$.

Poznámka: Pojem „stabilita ve smyslu Ljapunova“ bude zaveden a vysvětlen v 11. kapitole. Pokud hovoříme o stabilitě systému, máme obvykle na mysli vnitřní stabilitu.

Řiditelnost a dosažitelnost LDS

Základní úlohou řízení dynamických systémů je určení řízení $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, které způsobí změnu daného počátečního stavu systému $x(t_0)$ ve zvolený koncový stav $x(t_1)$. Lze-li takové řízení určit, obvykle existuje takových řízení více a mezi generovanými trajektoriemi $x(t)$ lze vybírat, což je základním principem úloh optimálního řízení. Jestliže cílový stav nebude dosažitelný, ztratí tyto úlohy smysl. Zavádí se proto pojmy **řiditelnost stavu**, kdy výchozím stavem je libovolný počáteční stav systému $x(t_0) \neq 0$ a koncovým stavem je počátek stavového prostoru $x(t_1) = 0$ a **dosažitelnost stavu**, kdy výchozím stavem je naopak počátek stavového prostoru $x(t_0) = 0$ a koncovým stavem je libovolný stav $x(t_1) \neq 0$. Jsou-li všechny stavy systému říditelné resp. dosažitelné, říkáme, že **systém je říditelný resp. dosažitelný**. Dosažitelnost je silnější vlastnost než říditelnost, protože systém může přejít do nulového stavu i bez řízení a přitom nemusí být dosažitelný.

Definice:

Spojité lineární dynamický systém

$$S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t); \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t), y(t) \in R^1$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

je říditelný, jestliže $\forall x(t_0) \neq 0, x(t_0) \in R^n$, existuje řízení $u(t)$ na konečném časovém intervalu $t \in [t_0, t_1]$, které způsobí změnu daného počátečního stavu systému $x(t_0)$ v koncový stav $x(t_1) = 0$.

Jinak řečeno, musí platit

$$x(t_1) \equiv 0 = e^{A(t_1-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

Věta 1-4:

Spojité lineární dynamický systém je říditelný \Leftrightarrow hodnost matice říditelnosti Q_r je rovna dimenzi vektoru stavu $x(t)$:

$$h[Q_r] = h[b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b] = \dim x(t) = n \quad (1.43)$$

Důkaz: Vyplyvá z podmínek řešitelnosti stavové rovnice vzhledem k řízení $u(t)$ pro libovolné $x(t_0)$. Důkaz je jednoduchý pro diskrétní systémy, pro spojitě systémy jej neuvádíme.

Definice:

Spojitý lineární dynamický systém

$$S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) ; \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t), y(t) \in R^1$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

je **dosažitelný**, jestliže existuje řízení $u(t)$ na konečném časovém intervalu $t \in [t_0, t_1]$, které způsobí změnu daného počátečního stavu systému $x(t_0) = 0$ v libovolný požadovaný koncový stav $x(t_1) \neq 0$.

Jinak řečeno, musí platit

$$x(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

Položíme-li $x(t_1) = -e^{A(t_1-t_0)}x(t_0)$, je zřejmá formální shoda podmínek říditelnosti a dosažitelnosti s tím, že říditelnost předpokládá existenci inverze stavové matice přechodu, což je u spojitých lineárních dynamických systémů splněno.

Z uvedeného vyplývá, že **věta o říditelnosti platí i pro dosažitelnost spojitého LDS**.

Pozorovatelnost a rekonstruovatelnost LDS

Pozorovatelnost a rekonstruovatelnost souvisí s možností určit stav systému $x(t)$ na základě měření jeho vstupu $u(t)$ a výstupu $y(t)$ na konečném časovém intervalu. Určujeme-li stav *na začátku intervalu měření*, jedná se o **pozorovatelnost stavu**, určujeme-li stav *na konci intervalu měření*, jedná se o **rekonstruovatelnost stavu**. Jsou-li všechny stavy systému pozorovatelné resp. rekonstruovatelné, říkáme, že **systém je pozorovatelný resp. rekonstruovatelný**.

Definice:

Spojitý lineární dynamický systém

$$S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) ; \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t), y(t) \in R^1$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

je **pozorovatelný**, jestliže pozorováním vstupu $u(t)$ a výstupu $y(t)$ na konečném časovém intervalu $t \in [t_0, t_1]$ lze určit počáteční stav systému $x(t_0)$.

Jinak řečeno, $\forall t$ musí platit

$$y(t) - c^T \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau = c^T e^{A(t-t_0)} x(t_0)$$

Poznámka: Protože vliv vstupu na výstup je známý (je určen druhým členem na levé straně) nebo může být i nulový, můžeme předchozí vztah zjednodušit:

$$\bar{y}(t) = c^T e^{A(t-t_0)} x(t_0)$$

Věta 1-5:

Spojitý lineární dynamický systém je pozorovatelný \Leftrightarrow hodnota matice pozorovatelnosti Q_p je rovna dimenzi vektoru stavu $x(t)$:

$$h[Q_p] = h \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} = \dim x(t) = n \quad (1.44)$$

Důkaz: Vyplývá z podmínek řešitelnosti výstupní rovnice při známém vstupu $u(t)$ pro libovolné $x(t_0)$. Důkaz je jednoduchý pro diskrétní systémy, pro spojitě systémy jej neuvádíme.

Definice **rekonstruovatelnosti** se liší pouze požadavkem na určení stavu $x(t_1)$ na konci intervalu měření a podobně jako u říditelnosti a dosažitelnosti LDS lze ukázat, že **věta o pozorovatelnosti platí i pro rekonstruovatelnost spojitého LDS**.

Řiditelnost a pozorovatelnost (dosažitelnost a rekonstruovatelnost) lze nejjednodušeji ilustrovat na systému n -tého řádu $S : (A, b, c^T)$ v „modální (Jordanově) stavové reprezentaci“, kdy vlastní čísla tvoří diagonálu matice dynamiky (viz odst. 1.5 a 1.7).

Pro reálná, různá vlastní čísla $\lambda_i(A)$, $i = 1, \dots, n$, má tato stavová reprezentace tvar

$$S: \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t) ; \quad y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Pro matice říditelnosti a pozorovatelnosti dostaneme

$$Q_r = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}b_n \end{bmatrix} ; \quad Q_p = \begin{bmatrix} c^T \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \\ \vdots & & \vdots \\ c_1 \lambda_1^{n-1} & \cdots & c_n \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Ze stavové rovnice vidíme, že pokud jsou všechny prvky b_i matice b nenulové, jsou všechny složky $x_i(t)$, a tedy i příslušné módy $e^{\lambda_i t}$, $i = 1, \dots, n$, ovlivnitelné řízením $u(t)$. Takový systém je říditelný a matice říditelnosti má hodnotu rovnající se dimenzi vektoru stavu. Bude-li libovolný z prvků b_i nulový, nebude příslušná složka vektoru stavu a příslušný mód říditelný a v matici říditelnosti bude odpovídající řádek nulový. Z toho vyplývá, že hodnota matice říditelnosti bude menší než dimenze vektoru stavu a systém nebude říditelný.

Analogický rozbor můžeme provést i pro pozorovatelnost systému.

Hodnota matice říditelnosti či pozorovatelnosti nezávisí na stavové reprezentaci popisující daný systém a to i v případě násobných vlastních čísel a systémů s více vstupy a více výstupy.

„Modální (Jordanova) stavová reprezentace“, byla zvolena pouze kvůli transparentnosti analýzy říditelnosti a pozorovatelnosti, která se v jiných ekvivalentních stavových reprezentacích ztrácí.

Poznámky:

1/ Pro testování říditelnosti LDS lze také použít kritérium

$\text{LDS je říditelný} \Leftrightarrow h[(\lambda_i I - A), b] = \dim x(t) = n ; \quad \forall \lambda_i(A), i = 1, \dots, n \quad (1.45)$
--

a pro testování pozorovatelnosti kritérium

$\text{LDS je pozorovatelný} \Leftrightarrow h \begin{bmatrix} (\lambda_i I - A) \\ c^T \end{bmatrix} = \dim x(t) = n ; \quad \forall \lambda_i(A), i = 1, \dots, n \quad (1.46)$

V případě, že hodnota matic bude pro nějaké vlastní číslo λ_i menší než n , příslušný mód systému bude neříditelný nebo nepozorovatelný.

2/ Pro testování říditelnosti stabilních LDS lze použít **gramián říditelnosti** W_c a pro testování pozorovatelnosti stabilních LDS **gramián pozorovatelnosti** W_o :

$\text{Stabilní LDS je říditelný} \Leftrightarrow W_c = W_c^T > 0, \quad \text{kde } W_c = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{A(t-\tau)} b b^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau \quad (1.47)$

$\text{Stabilní LDS je pozorovatelný} \Leftrightarrow W_o = W_o^T > 0, \quad \text{kde } W_o = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{A^T(t-\tau)} c^T c e^{A(t-\tau)} d\tau \quad (1.48)$

Poznamenejme, že symetrické matice $W_c, W_o > 0$ lze také získat řešením Ljapunovských rovnic (viz 11. kapitola) a že singulární čísla matic W_c, W_o lze použít pro vyjádření „míry říditelnosti či pozorovatelnosti“.

Určení matic W_c, W_o v Matlabu: gram(sys,'c'), gram(sys,'o')

Stabilizovatelnost a detekovatelnost LDS

Zavedení pojmů stabilizovatelnost a detekovatelnost vyplývá z principiální možnosti rozdělit systém na stabilní a nestabilní část a také na dosažitelnou a nedosažitelnou a na pozorovatelnou a nepozorovatelnou část.

Spojité lineární dynamický systém

$$S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) ; \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t), y(t) \in R^1$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

stabilizovatelný, jestliže množina jeho nestabilních stavů je obsažena v podprostoru dosažitelných stavů a nedosažitelná část je stabilní.

$$\text{Jinak řečeno, LDS je stabilizovatelný, jestliže } \exists k^T : \operatorname{Re} \lambda_i(A - bk^T) < 0, \quad \forall i, i = 1, \dots, n, \quad (1.49)$$

kde k^T je zisková matice zpětnovazebního, lineárního stavového regulátoru $u(t) = -k^T x(t)$.

Spojité lineární dynamický systém

$$S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) ; \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t), y(t) \in R^1$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

detekovatelný, jestliže množina jeho nestabilních stavů je obsažena v podprostoru pozorovatelných stavů a nepozorovatelná část je stabilní.

$$\text{Jinak řečeno, LDS je detekovatelný, jestliže } \exists h : \operatorname{Re} \lambda_i(A - hc^T) < 0, \quad \forall i, i = 1, \dots, n, \quad (1.50)$$

kde h je zisková matice zpětnovazebního, lineárního výstupního regulátoru $u(t) = -hy(t)$.

S problémem stabilizovatelnosti se setkáme např. při návrhu stavového regulátoru pro systém, který není říditelný (dosažitelný) a s problémem detekovatelnosti při návrhu rekonstruktoru stavu pro systém, který není pozorovatelný (rekonstruovatelný).

Dualita LDS

K lineárnímu dynamickému systému, jehož stavová reprezentace je charakterizovaná trojicí

$$S : (A, b, c^T), \text{ definujeme } \textbf{duální systém} \text{ se stavovou reprezentací } {}^D S : (A^T, c, b^T).$$

V duálním systému je tedy zaměněna matice dynamiky za transponovanou matici dynamiky a je zaměněn vstup za výstup, resp. matice řízení za matici výstupu. Dualita se tak přenáší i na vlastnosti systémů. Např. říditelnost a pozorovatelnost jsou duální vlastnosti, jak je patrné z kritérií (1.43 – 1.48). Je-li systém říditelný, potom duální systém je pozorovatelný a naopak.

Kalmanova dekompozice LDS

Pro obecný lineární dynamický systém $S : (A, b, c^T)$ existuje taková báze stavového prostoru R^n ,

že vektor stavu $x(t)$ může být dekomponován na čtyři vzájemně se vylučující subvektory stavu

${}^1x(t), {}^2x(t), {}^3x(t), {}^4x(t)$, odpovídající dekompozici S na subsystémy ${}^1S, {}^2S, {}^3S, {}^4S$ s vlastnostmi:

1S : říditelný, ale nepozorovatelný subsystém (matice dynamiky A_{11})

2S : říditelný a pozorovatelný subsystém (matice dynamiky A_{22})

3S : neříditelný a nepozorovatelný subsystém (matice dynamiky A_{33})

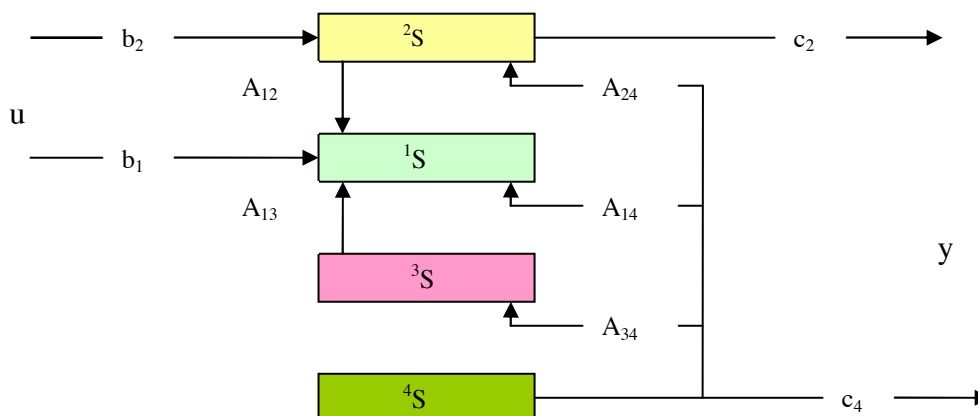
4S : neříditelný, ale pozorovatelný subsystém (matice dynamiky A_{44})

Taková dekompozice sice není jednoznačná, nemění se však dimenze jednotlivých subsystémů.

Uvažujme např. dekompozici

$$A \xrightarrow{\text{dek}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \quad b \xrightarrow{\text{dek}} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c^T \xrightarrow{\text{dek}} [0 \quad c_2 \quad 0 \quad c_4], \quad (1.51)$$

kteřá je znázorněna na zjednodušeném blokovém schéma



Poznámka: Je-li například daný systém $S : (A, b, c^T)$ říditelný ($h[Q_r] = \dim x(t) = n$), ale kromě pozorovatelné části má i nepozorovatelnou část ($1 \leq h[Q_p] < n$), je dekomponovatelný na subsystémy $^1S, ^2S$ a lze jej popsat stavovou reprezentací se strukturou

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1(t) \\ \dot{x}^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t); \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{bmatrix}$$

Bude-li naopak daný systém $S : (A, b, c^T)$ pozorovatelný ($h[Q_p] = \dim x(t) = n$), ale kromě říditelné části má i neříditelnou část ($1 \leq h[Q_r] < n$), je dekomponovatelný na subsystémy 2S a 4S a lze jej popsat stavovou reprezentací se strukturou

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^2(t) \\ \dot{x}^4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2(t) \\ x^4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \quad y(t) = \begin{bmatrix} c_2 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2(t) \\ x^4(t) \end{bmatrix}$$

1.7. Vstupně – výstupní ekvivalence lineárních dynamických systémů

Předpokládejme, že pro reálný dynamický systém byl určen stavový model LDS

$$S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t); \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t), y(t) \in R^1, \quad (1.52)$$

$$y(t) = c^T x(t) \quad A, b, c^T \dots \text{známé matice}, \quad \{\lambda_i(A)\}_{i=1}^n \dots \text{známá vlastní čísla}$$

Z hlediska vnějšího popisu LDS odpovídá této stavové reprezentaci jediná lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními parametry

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_0u(t); \quad m < n, \quad (1.53)$$

kde parametry a_0, a_1, \dots, a_{n-1} jsou koeficienty charakteristického polynomu matice A

$$a(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (1.54)$$

Předpokládejme existenci $m = n - 1$ derivací vstupní veličiny. Potom parametry b_0, b_1, \dots, b_{n-1} , závislé na maticích A, b, c^T , určíme převodem stavové reprezentace na lineární diferenciální rovnici. Převod provedeme formální derivací výstupní rovnice a využijeme platnost

Cayley-Hamiltonovy věty: $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0 \quad (1.55)$

Postupnými derivacemi výstupní rovnice (a dosazením za $\dot{x}(t)$ ze stavové rovnice) dostaneme

$$\begin{aligned} y(t) &= \dots = c^T x(t) && / a_0 \\ \dot{y}(t) &= c^T \dot{x}(t) = \dots = c^T Ax(t) + c^T bu(t) && / a_1 \\ \ddot{y}(t) &= c^T A\dot{x}(t) + c^T b\dot{u}(t) = c^T A^2x(t) + c^T Abu(t) + c^T b\dot{u}(t) && / a_2 \\ &\vdots \\ y^{(n)}(t) &= \dots = c^T A^n x(t) + c^T A^{n-1}bu(t) + \dots + c^T bu^{(n-1)}(t) && / a_n = 1 \end{aligned}$$

Provedeme naznačené násobení jednotlivých rovnic známými koeficienty charakteristického polynomu a_0, a_1, \dots, a_{n-1} a rovnice sečteme. Vzhledem k platnosti (1.55) dojde k vyloučení stavu $x(t)$ a po úpravě pravé strany dostáváme diferenciální rovnici (1.53) s explicitně definovanou závislostí parametrů b_0, b_1, \dots, b_{n-1} na maticích A, b, c^T :

$$y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = \underbrace{c^T b}_{b_{n-1}} u^{(n-1)} + \dots + \underbrace{(a_2 c^T b + \dots + c^T A^{n-2} b)}_{b_1} \dot{u} + \underbrace{(a_1 c^T b + \dots + c^T A^{n-1} b)}_{b_0} u \quad (1.56)$$

Koeficienty diferenciální rovnice b_0, b_1, \dots, b_{n-1} jsou funkcemi známých koeficientů a_0, a_1, \dots, a_{n-1} charakteristického polynomu a **Markovských parametrů systému** M_i , definovaných vztahem

$$M_i = c^T A^i b, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1.57)$$

Z rovnice (1.56) vyplývají dva důležité poznatky:

1/ Relativní řád systému (rozdíl řádu derivace výstupní a vstupní veličiny nebo rozdíl stupňů polynomu ve jmenovateli a čitateli přenosové funkce) je dán prvním nenulovým Markovským parametrem.

Je-li tedy např. $c^T b \neq 0$, je relativní řád 1, je-li prvním nenulovým Markovským parametrem $c^T A^{n-1} b \neq 0$, je relativní řád n .

Relativní řád je 0 v případě, že výstupní rovnice má tvar $y(t) = c^T x(t) + du(t)$.

2/ K dané stavové reprezentaci $S : (A, b, c^T)$ sice existuje jediná diferenciální rovnice (jediná přenosová funkce), ale stejnou diferenciální rovnici (stejnou přenosovou funkci) může realizovat i taková stavová reprezentace $\bar{S} : (\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T)$, která splňuje

podmínky vstupně-výstupní ekvivalence:

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - \bar{A}) \quad \dots \text{rovnost charakteristických polynomů (vlastních čísel)}$$

$$c^T A^i b = \bar{c}^T \bar{A}^i \bar{b}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad \dots \text{rovnost Markovských parametrů} \quad (1.58)$$

Protože určení nějaké ekvivalentní stavové reprezentace $\bar{S} : (\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T, \bar{d})$ k dané stavové reprezentaci $S : (A, b, c^T, d)$ může najít praktické uplatnění při modelování či analýze vlastností LDS, bude vhodné nalézt podmínky vstupně-výstupní ekvivalence stavových reprezentací (1.58) v nějaké konstruktivnější podobě.

Vzhledem k tomu, že ekvivalentní stavové reprezentace $S : (A, b, c^T, d)$, $\bar{S} : (\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T, \bar{d})$ reagují na stejný vstup $u(t)$ stejným výstupem $y(t)$ a mají shodnou dimenzi vektoru stavu $\dim x(t) = \dim \bar{x}(t) = n$, lze předpokládat odlišný průběh stavových proměnných, a tedy existenci nějaké **regulární transformační matice** T_{nm} s konstantními prvky takové, že $\forall x(t)$ resp. $\forall \bar{x}(t)$

$$\bar{x}(t) = Tx(t) \quad \text{resp.} \quad x(t) = T^{-1}\bar{x}(t) \quad (1.59)$$

Dosazením transformačního vztahu $x(t) = T^{-1}\bar{x}(t)$ a jeho časové derivace $\dot{x}(t) = T^{-1}\dot{\bar{x}}(t)$ do stavové reprezentace $S : (A, b, c^T, d)$ dostaneme porovnáním s $\bar{S} : (\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T, \bar{d})$ podmínky vstupně-výstupní ekvivalence ve tvaru převodních vztahů mezi maticemi ekvivalentních stavových reprezentací.

$$\begin{array}{ccc} S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), & x(t_0) & \xleftarrow{x=T^{-1}\bar{x}, \dot{x}=T^{-1}\dot{\bar{x}}} \\ y(t) = c^T x(t) + du(t) & & \bar{S}: \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{b}u(t), \quad \bar{x}(t_0) = T x(t_0) \\ & & y(t) = \bar{c}^T \bar{x}(t) + \bar{d}u(t) \\ & & \updownarrow \\ \bar{S}: T^{-1}\dot{\bar{x}}(t) = AT^{-1}\bar{x}(t) + bu(t) & /T & \rightarrow \bar{S}: \dot{\bar{x}}(t) = TAT^{-1}\bar{x}(t) + Tbu(t) \\ y(t) = c^T T^{-1}\bar{x}(t) + du(t) & & y(t) = c^T T^{-1}\bar{x}(t) + du(t) \end{array}$$

Podmínky vstupně-výstupní ekvivalence – převodní vztahy mezi S a \bar{S} :

$$\begin{aligned} \bar{A} &= TAT^{-1}, \quad \bar{b} = Tb, \quad \bar{c}^T = c^T T^{-1}, \quad \bar{d} = d \\ \text{resp. } A &= T^{-1}\bar{A}T, \quad b = T^{-1}\bar{b}, \quad c^T = \bar{c}^T T, \quad d = \bar{d} \end{aligned} \quad (1.60)$$

Podmínky vstupně-výstupní ekvivalence (1.60) jsou ekvivalentní podmínkám (1.58):

- 1/ Transformace podobnosti $\bar{A} = TAT^{-1}$ zachovává vlastní čísla $\Rightarrow \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - \bar{A})$
 2/ Markovské parametry jsou pro ekvivalentní reprezentace shodné
 $c^T b = \bar{c}^T T T^{-1} \bar{b} = \bar{c}^T \bar{b}$, $c^T A b = \bar{c}^T T T^{-1} \bar{A} T T^{-1} \bar{b} = \bar{c}^T \bar{A} \bar{b}$, $c^T A^{n-1} b = \bar{c}^T \bar{A}^{n-1} \bar{b}$ (1.61)
 \Rightarrow vlastní čísla $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ i Markovské parametry jsou vstupně-výstupními invarianty.

Ekvivalentní stavové reprezentace $S:(A, b, c^T, d), \bar{S}:(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T, \bar{d})$ zachovávají vlastnosti říditelnosti (1.43) a pozorovatelnosti (1.44):

Pro matice říditelnosti a pozorovatelnosti v ekvivalentní reprezentaci platí

$$\bar{Q}_r = [\bar{b}, \bar{A}\bar{b}, \bar{A}^2\bar{b}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{b}] = [Tb, TAT^{-1}Tb, TAT^{-1}TAT^{-1}Tb, \dots] = T[b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b] = TQ_r$$

$$\bar{Q}_p = \begin{bmatrix} \bar{c}^T \\ \bar{c}^T \bar{A} \\ \vdots \\ \bar{c}^T \bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T T^{-1} \\ c^T T^{-1} T A T^{-1} \\ \vdots \\ c^T T^{-1} A^{n-1} T^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} T^{-1} = Q_p T^{-1} \quad (1.62)$$

Protože násobením regulární maticí T resp. T^{-1} se nezmění hodnota Q_r resp. Q_p , platí $h[\bar{Q}_r] = h[Q_r] = \dim \bar{x}(t) = \dim x(t) = n$ resp. $h[\bar{Q}_p] = h[Q_p] = \dim \bar{x}(t) = \dim x(t) = n$.

Ze vztahů (1.62) také vyplývá, že dva ekvivalentní říditelné a pozorovatelné systémy S a \bar{S} jsou vázány regulární transformační maticí $T_{n \times n}$ (1.59), kterou lze určit ze vztahu

$$T = \bar{Q}_r Q_r^{-1} \quad \text{nebo} \quad T = \bar{Q}_p^{-1} Q_p \quad (1.63)$$

Vztahy (1.63) využíváme při transformaci dané říditelné a pozorovatelné stavové reprezentace $S:(A, b, c^T, d)$ do libovolně zvolené ekvivalentní říditelné a pozorovatelné stavové reprezentace $\bar{S}:(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T, \bar{d})$ pro výpočet parametrů matice řízení resp. výstupu $\bar{b} = Tb$ resp. $\bar{c}^T = c^T T^{-1}$ (z rovnosti Markovských parametrů vyplývá, že parametry jedné z matic jsou volitelné).

Příklad 1.4.:

K danému říditelnému a pozorovatelnému systému $S(A, b, c^T)$

$$S: \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \quad \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

určete matice modelu vstupně-výstupní ekvivalentní stavové reprezentace $\bar{S}(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T)$, zadané specifikovanou strukturou s částečně neurčenými parametry (matice řízení je zvolena a respektuje požadavek říditelnosti)

$$\bar{S}: \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ -\bar{a}_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t_0) \\ \bar{x}_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

Určete hodnoty transformovaných počátečních podmínek.

Řešení:

1/ Parametry matice \bar{A} určíme z podmínky rovnosti charakteristických polynomů (1.58):

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - \bar{A}) \Rightarrow (\lambda + 4)(\lambda + 2) - 4 = (\lambda - \bar{a}_{11})\lambda + \bar{a}_{12}^2 \Rightarrow \bar{a}_{11} = -6, \bar{a}_{12} = 2$$

2/ Určíme matice říditelnosti pro obě stavové reprezentace a transformační matice T, T^{-1} (1.63):

$$Q_f = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_f = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad h[Q_f] = h[\bar{Q}_f] = \dim x(t) = \dim \bar{x}(t) = n = 2$$

$$T = \bar{Q}_f Q_f^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

3/ Transformační matice T, T^{-1} použijeme pro určení počátečních podmínek a matice výstupu

$$\bar{x}(t_0) = T x(t_0) \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t_0) \\ \bar{x}_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{c}^T = c^T T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -8 \end{bmatrix}$$

Ekvivalentní systém $\bar{S}(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T)$ je plně určen a bude vykazovat stejnou odezvu na výstupu pro libovolný vstupní signál jako daný systém $S(A, b, c^T)$:

$$\bar{S}: \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t_0) \\ \bar{x}_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

1.8. Normální formy stavové reprezentace LDS

V předchozím odstavci jsme ukázali, že lze určit nekonečně mnoho ekvivalentních stavových reprezentací $\bar{S} : (\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}^T, \bar{d})$ k dané stavové reprezentaci $S : (A, b, c^T, d)$

$$S: \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t); \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t), y(t) \in R^1 \quad (1.64)$$
$$y(t) = c^T x(t) + du(t) \quad \lambda_i(A), \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{vlastní čísla matice } A)$$

Ekvivalentní reprezentace lze využít při modelování, ale i v takových úlohách analýzy či syntézy LDS, které jsou transparentnější a snáze řešitelné v nějaké jiné, vhodně zvolené ekvivalentní stavové reprezentaci. Stavové reprezentace, které vystihují základní vlastnosti LDS a obsahují minimální počet parametrů pro popis systému nazýváme "normální formy".

Zabývejme se nyní formálním převodem systému $S : (A, b, c^T, d)$ do obvykle používaných normálních forem $\bar{S}_X : (\bar{A}_X, \bar{b}_X, \bar{c}_X^T, \bar{d}_X)$ a věnujme pozornost jejich struktuře.

Jordanova normální forma $\bar{S}_J : (\bar{A}_J, \bar{b}_J, \bar{c}_J^T, \bar{d}_J)$

Tato reprezentace, nazývaná též modální reprezentace, má na diagonále \bar{A}_J vlastní čísla $\lambda_i(A)$, $i = 1, \dots, n$ a nenulové prvky matice řízení a výstupu přímo indikují říditelnost a pozorovatelnost.

Do této reprezentace může být převeden každý systém $S : (A, b, c^T, d)$ s použitím transformace ekvivalence $\bar{x}(t) = Tx(t) = V^{-1}x(t)$, kde V je "modální transformační matice" (její sloupce tvoří vlastní vektory matice A).

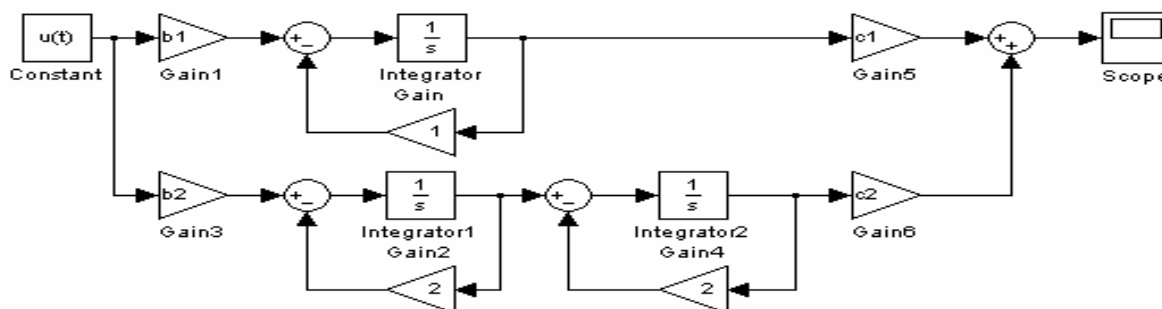
Viz Matlab: `eig(A)`, `Jordan(A)`

$$\bar{S}_J: \dot{\bar{x}}(t) = \overbrace{V^{-1}AV}^{\bar{A}_J} \bar{x}(t) + \overbrace{V^{-1}B}^{\bar{B}_J} u(t), \quad \text{kde } \bar{A}_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_J = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_n \end{bmatrix}$$
$$y(t) = \overbrace{c^T V}^{\bar{c}_J^T} \bar{x}(t) + \bar{d}_J u(t) \quad \bar{c}^T = [\bar{c}_1 \quad \cdots \quad \bar{c}_n], \quad \bar{d}_J = d \quad (1.65)$$

Poznámka.: V případě k -násobného λ_i bude mít \bar{A}_J na diagonále ještě $k \times k$ Jordanovu klec J_i .

Tato normální forma má význam spíše teoretický, neboť při tvorbě analogového modelu se musíme omezit na reálná vlastní čísla (možnost nastavení koeficientů modelu). Analogový model při reálných, nenásobných vlastních číslech je vytvořen paralelním spojením subsystémů 1. řádu, v případě k -násobného λ_i je v i -té paralelní větvi k subsystémů v seriovém spojení (viz obr.). Parametry $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n$ jsou obecné parametry a nemají interpretovatelný význam, parametry $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ mohou mít význam reziduí (viz rozklad přenosové funkce na parciální zlomky – Kap.2.).

Analogové schéma (LDS 3.řádu, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$, parametry jsou bez proužků)



Normální forma říditelnosti $\bar{S}_r : (\bar{A}_r, \bar{b}_r, \bar{c}_r^T, \bar{d}_r)$

1/ V této reprezentaci obsahuje matice dynamiky \bar{A}_r parametry, které odpovídají koeficientům charakteristického polynomu matice A : $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$

2/ Matice říditelnosti je v této reprezentaci identickou maticí

$$\bar{Q}_r = [\bar{b}_r, \bar{A}_r \bar{b}_r, \bar{A}_r^2 \bar{b}_r, \dots, \bar{A}_r^{n-1} \bar{b}_r] = I$$

Struktura matic stavového modelu:

$$\bar{S}_r : \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_r \bar{x}(t) + \bar{b}_r u(t), \quad \text{kde} \quad \bar{A}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

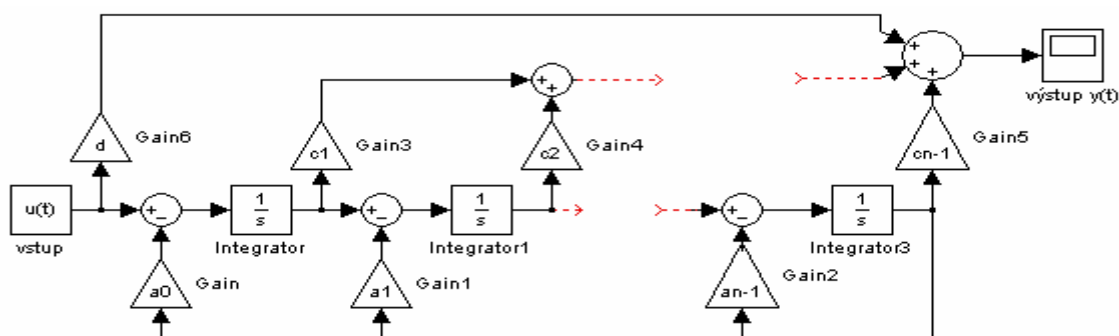
$$y(t) = \bar{c}_r^T \bar{x}(t) + \bar{d}_r u(t) \quad \bar{c}_r^T = [\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2 \quad \dots \quad \bar{c}_n], \quad \bar{d}_r = d \quad (1.66)$$

Parametry c_1, \dots, c_n jsou obecné parametry a nemají interpretovatelný význam.

Do této struktury lze transformovat jakýkoliv říditelný systém $S : (A, b, c^T, d)$, přičemž transformační matici T určíme ze vztahu (1.63) při respektování $\bar{Q}_r = I$:

$$T = \bar{Q}_r Q_r^{-1} = Q_r^{-1}, \quad T^{-1} = Q_r \quad (1.67)$$

Analogové schéma (parametry jsou bez proužků)



Normální forma pozorovatelnosti $\bar{S}_p : (\bar{A}_p, \bar{b}_p, \bar{c}_p^T, \bar{d}_p)$

- 1/ Reprezentace je duální vzhledem k normální formě říditelnosti, matice dynamiky \bar{A}_p opět obsahuje parametry, které odpovídají koeficientům charakteristického polynomu matice A : $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$

- 2/ Matice pozorovatelnosti je v této reprezentaci identickou maticí

$$\bar{Q}_p = \begin{bmatrix} \bar{c}_p^T \\ \bar{c}_p^T \bar{A}_p \\ \vdots \\ \bar{c}_p^T \bar{A}_p^{n-1} \end{bmatrix} = I$$

Struktura matic stavového modelu:

$$\bar{S}_p : \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_p \bar{x}(t) + \bar{b}_p u(t), \quad \text{kde} \quad \bar{A}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_p = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_n \end{bmatrix}$$

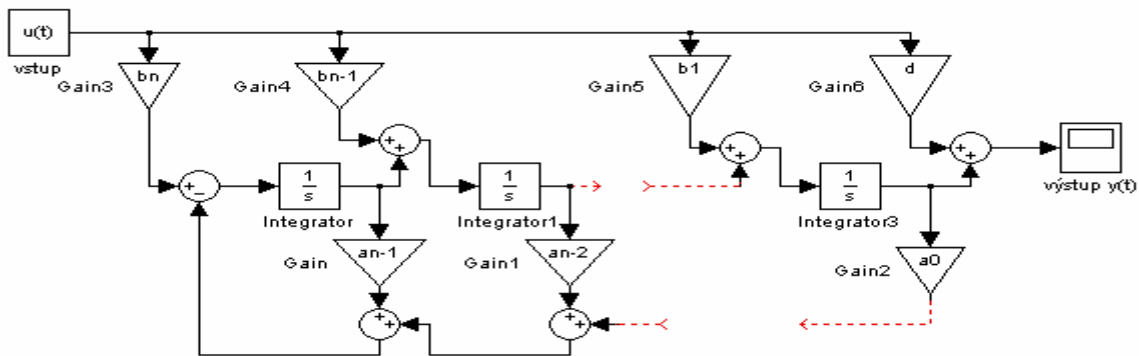
$$y(t) = \bar{c}_p^T \bar{x}(t) + \bar{d}_p u(t) \quad \bar{c}_p^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad \bar{d}_p = d \quad (1.68)$$

Parametry $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ jsou obecné parametry a nemají interpretovatelný význam.

Do této struktury lze transformovat jakýkoliv pozorovatelný systém $S : (A, b, c^T, d)$, přičemž transformační matici T určíme ze vztahu (1.63) při respektování $\bar{Q}_p = I$:

$$T = Q_p, \quad T^{-1} = Q_p^{-1} \quad (1.69)$$

Analogové schéma (parametry jsou bez proužků)



Frobeniova stavová reprezentace $\bar{S}_F : (\bar{A}_F, \bar{b}_F, \bar{c}_F^T, \bar{d}_F)$

Tato reprezentace je velmi často používaná z důvodu jednoduchého přechodu mezi vnějším a vnitřním popisem LDS v případech, kdy relativní řád systému je větší nebo roven 1.

- 1/ Matice dynamiky \bar{A}_F je shodná s maticí dynamiky normální formy pozorovatelnosti a obsahuje tedy opět parametry, které odpovídají koeficientům charakteristického polynomu matice A : $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$
- 2/ Nedochozí-li u LDS k přímému ovlivnění výstupu $y(t)$ vstupem $u(t)$, t.zn., že relativní řád systému je větší nebo roven 1 a ve výstupní rovnici stavové reprezentace je $\bar{d}_F = d = 0$, potom lze dokázat, že koeficienty matice $\bar{c}_F^T = [\bar{c}_1 \ \bar{c}_2 \ \dots \ \bar{c}_n]$ se rovnají přímo koeficientům na pravé straně odpovídající diferenciální rovnice

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_0u(t); \quad m < n$$

$$(b_0 = \bar{c}_1, b_1 = \bar{c}_2, \dots, b_{n-1} = \bar{c}_n)$$

a tedy i koeficientům v čitateli odpovídající přenosové funkce.

Struktura matic stavového modelu:

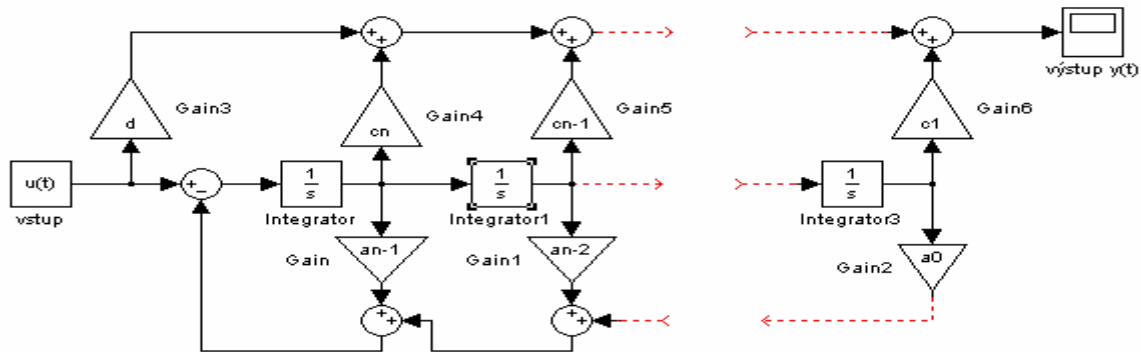
$$\bar{S}_p: \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_p \bar{x}(t) + \bar{b}_p u(t), \quad \text{kde} \quad \bar{A}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_p = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_n \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \bar{c}_p^T \bar{x}(t) + \bar{d}_p u(t) \quad \bar{c}_p^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad \bar{d}_p = d \quad (1.68)$$

Do této struktury lze transformovat jakýkoliv říditelný systém $S:(A,b,c^T,d)$, přičemž transformační matici T určíme ze vztahu (1.63):

$$T = \bar{Q}_f Q_f^{-1}, \quad T^{-1} = Q_f \bar{Q}_f^{-1} \quad (1.69)$$

Analogové schéma (parametry jsou bez proužků)



Příklad 1.5.:

LDS je popsán diferenciální rovnicí $\ddot{y}(t) + 0.4\dot{y}(t) + 0.25y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$.

$$(\text{odpovídající přenosová funkce je } F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p+2}{p^2+0.4p+0.25}).$$

Určete jeho stavový popis ve Frobeniově stavové reprezentaci a v normální formě říditelnosti a pozorovatelnosti.

Řešení:

Relativní řád systému je 1, a proto koeficienty diferenciální rovnice přímo vystupují ve Frobeniově normální formě

$$S_F: \dot{x}(t) = A_F x(t) + b_F u(t), \quad \text{kde} \quad A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.25 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad b_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_F^T = [2 \ 1]$$

$$y(t) = c_F^T x(t)$$

K Frobeniově formě určíme ekvivalentní **normální formu říditelnosti**

$$\bar{S}_f: \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_f \bar{x}(t) + \bar{b}_f u(t), \quad \text{kde} \quad \bar{A}_f = \begin{bmatrix} 0 & -0.25 \\ 1 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_f^T = [c_1 \ c_2] = ?$$

$$y(t) = \bar{c}_f^T \bar{x}(t)$$

Do této struktury lze transformovat říditelný systém S_F transformační maticí $T = Q_f^{-1}$, $T^{-1} = Q_f$ (viz 1.67).

$$\text{Matici } \bar{c}_f^T = [c_1 \ c_2] \text{ vypočteme ze vztahu } \bar{c}_f^T = c_F^T T^{-1} = c_F^T Q_f = [2 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.4 \end{bmatrix} = [1 \ 1.6].$$

Normální forma pozorovatelnosti \bar{S}_p je duální k normální formě říditelnosti \bar{S}_f :

$$\bar{A}_p = \bar{A}_f, \quad \bar{b}_p = \bar{c}_f, \quad \bar{c}_p^T = \bar{b}_f^T.$$