RIEŠENIE ÚLOH PROGRAMOVÉHO OPTIMÁLNEHO RIADENIA S KRITÉRIOM MINIMÁLNEJ SPOTREBY ENERGIE

(s využitím PPMaxima a metódy CITLIVOSTNÝCH FUNKCIÍ)

Úloha POR spočíva v nájdení riadenia $\boxed{u^*(t)}$, ktoré nelineárny DS prevedie z poč. stavu x_0 do predpísaného koncového stavu x_T, pričom minimalizuje funkcionál

$$\boxed{J(u(t)) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \langle u'(t), u(t)\rangle \, dt} \qquad (5\text{-}1)$$

Riešenie: ① Pri použití PPMaxima hore formulovanú úlohu prevedieme na riešenie dvojbodovej okrajovej úlohy obyč. DR

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f_N(x(t), p(t))\\ \dot{p}(t) &= g_N(x(t), p(t))\end{aligned}} \qquad (5\text{-}2)$$

s okrajovými podmienkami: $x(t_0) = x_0$, $x(T) = x_T$.

② Riešenie tejto okrajovej úlohy spočíva v nájdení takého vektora počiatočných podmienok $\boxed{p(0) = ?}$ pre ktorý $\boxed{x(T) = x_T}$.

! Určenie správneho vektora $p(0)$ pre NDS vyžaduje iteračný proces → METÓDA CITLIVOSTNÝCH FUNKCIÍ

③ Metódu citlivostných funkcií použijeme pre určenie vektora PP $\boxed{p(0)}$ konjugovanej sústavy.

Definujme korečné funkcie:

$$\boxed{U_{ij} = \frac{\partial x_i(t)}{\partial p_j(0)}} \quad \boxed{V_{ij}(t) = \frac{\partial p_i(t)}{\partial p_j(0)}} \qquad (5\text{-}3)$$

ktoré sú riešením citlivostných rovníc:

$$\boxed{\dot{U}_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i(\bar{x}(t), p(t))}{\partial x_k(t)} U_{kj}(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i(x(t), p(t))}{\partial p_k(t)} V_{kj}}$$

$$\boxed{\dot{V}_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i(x(t), p(t))}{\partial x_k(t)} U_{kj}(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i(x(t), p(t))}{\partial p_k(t)} V_{kj}} \quad (5-4)$$

$$U_{ij}(0) = 0 \quad ; \quad V_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (5-4a) \quad i,j = 1,2,\dots,n$$

④ „CR" (5-4) môžeme riešiť súčasne s rovnicami (5-1) pre NDS a z hodnôt $\boxed{U_{ij}(T)}$ vypočítať korekcie $\boxed{\Delta p_i}$ počiatočných hodnôt kovektora $\boxed{p_i(0)}$ pre nasledujúcu iteráciu.

ALGORITMUS PRE k-ty krok iteračného procesu

K1: V stanovenom časovom intervale $\langle 0, T\rangle$ vykonáme riešenie sústavy (5-2) $< \begin{matrix} NDR & \dot{x} = \\ KDR & \dot{p} = \end{matrix} \}$ s predpísanými počiatočnými podmienkami $\boxed{x(t_0) = x_0}$ a s približnými poč. podmienkami $\boxed{p_i(0) = p_i^k(0)}$ → PP ($p_i^0(0)$) volíme ľubovoľne.

K2. V $t = T$ si zapamätáme hodnoty $x_i^k(T)$ a $U_{ij}^k(T)$ pomocou ktorých vypočítame korekcie Δp_i^{k+1} počiatočných hodnôt kovektora pre (k+1) iteráciu z nasledujúcich rovníc:

$$\boxed{x_i^k(T) - x_{iT} = -\sum_{l=1}^{n} U_{il}^k(T)\, \Delta p_l^{k+1}} \quad i = 1,2,\dots,n \quad (5-5)$$

systém alg. rovníc

K3. počiatočné hodnoty p_i^{k+1} určíme :

$$\boxed{p_i^{k+1}(0) = p_i^{k}(0) + \Delta p_i^{(k+1)}} \qquad (5-6)$$

nová hodnota — predošlá iterácia — korekcia sa vypočíta

Body K1, K2, K3 opakujeme dovtedy, kým sa vypočítané hodnoty $\boxed{x_i^k(T)}$ nepriblížia čo najviac k požadovaným hodnotám $\boxed{x_{iT}}$ (zadané v okrajovej podmienke).

Príklad 1: Úloha na pevný pravý koniec

Uvažujme NDS reprezentovaný Van-der-Polovým oscilátorom :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (1-x_1^2).x_2 + u \end{aligned}} \qquad (1)$$

Úlohou je nájsť optimálne riadenie $u(t)$, ktoré prevedie systém (1) z poč. stavu $x_1(0) = 0.4$; $x_2(0) = 1$ → do koncového stavu : $x_1(T) = 1$; $x_2(T) = 0.2$; pričom sa minimalizuje funkcionál :

$$\boxed{J = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x_1^2 + x_2^2 + u^2\right) dt} \qquad (2)$$

Riešenie:

1. Vytvoriť Hamiltonovu funkciu :

$$H = -\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + u^2\right) + p_1 x_2 + p_2\left(-x_1 + u + (1-x_1^2)x_2\right) \qquad (3)$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}} \rightarrow \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\left(-x_1 - p_2 - 2p_2 x_1 x_2\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{p}_1 &= x_1 + p_2(1 + 2x_1x_2) \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} &= x_2 - p_1 - p_2(1 - x_1^2) \end{aligned}} \quad (4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow -u + p_2 = 0 \Rightarrow \boxed{u = p_2} \qquad (5)$$

(2)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x, p) = x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x, p) = -x_1 + p_2 + (1 - x_1^2)x_2 \end{aligned}\right\} \dot{x} = \dots$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_1 &= g_1(x, p) = x_1 + p_2(1 + 2x_1x_2) \\ \dot{p}_2 &= g_2(x, p) = x_2 - p_1 - (1 - x_1^2)p_2 \end{aligned}\right\} \dot{p} = \dots \qquad (6)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(0) &= 0.4 \\ x_1(1) &= 1 \end{aligned}} \;;\; \boxed{\begin{aligned} x_2(0) &= 1 \\ x_2(1) &= 0.2 \end{aligned}} \begin{aligned} &\rightarrow \text{Dyn. systém} \\ &\rightarrow \text{Konjug. syst. ?} \end{aligned}$$

$$\boxed{p_i(0) = ?}$$

(3) CITLIVOSTNÉ ROVNICE

$$\left[\begin{aligned} \dot{U}_{11} &= U_{21} \;;\quad \dot{U}_{12} = U_{22} \\ \dot{U}_{21} &= (-1 - 2x_1x_2)U_{11} + (1 - x_1^2)U_{21} + V_{21} \\ \dot{U}_{22} &= (-1 - 2x_1x_2)U_{12} + (1 - x_1^2)U_{22} + V_{22} \end{aligned}\right\} \dot{U}_{ij}$$

$$\left[\begin{aligned} \dot{V}_{11} &= (1 + 2p_2x_2)U_{11} + 2x_1p_2U_{21} + (1 + 2x_1x_2)V_{21} \\ \dot{V}_{12} &= (1 + 2p_2x_2)U_{12} + 2x_1p_2U_{22} + (1 + 2x_1x_2)V_{22} \\ \dot{V}_{21} &= 2x_1p_2U_{11} + U_{21} - V_{11} + (x_1^2 - 1)V_{21} \\ \dot{V}_{22} &= 2x_1p_2U_{12} + U_{22} - V_{12} + (x_1^2 - 1)V_{22} \end{aligned}\right\} \dot{V}_{ij} \qquad (7)$$

$$V_{11}(0) = 1 \,;\; V_{12}(0) = 0 \,;\; V_{21}(0) = 0 \,;\; V_{22}(0) = 1 \quad \boxed{U_{ij}(0) = 0} \quad \begin{aligned} i &= 1,2 \,;\; k = 1,2 \\ j &= 1,2 \,; \end{aligned}$$

④. Výpočet korekcií $\Delta p_i(0) \rightarrow$ riešiť sústavu algebraických rovníc (5-5) $\rightarrow \Delta p_i^{k+1}$ 5-P-ONS-5

⑤ Test na splnenie koncovej podmienky $: |x_{iT} - x_i(T)| < \varepsilon$

$\Downarrow$ vyriešiť algoritmicky v sw j. MATLAB

PR2: Nájdite riadenie $u(t)$, ktoré systém (8)

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u(t) - x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) - x_1(t)x_2(t) \end{aligned}}$$

(8) prevedie z poč. stavu $x_1(0)=0$, $x_2(0)=1$ $\downarrow$ do koncového stavu $x_1(1)=1$; $x_2(1)=2$ a minimalizuje funkcionál $J(u)$:

$$J(u) = \int_0^1 [1 + x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)]\, dt .$$

Riešenie daného pr. vykonajte numericky v sw j. M/S

Hačte jednotlivé iterácie pre $x_1(t)$, $x_2(t)$ a výsledné $u^*(t)$.

① HAMILTONOVA FUNKCIA :

(9)

$$\boxed{H(x, u, t) = -(\underbrace{1 + x_1^2 + x_2^2 + u^2}) + (u - x_2^2)p_1 + (u - x_1x_2)p_2}$$

② Vytvoriť $\dot{p}_1(t)$ a $\dot{p}_2(t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2p_2 \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = x_1p_2 + 2x_2(1 + p_1) \end{aligned}}$$

$\rightarrow$ (10) systém združených DR

③ V zmysle Pontrjaginovho PMaxima $\rightarrow$ optimálne riadenie maximalizuje Hamiltonovu fciu $\Rightarrow$ musí vyhovovať podmienke :

(11)

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + p_1 + p_2 = 0 \Rightarrow \boxed{u(t) = 0{,}5(p_1 + p_2)}$$

④ Dosadením $u(t) \leftrightarrow (11)$ do $(10) \rightarrow$ združený SDR :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x,p) = -x_2^2 + 0{,}5(p_1+p_2) ; & x_1(0)=0 ; \quad x_1(1) = 1 \\ \dot{x}_2 = f_2(x,p) = -x_1x_2 + 0{,}5(p_1+p_2) ; & x_2(0)=1 ; \quad x_2(1)=2 . \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = g_1(x,p) = 2x_1 + x_2p_2 \\ \dot{p}_2 = g_2(x,p) = x_1p_2 + 2x_2(p_1+1) \end{cases} \quad p_i(0) = ?$$

iteračne $\leftrightarrow$ aby hľadať

⑤ Výpočet citlivostných rovníc $\rightarrow$ zostaviť ich (symb. MATH. TOOL)

$$\dot{U}_{11} = -2x_2U_{21} + 0{,}5V_{11} + 0{,}5V_{21} ; \quad U_{11}(0)=0$$
$$\dot{U}_{12} = -2x_2U_{22} + 0{,}5V_{12} + 0{,}5V_{22} ; \quad U_{12}(0)=0$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Za nulté priblíženie poč. hodnôt združených premenných $p_1(0) = p_2(0) = 1$. Vypočítajte hodnotu funkcionálu $J(u) = \dots$

II. Úlohy s voľným pravým koncom $\rightarrow$ oproti prípadu I. sa líšia tým, že v čase $t=T$ hodnoty premenných $x_1(t)$ a $x_2(t)$ nie sú predpisané ($x(0)=x^0$ a $p(T)=0$)

Metódu CR $\cong$ korekčných funkcií možno použiť avšak pre výpočet korekcií počiatočných hodnôt združených premenných využívame hodnoty korekčných funkcií $V_{ij}(t)$ v čase $t=T$: $\rightarrow$ hľadáme (počítame

$$\boxed{p_i^k(T) = -\sum_{l=1}^{n} \underbrace{V_{il}^k(T)}\,\Delta p_l^{k+1}} \quad i = 1,2,\dots,n$$

$?$

PR : $\dot{x}(t) = -x(t) - \frac{x^3(t)}{3} + u(t)$; $x(0)=0$; $\Big\}$ $p(1)=0$, $p(0) = ?$

$J(u) = 1/2 \int_0^1 [x^2 + u^2]\,dt \rightarrow MIN$