

FAKULTA  
ELEKTROTECHNIKY  
A KOMUNIKAČNÍCH  
TECHNOLOGIÍ

# Řízení a regulace II

Analýza a řízení nelineárních systémů

Verze 1.27 4. ledna 2011

Prof. Ing. František Šolc, CSc.

Ing. Pavel Václavek, Ph.D.

Prof. Ing. Petr Vavřín, DrSc.



<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Základní rozdíly mezi lineárními a nelineárními systémy</b>	<b>11</b>
2.1	<i>Motivace</i>	11
2.2	Neplatnost principu superpozice	12
2.3	Stabilita nelineárních systémů	14
2.4	<i>Shrnutí kapitoly 2</i>	14
2.5	<i>Kontrolní otázky pro kapitolu 2</i>	15
<b>3</b>	<b>Kategorie nelineárních systémů a jejich popis</b>	<b>15</b>
3.1	<i>Motivace</i>	15
3.2	Systémy bez dynamiky	15
3.2.1	Systémy bez paměti	15
3.2.2	Systémy s pamětí	22
3.2.3	Typické nelinearity	24
3.3	Nelineární dynamické systémy	28
3.4	<i>Shrnutí kapitoly 3</i>	29
3.5	<i>Kontrolní otázky pro kapitolu 3</i>	29
3.6	<i>Řešené příklady pro kapitolu 3</i>	30
3.7	<i>Neřešené příklady pro kapitolu 3</i>	30
<b>4</b>	<b>Analýza nelineárních dynamických systémů</b>	<b>30</b>
4.1	Stavová trajektorie a ustálené stavy nelineárních systémů	30
4.1.1	<i>Motivace</i>	30
4.1.2	Stavová trajektorie	31
4.1.3	Rovnovážné stavy	32
4.1.4	Mezní cyklus	34
4.1.5	<i>Shrnutí kapitoly 4.1</i>	36
4.1.6	<i>Kontrolní otázky pro kapitolu 4.1</i>	36
4.1.7	<i>Řešené příklady pro kapitolu 4.1</i>	36
4.1.8	<i>Neřešené příklady pro kapitolu 4.1</i>	39
4.2	Linearizace rozvojem do Taylorovy řady	39
4.2.1	<i>Motivace</i>	39
4.2.2	Postup linearizace rozvojem do Taylorovy řady	39
4.2.3	<i>Shrnutí kapitoly 4.2</i>	43
4.2.4	<i>Kontrolní otázky pro kapitolu 4.2</i>	43
4.2.5	<i>Řešené příklady pro kapitolu 4.2</i>	44
4.2.6	<i>Neřešené příklady pro kapitolu 4.2</i>	45
4.3	Konstrukce trajektorie systému	46
4.3.1	<i>Motivace</i>	46
4.3.2	Trajektorie systémů prvního řádu	46
4.3.3	Trajektorie systémů druhého řádu	54
4.3.4	Trajektorie lineárních systémů druhého řádu	69
4.3.5	Vyšetření existence mezního cyklu systémů druhého řádu	75
4.3.6	<i>Shrnutí kapitoly 4.3</i>	82

4.3.7	<i>Kontrolní otázky pro kapitolu 4.3</i>	83
4.3.8	<i>Řešené příklady pro kapitolu 4.3</i>	83
4.3.9	<i>Neřešené příklady pro kapitolu 4.3</i>	90
4.4	Harmonická linearizace	91
4.4.1	<i>Motivace</i>	91
4.4.2	Ekvivalentní přenos	91
4.4.3	Metoda harmonické rovnováhy	95
4.4.4	Mezní cykly řízených systémů	100
4.4.5	Určení frekvenční charakteristiky	106
4.4.6	<i>Shrnutí kapitoly 4.4</i>	109
4.4.7	<i>Kontrolní otázky pro kapitolu 4.4</i>	109
4.4.8	<i>Řešené příklady pro kapitolu 4.4</i>	109
4.4.9	<i>Neřešené příklady pro kapitolu 4.4</i>	117
4.5	Stabilita nelineárních systémů	118
4.5.1	<i>Motivace</i>	118
4.5.2	Ljapunovova definice stability	118
4.5.3	Ljapunovova funkce	121
4.5.4	Věty o stabilitě	126
4.5.5	Volba Ljapunovovy funkce	132
4.5.6	Popovovo kritérium stability	137
4.5.7	Věty o nestabilitě	141
4.5.8	<i>Shrnutí kapitoly 4.5</i>	144
4.5.9	<i>Kontrolní otázky pro kapitolu 4.5</i>	144
4.5.10	<i>Řešené příklady pro kapitolu 4.5</i>	144
4.5.11	<i>Neřešené příklady pro kapitolu 4.5</i>	149
<b>5</b>	<b>Řízení nelineárních systémů</b>	<b>150</b>
5.1	Řízení v okolí zvoleného pracovního bodu	150
5.1.1	<i>Motivace</i>	150
5.1.2	Lineární řízení v okolí pracovního bodu	150
5.1.3	Anti wind-up	156
5.1.4	<i>Shrnutí kapitoly 5.1</i>	158
5.1.5	<i>Kontrolní otázky pro kapitolu 5.1</i>	158
5.2	Zpětnovazební linearizace	158
5.2.1	<i>Motivace</i>	158
5.2.2	Linearizace vstup – stav	159
5.2.3	Linearizace vstup – výstup	161
5.2.4	<i>Shrnutí kapitoly 5.2</i>	162
5.2.5	<i>Kontrolní otázky pro kapitolu 5.2</i>	162
5.2.6	<i>Řešené příklady pro kapitolu 5.2</i>	163
5.2.7	<i>Neřešené příklady pro kapitolu 5.2</i>	164
5.3	Reléové systémy	165
5.3.1	<i>Motivace</i>	165
5.3.2	Řízení s použitím reléového regulátoru	166

5.3.3	Návrh reléového regulátoru na základě Ljapunovovy teorie stability	175
5.3.4	<i>Shrnutí kapitoly 5.3</i>	177
5.3.5	<i>Kontrolní otázky pro kapitolu 5.3</i>	177
5.4	Řízení v klouzavém režimu	178
5.4.1	<i>Motivace</i>	178
5.4.2	Návrh regulátoru v klouzavém režimu	178
5.4.3	<i>Shrnutí kapitoly 5.4</i>	184
5.4.4	<i>Kontrolní otázky pro kapitolu 5.4</i>	185
5.4.5	<i>Řešené příklady pro kapitolu 5.4</i>	185
5.4.6	<i>Neřešené příklady pro kapitolu 5.4</i>	189
<b>6</b>	<b>Modelování a simulace nelineárních systémů</b>	<b>189</b>
6.1	Řešitelnost modelu nelineárního systému	189
6.1.1	<i>Motivace</i>	189
6.1.2	Ověření řešitelnosti popisu nelineárního systému	189
6.1.3	<i>Shrnutí kapitoly 6.1</i>	193
6.1.4	<i>Kontrolní otázky pro kapitolu 6.1</i>	193
6.2	Simulace nelineárních systémů v prostředí Matlab Simulink	194
6.2.1	<i>Motivace</i>	194
6.2.2	Odstranění algebraické smyčky	194
6.2.3	Realizace nelineárních bloků	194
6.2.4	<i>Shrnutí kapitoly 6.2</i>	194
6.2.5	<i>Kontrolní otázky pro kapitolu 6.2</i>	194
<b>7</b>	<b>Identifikace řízených objektů</b>	<b>194</b>
7.1	<i>Motivace</i>	194
7.2	Metoda nejmenších čtverců	195
7.3	Identifikace nelineárních systémů	199
7.4	<i>Shrnutí kapitoly 7</i>	209
7.5	<i>Kontrolní otázky pro kapitolu 7</i>	209
<b>8</b>	<b>Závěr</b>	<b>209</b>
<b>A</b>	<b>Odpovědi na kontrolní otázky</b>	<b>210</b>
A.1	Odpovědi na otázky vstupního testu	210
A.2	Odpovědi na otázky kapitoly 2	210
A.3	Odpovědi na otázky kapitoly 3	210
A.4	Odpovědi na otázky kapitoly 4.1	211
A.5	Odpovědi na otázky kapitoly 4.2	211
A.6	Odpovědi na otázky kapitoly 4.3	211
A.7	Odpovědi na otázky kapitoly 4.4	211
A.8	Odpovědi na otázky kapitoly 4.5	212
A.9	Odpovědi na otázky kapitoly 5.1	212
A.10	Odpovědi na otázky kapitoly 5.2	212
A.11	Odpovědi na otázky kapitoly 5.3	213

---

A.12	Odpovědi na otázky kapitoly 5.4 . . . . .	213
A.13	Odpovědi na otázky kapitoly 6.1 . . . . .	213
A.14	Odpovědi na otázky kapitoly 6.2 . . . . .	213
A.15	Odpovědi na otázky kapitoly 6.2 . . . . .	214
<b>B</b>	<b>Výsledky neřešených příkladů</b>	<b>215</b>
<b>C</b>	<b>Vybrané pojmy z matematiky</b>	<b>219</b>
C.1	Vlastní čísla matice . . . . .	219
C.2	Definitnost funkce . . . . .	219
C.3	Kvadratická forma . . . . .	220
C.4	Inverze matice . . . . .	220
C.5	Divergence . . . . .	221
C.6	Vztahy pro goniometrické funkce . . . . .	221

## Seznam obrázků

1.1	Kyvadlo . . . . .	11
2.1	Nelineární systém . . . . .	12
3.1	Operační zesilovač . . . . .	16
3.2	Operační zesilovač s diodovým omezovačem napětí . . . . .	21
3.3	Grafické řešení rovnice (3.34) . . . . .	22
3.4	Nelinearita typu vůle v převodech . . . . .	23
3.5	Grafické řešení nelinearity typu vůle v převodech . . . . .	24
3.6	Nelinearita nasycení . . . . .	24
3.7	Nelinearita necitlivost . . . . .	25
3.8	Releové charakteristiky . . . . .	26
3.9	Nelinearita tření . . . . .	27
3.10	Obecná nelinearita . . . . .	27
3.11	Nelineární matematické operace . . . . .	28
3.12	Nelineární systém s oddělenou lineární a nelineární částí . . . . .	29
4.1	Stavová trajektorie . . . . .	31
4.2	Těleso na podložce . . . . .	34
4.3	Druhy mezních cyklů . . . . .	35
4.4	Obvod s tunelovou diodou z příkladu 4.6 . . . . .	37
4.5	Voltampérová charakteristika tunelové diody . . . . .	37
4.6	Řešení rovnovážných stavů z příkladu 4.6 . . . . .	38
4.7	Proporcionální regulátor s nasycením . . . . .	43
4.8	Směrový vektor . . . . .	46
4.9	Pole směrových vektorů . . . . .	47
4.10	Trajektorie jednoduchého systému s nelinearitou typu nasycení . . . . .	49
4.11	Trajektorie jednoduchého systému s nelinearitou typu nasycení - regulační odchylka . . . . .	50
4.12	Releový regulátor výšky hladiny . . . . .	51
4.13	Stavové schema regulace výšky hladiny . . . . .	51
4.14	Stavová trajektorie regulace výšky hladiny . . . . .	53
4.15	Stavová trajektorie systému s dynamickým mazáním . . . . .	54
4.16	Stavová trajektorie . . . . .	56
4.17	Stavové schema z příkladu 4.20 . . . . .	57
4.18	Pole směrových vektorů a trajektorie z příkladu 4.20 . . . . .	58
4.19	Trajektorie systému z příkladu 4.21 . . . . .	61
4.20	Určení času na fázové trajektorii . . . . .	61
4.21	Určení časového průběhu stavové veličiny z fázové trajektorie . . . . .	62
4.22	Regulační obvod s nasycením z příkladu 4.22 . . . . .	63
4.23	Fázový portrét systému z příkladu 4.22 pro konstantní řízení . . . . .	66
4.24	Fázový portrét systému z příkladu 4.22 pro pomalu lineárně narůstající vstupní signál . . . . .	68
4.25	Fázový portrét systému z příkladu 4.22 pro rychle lineárně narůstající vstupní signál . . . . .	69

4.26 Stavové portréty lineárních systémů v Jordanově kanonickém tvaru v rovině $(z_1, z_2)$ . . . . .	72
4.27 Stavové portréty lineárních systémů v Jordanově kanonickém tvaru v rovině $(x_1, x_2)$ . . . . .	73
4.28 Stavové portréty lineárních systémů v Jordanově kanonickém tvaru . . . . .	73
4.29 Stavový portrét systému matematického kyvadla . . . . .	75
4.30 Poincaré-Bendixonův teorém . . . . .	77
4.31 Hrubý náčrt fázového portréту z příkladu 4.26 . . . . .	80
4.32 Náčrt fázového portréту a trajektorie z příkladu 4.26 . . . . .	80
4.33 Metoda bodových transformací . . . . .	81
4.34 Grafické vyšetření stability mezního cyklu . . . . .	82
4.35 Blokové schema systému z příkladu 4.27 . . . . .	83
4.36 Stavový portrét systému z příkladu 4.27 . . . . .	85
4.37 Stavový portrét systému z příkladu 4.28 . . . . .	88
4.38 Stavový portrét Van der Pol oscilátoru z příkladu 4.30 . . . . .	90
4.39 Blokové schema systému z příkladu 4.32 . . . . .	91
4.40 Ekvivalentní přenos . . . . .	92
4.41 Konfigurace pro metodu harmonické rovnováhy . . . . .	95
4.42 Zjišťování existence mezních cyklů řešením rovnice (4.240) při ekvivalentním přenosu nezávislém (a,b,c) a závislém (d) na frekvenci . . . . .	96
4.43 Stabilita mezních cyklů . . . . .	97
4.44 Regulační soustava s reléovým regulátorem . . . . .	98
4.45 Řešení mezního cyklu systému z obr. 4.44 . . . . .	99
4.46 Obecnější konfigurace pro použití metody harmonické rovnováhy . . . . .	99
4.47 Regulační obvod s reléovým regulátorem . . . . .	104
4.48 Závislost amplitudy první harmonické na parametrech nesymetrického vstupního signálu při kmitech 1. typu z příkladu 4.36 . . . . .	105
4.49 Závislost amplitudy první harmonické na parametrech nesymetrického vstupního signálu při kmitech 2. typu z příkladu 4.36 . . . . .	106
4.50 Závislost stejnosměrné složky na parametrech nesymetrických kmitů z příkladu 4.36 . . . . .	107
4.51 Nelineární regulační obvod . . . . .	107
4.52 Grafické řešení příkladu 4.37 . . . . .	108
4.53 Frekvenční charakteristika systému z příkladu 4.37 . . . . .	108
4.54 Blokové schema systému z příkladu 4.38 . . . . .	109
4.55 Grafické řešení příkladu 4.38 . . . . .	110
4.56 Blokové schema systému z příkladu 4.39 . . . . .	111
4.57 Modifikované blokové schema systému z příkladu 4.39 . . . . .	111
4.58 Časový průběh výstupu z nelinearity z příkladu 4.39 . . . . .	114
4.59 Blokové schema Van der Polova oscilátoru z příkladu 4.40 . . . . .	114
4.60 Závislost podoby mezního cyklu Van der Polova oscilátoru z příkladu 4.40 na parametru $\alpha$ . . . . .	116
4.61 Poměr zesílení první a třetí harmonické lineární částí Van der Polova oscilátoru . . . . .	117



4.62	Blokové schema systému z příkladu 4.41 . . . . .	117
4.63	Trajektorie systému z příkladu 4.44 . . . . .	120
4.64	Mechanický tlumič . . . . .	123
4.65	Křivky konstantní energie z příkladu 4.45 . . . . .	124
4.66	Objasnění věty o lokální stabilitě . . . . .	127
4.67	Nelineární regulační systém . . . . .	128
4.68	Průběh nelineární funkce . . . . .	129
4.69	Vysvětlení teorému o globální stabilitě . . . . .	130
4.70	Řízená družice . . . . .	130
4.71	Nelineární regulační systém . . . . .	133
4.72	Základní konfigurace regulačního systému pro použití Popovova kritéria stability . . . . .	137
4.73	Sektor, ve kterém se může nacházet nelinearita při použití Popovova kritéria stability . . . . .	138
4.74	Zjišťování stability podle Popovova kritéria . . . . .	139
4.75	Regulační obvod z příkladu 4.51 . . . . .	140
4.76	Modifikovaná frekvenční charakteristika systému z příkladu 4.51 . . . . .	140
4.77	Transformace pólů . . . . .	141
4.78	Transformace nelinearity . . . . .	141
4.79	Charakteristika bistabilního obvodu s tunelovou diodou . . . . .	146
4.80	Napětí na tunelové diodě během přechodu mezi rovnovážnými stavy . . . . .	146
4.81	Blokové schema systému z příkladu 4.57 . . . . .	147
4.82	Modifikovaná frekvenční charakteristika $F_a^*(j\omega)$ systému z příkladu 4.57 . . . . .	148
4.83	Blokové schema systému z příkladu 4.58 . . . . .	149
5.1	Schema systému k výkladu návrhu regulátoru pro linearizovaný systém . . . . .	150
5.2	Struktura PI regulátoru z příkladu 5.2 . . . . .	154
5.3	Blokové schema regulačního obvodu s nasycením akční veličiny . . . . .	156
5.4	Vznik wind-up jevu . . . . .	156
5.5	Potlačení wind-up jevu s měřením skutečné hodnoty akční veličiny . . . . .	157
5.6	Potlačení wind-up jevu s modelem omezení akční veličiny . . . . .	158
5.7	Reléový regulátor teploty . . . . .	166
5.10	Průběh regulace teploty . . . . .	166
5.8	Potlačení vibrací elektromechanických spínacích prvků pomocí hystereze . . . . .	167
5.9	Stavové schema regulátoru teploty . . . . .	167
5.11	Snížení hystereze pomocí zpětné vazby . . . . .	168
5.12	Principiální schéma polohového servomechanismu . . . . .	168
5.13	Stavové schema reléového servomechanismu . . . . .	169
5.14	Fázová trajektorie polohového servomechanismu . . . . .	170
5.15	Fázové trajektorie polohového servomechanismu s dynamickým brzděním a zápornou rychlostní zpětnou vazbou . . . . .	172
5.16	Stavový portrét polohového servomechanismu pracujícího v „klouzavém režimu“ . . . . .	172
5.17	Stavový portrét . . . . .	173
5.18	Regulace astatické soustavy . . . . .	174

5.20	Trajektorie časově optimálního systému . . . . .	174
5.19	Trajektorie systému z obr. 5.18 s P regulátorem s proměnným zesílením . .	175
5.21	Časově optimální regulátor polohy . . . . .	176
5.22	Struktura reléového systému z příkladu 5.10 . . . . .	177
5.23	Stavová trajektorie regulačního děje z příkladu 5.11 . . . . .	183
5.24	Aproximace reléové charakteristiky spojitou funkcí . . . . .	185
6.1	Zapojení s operačním zesilovačem . . . . .	191
6.2	Model zapojení s operačním zesilovačem . . . . .	191
6.3	Odezva na jednotkový skok . . . . .	192
6.4	Vliv integrační metody a kroku výpočtu na výsledek simulace . . . . .	193
7.1	Princip identifikace parametrů systému . . . . .	196
7.2	Příprava dat pro rekurzivní metodu nejmenších čtverců . . . . .	200
7.3	Úpravy simplexu při minimalizaci funkce metodou Nelder–Mead . . . . .	202
7.4	Výstup systému z příkladu 7.1 . . . . .	205
7.5	Model systému z příkladu 7.1 v prostředí Matlab-Simulink – <i>origsys.mdl</i> .	206
7.6	„Gray-box“ model systému z příkladu 7.1 v prostředí Matlab-Simulink – <i>model.mdl</i> . . . . .	207

## Seznam tabulek

3.1	Výsledky linearizace funkce $y = e^u$ . . . . .	19
4.1	Stavové trajektorie lineárních t-invariantních systémů prvního řádu . . . . .	48
4.2	Složky ekvivalentních přenosů typických nelinearit při symetrickém vstupním signálu $e = A \sin \omega t$ . . . . .	94
4.3	Složky ekvivalentních přenosů typických nelinearit při nesymetrickém vstupním signálu $e = e_0 + A \sin \omega t$ . . . . .	101
4.4	Význam funkcí v tabulce 4.3 . . . . .	102

## Test vstupních znalostí

1. Jaký je rozvoj funkce  $f(x)$  do Taylorovy řady v okolí bodu  $x_0$
2. Jaký je rozvoj funkce  $f(x)$  do Fourierovy řady
3. Pokud je lineární regulační obvod na mezi stability, frekvenční charakteristika otevřené smyčky v komplexní rovině
  - a) prochází vlevo kolem bodu  $(1, 0)$  pro narůstající frekvenci
  - b) prochází vpravo kolem bodu  $(-1, 0)$  pro narůstající frekvenci
  - c) prochází bodem  $(-1, 0)$
  - d) prochází bodem  $(1, 0)$
4. Vnitřním popisem dynamického systému rozumíme
  - a) soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu
  - b) operátorový přenos
  - c) frekvenční charakteristiku
  - d) stavové rovnice v maticovém zápisu
5. stavové rovnice lineárního dynamického systému se spojitým časem jsou
  - (a)  $\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$
  - (b)  $\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad \frac{dy}{dt} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$
  - (c)  $\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad \frac{dy}{dt} = \mathbf{Cy} + \mathbf{Du}$
  - (d)  $\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad \mathbf{y} = \mathbf{Cy} + \mathbf{Dx}$
6. vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  stavového popisu odpovídají
  - a) koeficientům jmenovatele operátorového přenosu
  - b) kořenům charakteristického polynomu soustavy
  - c) koeficientům čitatele operátorového přenosu
7. funkce  $V(x_1, x_2)$  je pozitivně definitní, jestliže
  - a)  $V(x_1, x_2) \geq 0$  pro  $x_1 \geq 0$  a  $x_2 \geq 0$
  - b)  $V(x_1, x_2) > 0$  pro  $x_1 \geq 0$  a  $x_2 \geq 0$
  - c)  $V(x_1, x_2) > 0$  pro jakékoli  $x_1, x_2$
  - d)  $V(x_1, x_2) > 0$  pro jakékoli  $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$  a současně  $V(0, 0) = 0$

Správné odpovědi jsou uvedeny v dodatku **A**

# 1 Úvod

Během studia předmětu Regulace a řízení I byly řešeny úlohy z oblasti analýzy chování a řízení systémů popsaných lineárními závislostmi. Pokud se však podrobněji podíváme na formulaci fyzikálních zákonů popisujících okolní svět, v řadě případů zjistíme, že se v nich vyskytují nelineární závislosti, přičemž se může jednat o popis i velice jednoduchých systémů. Jako příklad lze uvést kyvadlo zobrazené na obr. 1.1.

Pohybová rovnice kyvadla je dána vztahem

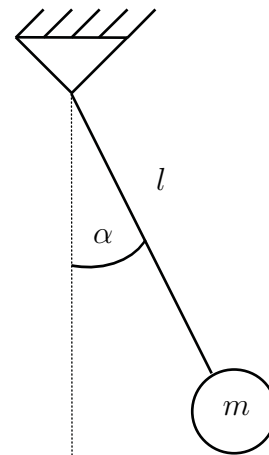
$$ml \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mg \sin \alpha \quad (1.1)$$

kde  $g$  je tíhové zrychlení. Není pochyb, že uvedená závislost je nelineární vzhledem k přítomnosti nelineární funkce sinus. Pouze pro velmi malé hodnoty výchylky kyvadla  $\alpha$  lze přibližně napsat

$$\alpha \ll 1 \Rightarrow \sin \alpha \approx \alpha \quad (1.2)$$

a pohyb kyvadla popsat lineární diferenciální rovnicí

$$ml \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mg\alpha \quad (1.3)$$



Obrázek 1.1: Kyvadlo

V některých případech je tedy možné najít takový lineární popis daného systému, že při dodržení zvolených omezujících podmínek bude lineární popis dobře reprezentovat studovaný nelineární systém. V řadě případů však vhodný lineární popis není možné použít a pak musí být použity metody analýzy a návrhu řídicích algoritmů určené přímo pro nelineární systémy. Tyto metody budou obsahem studia předmětu Regulace a řízení II. Učební text pro tento předmět vychází částečně ze skript, která lze doporučit jako doplňkovou literaturu

## 2 Základní rozdíly mezi lineárními a nelineárními systémy

### 2.1 Motivace

Během kurzu Regulace a řízení I byly řešeny úlohy z oblasti lineárních systémů. Nelineární systémy jsou popsány obecně nelineárními funkcemi. Množina nelineárních systémů je tedy nadmnožinou systémů lineárních. Z toho vyplývá, že veškerá tvrzení platná pro nelineární systémy je možné aplikovat na systémy lineární, ne však naopak. Zásadními rozdíly v chování lineárních a nelineárních systémů se budeme zabývat v následující části.

## 2.2 Neplatnost principu superpozice

Pro každý lineární systém platí tak zvaný princip superpozice definovaný větou

**Věta 2.1** *Pro každý lineární dynamický systém platí princip superpozice: Nechť  $\mathbf{u}_1(t)$  a  $\mathbf{u}_2(t)$  jsou dva rozdílné průběhy vstupních signálů působící na systém s počátečními podmínkami  $\mathbf{x}_1(t_0), \mathbf{x}_2(t_0)$ . Dále  $\mathbf{y}_1(t)$  a  $\mathbf{y}_2(t)$  jsou příslušné průběhy výstupů systému a  $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$  průběhy stavových veličin pro uvedené dva vstupní signály. Je-li při počáteční podmínce*

$$\mathbf{x}(t_0) = \alpha_1 \mathbf{x}_1(t_0) + \alpha_2 \mathbf{x}_2(t_0) \quad (2.1)$$

na vstup lineárního systému přiveden signál

$$\mathbf{u}(t) = \alpha_1 \mathbf{u}_1(t) + \alpha_2 \mathbf{u}_2(t) \quad (2.2)$$

systém odpoví na svém výstupu signálem

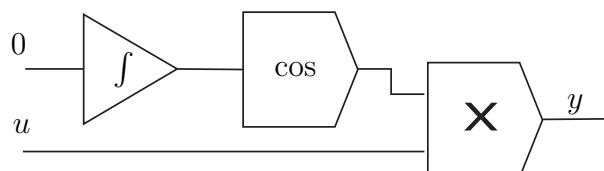
$$\mathbf{y}(t) = \alpha_1 \mathbf{y}_1(t) + \alpha_2 \mathbf{y}_2(t) \quad (2.3)$$

přičemž průběh stavových veličin bude dán vztahem

$$\mathbf{x}(t) = \alpha_1 \mathbf{x}_1(t) + \alpha_2 \mathbf{x}_2(t) \quad (2.4)$$

U nelineárních systémů princip superpozice neplatí, což je možné snadno ověřit jak je ukázáno v následujícím příkladě

**Příklad 2.1** *Je dán systém, jehož struktura je zachycena na obrázku 2.1.*



**Obrázek 2.1:** Nelineární systém

Chování systému lze popsat rovnicemi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0 \\ y &= u \cos x \end{aligned} \quad (2.5)$$

jejichž řešení je velice jednoduché a vede na

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) \\ y(t) &= u(t) \cos x(t_0) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Při vstupním signálu  $u_1(t)$  a počátečním stavu  $x_1(t_0)$  pak bude platit pro stav systému

$$x_1(t) = x_1(t_0) \quad (2.7)$$

a výstup

$$y_1(t) = u_1(t) \cos x_1(t_0) \quad (2.8)$$

Obdobně pro vstupní signál  $u_2(t)$  a počáteční stav  $x_2(t_0)$  dostaneme

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_2(t_0) \\ y_2(t) &= u_2(t) \cos x_2(t_0) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nyní předpokládejme, že systém bude v čase  $t_0$  v počátečním stavu

$$x_3(t_0) = \alpha x_1(t_0) + \beta x_2(t_0) \quad (2.10)$$

a na systém bude působit vstupní signál

$$u_3(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t) \quad (2.11)$$

Pro stav systému pak platí

$$x_3(t) = x_3(t_0) = \alpha x_1(t_0) + \beta x_2(t_0) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \quad (2.12)$$

a princip superpozice je splněn. Výstup systému je dán vztahem

$$y_3(t) = u_3(t) \cos x_3(t_0) = [\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)] \cos [\alpha x_1(t_0) + \beta x_2(t_0)] \quad (2.13)$$

Pro splnění principu superpozice by muselo platit

$$y_3(t) = \alpha u_1(t) \cos x_1(t_0) + \beta u_2(t) \cos x_2(t_0) \quad (2.14)$$

Je však zřejmé, že

$$\begin{aligned} [\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)] \cos [\alpha x_1(t_0) + \beta x_2(t_0)] &\neq \\ &\neq \alpha u_1(t) \cos x_1(t_0) + \beta u_2(t) \cos x_2(t_0) \end{aligned} \quad (2.15)$$

a princip superpozice tedy splněn není. Zkoumaný systém obsahuje nelineární závislost vzhledem k použití funkce kosinus pro výpočet hodnoty výstupu a výsledek řešeného příkladu tedy odpovídá předpokladu, že nelineární systémy nesplňují princip superpozice.

Neplatnost principu superpozice má významné následky. Principu superpozice totiž využívají integrální transformace, které jsou ve velké míře používány v oblasti lineárních systémů. Pro popis nelineárních systémů pak není možné použít operátorový přenos (Laplaceova transformace) ani frekvenční charakteristiky (Fourierova transformace). Neplatnost principu superpozice je rovněž třeba zvážit při používání blokové algebry.

## 2.3 Stabilita nelineárních systémů

Stabilita lineárních dynamických systémů byla studována v kurzech Signály a systémy a rovněž v kurzu Regulace a řízení 1. Připomeňme jen, že stabilita lineárního dynamického systému popsaného vstupně-výstupním popisem prostřednictvím operátorového přenosu

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{B(p)}{A(p)} \quad (2.16)$$

kde  $Y(p)$  je obraz výstupního signálu  $y(t)$  v Laplaceově transformaci,  $U(p)$  je obraz vstupního signálu,  $A(p)$  je polynom ve jmenovateli operátorového přenosu  $F(p)$  a  $B(p)$  je polynom v čitateli operátorového přenosu, je určena polohou kořenů polynomu  $A(p)$ . Lineární systém je stabilní právě tehdy, když všechny kořeny polynomu  $A(p)$  (póly operátorového přenosu) leží v levé polorovině komplexní roviny „ $p$ “. Obdobně stabilita lineárního dynamického systému zadaného stavovým popisem

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.17)$$

kde  $\mathbf{x}$  je vektor stavových veličin,  $\mathbf{u}$  je vektor vstupních hodnot,  $\mathbf{A}$  je matice zpětných vazeb a  $\mathbf{B}$  je matice vazeb vstupů na stavové veličiny, je určena polohou vlastních čísel matice  $\mathbf{A}$ . Platí, že lineární dynamický systém je stabilní právě tehdy, když všechna vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  leží v levé polorovině roviny „ $p$ “. Je tedy zřejmé, že v případě lineárních systémů je stabilita určena výhradně vnitřní strukturou systému a lineární dynamický systém bude tedy vždy stabilní (respektive nestabilní) bez ohledu na hodnotu vstupů nebo počáteční stav.

V případě nelineárních systémů je situace zcela jiná. Nelineární systém může být pro určité hodnoty vstupů a počáteční stav stabilní, pro jiné hodnoty nestabilní. Detailně bude tato vlastnost diskutována v kapitole 4.

## 2.4 Shrnutí kapitoly 2

Zvláštnosti nelineárních systémů tedy můžeme shrnout do následujících bodů:

- tvrzení platná pro nelineární systémy platí i pro systémy lineární, opak neplatí
- neplatí princip superpozice
- pro popis nelineárního systému není možné použít operátorový přenos v Laplaceově transformaci
- nelineární systém není možné popsat frekvenční charakteristikou
- stabilita nelineárních systémů může být závislá na počátečním stavu a průběhu vstupních signálů
- v nelineárním systému mohou vznikat stabilní oscilace a to i jiného, než sinusového průběhu



## 2.5 Kontrolní otázky pro kapitolu 2

1. Platí pro nelineární systémy princip superpozice?
2. Je možné popsat chování nelineárního systému operátorovým přenosem?
3. Lze zakreslit frekvenční charakteristiku pro systém obsahující nějakou nelineární závislost?
4. Předpokládejte, že znáte vnitřní strukturu nelineárního systému. Je možné bez dalších informací rozhodnout o jeho stabilitě?

Správné odpovědi jsou uvedeny v dodatku A.

## 3 Kategorie nelineárních systémů a jejich popis

### 3.1 Motivace

Oblast nelineárních systémů zahrnuje systémy s velice různorodým chováním. V následující kapitole se pokusíme kategorizovat často se vyskytující nelinearity a objasnit, jakým způsobem lze popsat charakter jejich chování.

### 3.2 Systémy bez dynamiky

Za systémy bez dynamiky považujeme v technické praxi takové systémy, které reagují na změnu vstupních signálů okamžitě bez jakéhokoliv přechodového děje a zpoždění. Vesměš jde o reprezentaci takových fyzikálních systémů, které reagují na vstupní signály velmi rychle tak, že jejich přechodový děj (dynamika) je zanedbatelně krátký vzhledem k dynamice ostatních spolupracujících systémů. Tak lze například zanedbat dynamiku elektromagnetického stykače, jehož přechodový děj trvá zhruba 0,1 s, bude-li řídit tepelnou soustavu s časovými konstantami okolo 1 hodiny. Dostatečným modelem stykače pak bude jeho statická charakteristika.

Systémy bez dynamiky představují většinou subsystemy nějakých složitějších systémů, které jsou pak popsány stavovými rovnicemi a chovají se jako dynamické systémy. Tyto subsystemy mohou být ze systému fyzikálně vydělitelné, např. relé, elektronické zesilovače ap., nebo mohou vzniknout při matematické formulaci např. jako smyčka rychlé zpětné vazby.

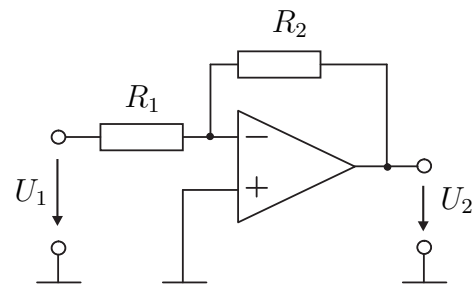
#### 3.2.1 Systémy bez paměti

K systémům bez dynamiky řadíme i systémy bez paměti, u kterých je relace mezi výstupním signálem a vstupním signálem vyjádřena funkčně např. pro systém s jedním vstupem  $u$  a jedním výstupem  $y$

$$y = f(u) \tag{3.1}$$

Takové systémy můžeme považovat za systémy s jedním stavem (stavový prostor je množina o jednom prvku), který se nemění. Typickým příkladem může být zapojení s operačním zesilovačem z obr. 3.1, jehož dobrým modelem je rovnice

$$u_2 = -\frac{R_2}{R_1}u_1 \quad (3.2)$$



Obrázek 3.1: Operační zesilovač

za předpokladu, že ostatní části systému do kterého je zapojen mají časové konstanty alespoň desetkrát větší než má tento zesilovač. Řešení systému (3.1) nepředstavuje v zásadě žádné potíže pokud je funkční předpis zadán analyticky. V případě, že je funkce zadána graficky nebo tabulkou, je zapotřebí pro výpočetní účely na číslicovém nebo analogovém počítači provést náhradu interpolační funkcí. K nejčastějším interpolačním funkcím patří polynomy a funkce po částech lineární. Připomeňme si zde pouze *Lagrangeovu interpolační formuli*. Tato formule předpokládá, že funkce (3.1) je známa v  $n$  „uzlových“ bodech  $u_0, u_1, \dots, u_n$ , tj. jsou známy hodnoty  $y_0 = f(u_0), y_1 = f(u_1), \dots, y_n = f(u_n)$ . Uzlové body nemusí být ekvidistantní. Náhradní polynom je polynom  $n$ -tého stupně ve tvaru

$$L_n(u) = \sum_{j=1}^n y_j \prod_{k=1, k \neq j}^n \frac{u - u_k}{u_j - u_k} \quad (3.3)$$

V uzlových bodech platí

$$f(u_i) = L_n(u_i) \quad (3.4)$$

Interpolační formule je snadno realizovatelná na číslicovém počítači. Pro analogové počítače se používá náhrada funkcí po částech lineární, která může být formulována při stejné volbě uzlových bodů jako v předchozím případě následovně

$$F(u) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{u_{i+1} - u_i}(u - u_i) \quad u \in \langle u_i, u_{i+1} \rangle \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.5)$$

Protože řešení nelineárních systémů je obtížné, bývá často prováděna náhrada funkce (3.1) funkcí lineární - *linearizace*. Pokud systém pracuje v blízkém okolí nějakého pracovního bodu  $u_0$ , používá se k linearizaci rozvoj funkce do *Taylorovy řady*, ve které jsou zanedbány členy vyšších řádů, tedy

$$f(u) \doteq T(u) = f(u_0) + \left. \frac{df}{du} \right|_{u=u_0} (u - u_0) \quad (3.6)$$

Podmínkou použití této metody je samozřejmě existence  $df/du|_{u=u_0}$ . Zavedeme-li pojem odchylky  $\Delta u, \Delta y$  od pracovního bodu  $u_0, y_0 = f(u_0)$ , t.j.  $\Delta u = u - u_0, \Delta y = y - y_0$ , platí pro linearizaci rozvojem do Taylorovy řady pro odchylku  $\Delta u, \Delta y$

$$\Delta y \doteq \left. \frac{df}{du} \right|_{u=u_0} \Delta u \quad (3.7)$$

Pokud je funkce blízká lineární, je linearizace často prováděna metodou minimálního součtu kvadrátů odchylek. Tato metoda bude popsána pro obecnější případ později. V obou případech není dostatečně přesně specifikován pojem blízkého okolí a pojem blízkosti k lineární funkci a konečným kritériem správnosti lineární náhrady je souhlas s praxí.

Obecnější systém bez paměti je systém popsáný funkcí více proměnných

$$y = f(u_1, u_2, \dots, u_n) = f(\mathbf{u}) \quad (3.8)$$

Takovým systémem jsou např. funkční měniče použité při konstrukci stavových schémat. Výpočet vztahu (3.8) nečiní opět při analytickém zadání potíže. Grafické zadání nebo zadání tabulkou bývá v tomto případě již komplikované a prakticky se nevyskytuje pro  $\mathbf{u}$  s vyšším rozměrem než 2. Funkce dvou proměnných je tabelována ve formě  $y = f(u_{1i}, u_{2j}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, m$ , kde např.  $u_1$  vytváří řádky a  $u_2$  sloupce tabulky. Interpolaci k získání funkční hodnoty v bodě  $[u_{10}, u_{20}]$  můžeme provádět tak, že nejprve provedeme interpolaci funkce jedné proměnné  $f_k(u_1) = f(u_1, u_{2k})$ , tj. nejprve interpolujeme ve sloupcích tabulky. Dostaneme tak hodnoty  $f_k(u_{10}) = f(u_{10}, u_{2k})$ , které můžeme chápat jako hodnoty funkce jediné proměnné  $u_2 \quad f(u_{10}, u_2) = f_0(u_2)$  a pomocí interpolační formule určíme hodnotu  $f_0(u_{20}) = f(u_{10}, u_{20})$ , tj. interpolujeme nyní ve směru řádků tabulky. Náhrada funkcí po částech lineární není v tomto případě jednoduchá, obzvlášť má-li být náhradní funkce spojitá.

Podobně jako u funkce jedné proměnné provádí se i v tomto případě často linearizace. Pracuje-li systém v nějakém blízkém okolí pracovního bodu  $y_0 = f(u_{10}, u_{20}, \dots, u_{n0}) = f(\mathbf{u}_0)$  je možné, pokud je funkce dostatečně hladká, použít linearizaci rozvojem do *Taylorovy řady*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) &\doteq T(\mathbf{u}) = \\ &= f(\mathbf{u}_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial u_1} \right|_{\mathbf{u}_0} (u_1 - u_{10}) + \left. \frac{\partial f}{\partial u_2} \right|_{\mathbf{u}_0} (u_2 - u_{20}) + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial u_n} \right|_{\mathbf{u}_0} (u_n - u_{n0}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

kde  $\left. \frac{\partial f}{\partial u_i} \right|_{\mathbf{u}_0}$  představuje parciální derivaci funkce podle proměnné  $u_i$  v pracovním bodě  $\mathbf{u}_0$ . Při zavedení odchylek od pracovního bodu  $\Delta y = y - y_0 \quad \Delta u_i = u_i - u_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, n$  platí

$$\Delta y \doteq \left. \frac{\partial f}{\partial u_1} \right|_{\mathbf{u}_0} \Delta u_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial u_2} \right|_{\mathbf{u}_0} \Delta u_2 + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial u_n} \right|_{\mathbf{u}_0} \Delta u_n \quad (3.10)$$

V maticové formě je zápis jednodušší

$$\Delta y = \left[ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\mathbf{u}_0} \mathbf{u} \quad (3.11)$$

kde  $\left[ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\mathbf{u}_0}$  je řádková matice parciálních derivací v pracovním bodě a  $\mathbf{u}$  je sloupcový vektor.

Při vhodném chování funkce (pokud je blízká lineární) lze použít náhradní lineární funkci získanou metodou minimálního součtu kvadrátů odchylek. Pokud není třeba zachovat pracovní bod systému, má náhradní lineární funkce tvar

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}\mathbf{u} \quad (3.12)$$

kde  $\mathbf{a}$  je řádková matice  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ . V tomto případě obecně neplatí rovnost

$$f(\mathbf{u}_0) = F(\mathbf{u}_0) \quad (3.13)$$

Pokud je zapotřebí zachovat pracovní bod systému, má náhradní lineární funkce tvar

$$F(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}_0) + \mathbf{k}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \quad (3.14)$$

Výpočet prvků řádkových matic  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{k}$  se provádí tak, aby ve zvolených uzlových bodech  $u_i, i = 1, 2, \dots, m$  byl součet kvadrátů odchylek lineární náhrady a funkce minimální, tj.

$$\sum_{i=1}^{i=m} [f(\mathbf{u}_i) - F(\mathbf{u}_i)]^2 = E = \min \quad (3.15)$$

Výpočet náhradní lineární funkce si ukážeme pro případ, kdy je zapotřebí zachovat pracovní bod systému. Označíme-li  $y_i = f(\mathbf{u}_i)$  hodnotu funkce ve zvolených uzlových bodech, bude podle vzorců (3.14), (3.15) platit

$$E = \sum_{i=1}^m [y_i - F(\mathbf{u}_i)]^2 = \sum_{i=1}^m [y_i - y_0 - \mathbf{k}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0)]^2 \quad (3.16)$$

Označíme-li  $\Delta y_i = y_i - y_0$  odchylku funkční hodnoty od pracovního bodu v uzlovém bodě  $\mathbf{u}_i$  a  $\Delta \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0$  vektor odchylek vstupní hodnoty od pracovního bodu v uzlovém bodě  $\mathbf{u}_i$ . Pak

$$\Delta \mathbf{u}_i = [(u_{1i} - u_{10}), (u_{2i} - u_{20}), \dots, (u_{ni} - u_{n0})]^T = [\Delta u_{1i}, \Delta u_{2i}, \dots, \Delta u_{ni}]^T \quad (3.17)$$

kde  $\Delta u_{ji}$  představuje odchylku  $j$ -tého vstupu od pracovního bodu v  $i$ -tém uzlovém bodě. Vzorec (3.16) můžeme s použitím (3.17) zapsat ve tvaru

$$E = \sum_{i=1}^m [\Delta y_i - (k_1 \Delta u_{1i} + k_2 \Delta u_{2i} + \dots + k_n \Delta u_{ni})]^2 \quad (3.18)$$

Aby hodnota součtu byla minimální, musí platit

$$\frac{\partial E}{\partial k_j} = 2 \sum_{i=1}^m [\Delta y_i - (k_1 \Delta u_{1i} + k_2 \Delta u_{2i} + \dots + k_n \Delta u_{ni})] (-\Delta u_{ji}) = 0 \quad (3.19)$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

Z těchto podmínek pak dostaneme soustavu  $n$  lineárních algebraických rovnic pro neznámé hodnoty  $k_1, k_2, \dots, k_n$

$$\begin{aligned} k_1 \sum_{i=1}^m \Delta u_{1i}^2 + k_2 \sum_{i=1}^m \Delta u_{2i} \Delta u_{1i} + \dots + k_n \sum_{i=1}^m \Delta u_{ni} \Delta u_{1i} &= \sum_{i=1}^m \Delta y_i \Delta u_{1i} \\ k_1 \sum_{i=1}^m \Delta u_{1i} \Delta u_{2i} + k_2 \sum_{i=1}^m \Delta u_{2i}^2 + \dots + k_n \sum_{i=1}^m \Delta u_{ni} \Delta u_{2i} &= \sum_{i=1}^m \Delta y_i \Delta u_{2i} \\ &\vdots \\ k_1 \sum_{i=1}^m \Delta u_{1i} \Delta u_{ni} + k_2 \sum_{i=1}^m \Delta u_{2i} \Delta u_{ni} + \dots + k_n \sum_{i=1}^m \Delta u_{ni}^2 &= \sum_{i=1}^m \Delta y_i \Delta u_{ni} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Pokud bude v množině  $m$  vektorů  $\Delta \mathbf{u}_i$  alespoň  $n$  lineárně nezávislých, pak bude mít soustava jediné řešení. Tuto podmínku zajistíme tak, že uzlové body  $\mathbf{u}_i$  a pracovní bod  $\mathbf{u}_0$  nebudeme volit pro  $n = 1$  v jednom bodě, pro  $n = 2$  na přímce, pro  $n = 3$  v rovině, atd.

Koeficienty matice  $\mathbf{a}$  v případě lineární náhrady bez zachování pracovního bodu se vypočítávají obdobným způsobem ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned}
 ma_0 + a_1 \sum_{i=1}^m u_{1i} + a_2 \sum_{i=1}^m u_{2i} + \dots + a_n \sum_{i=1}^m u_{ni} &= \sum_{i=1}^m y_i \\
 a_0 \sum_{i=1}^m u_{1i} + a_1 \sum_{i=1}^m u_{1i}^2 + a_2 \sum_{i=1}^m u_{2i}u_{1i} + \dots + a_n \sum_{i=1}^m u_{ni}u_{1i} &= \sum_{i=1}^m y_i u_{1i} \\
 a_0 \sum_{i=1}^m u_{2i} + a_1 \sum_{i=1}^m u_{1i}u_{2i} + a_2 \sum_{i=1}^m u_{2i}^2 + \dots + a_n \sum_{i=1}^m u_{ni}u_{2i} &= \sum_{i=1}^m y_i u_{2i} \\
 &\vdots \\
 a_0 \sum_{i=1}^m u_{ni} + a_1 \sum_{i=1}^m u_{1i}u_{ni} + a_2 \sum_{i=1}^m u_{2i}u_{ni} + \dots + a_n \sum_{i=1}^m u_{ni}^2 &= \sum_{i=1}^m y_i u_{ni}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Řešení bude zaručeno, když volba uzlových bodů  $\mathbf{u}_i$  bude provedena tak, aby neležely pro  $n = 1$  v jednom bodě, pro  $n = 2$  na přímce, pro  $n = 3$  v rovině, atd. Použití linearizačních metod si ukážeme na příkladě funkce jedné proměnné.

### Příklad 3.1 Linearizace funkce jedné proměnné.

V tab. 3.1 jsou uvedeny hodnoty funkce  $y = e^u$ , kterou je zapotřebí linearizovat v okolí pracovního bodu  $u_0 = 2$  rozvojem do Taylorovy řady a použitím metody minimálního součtu kvadrátů odchylek. Dále je zapotřebí provést linearizaci metodou minimálního součtu kvadrátů odchylek bez zachování pracovního bodu. V položkách  $\Delta u$  a  $\Delta y$  jsou v tabulce 3.1 uvedeny odchylky od pracovního bodu  $u_0 = 2, y_0 = e^2 = 7,39$ .

**Tabulka 3.1:** Výsledky linearizace funkce  $y = e^u$

$u$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$y$	1,00	1,65	2,72	4,48	7,39	12,18	20,09	33,12	54,60
$\Delta u$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$\Delta y$	-6,39	-5,74	-4,67	-2,91	0,00	4,79	12,70	25,73	47,21
$T(u)$	-7,39	-3,69	0	3,69	7,39	11,09	14,78	18,47	22,17
$F_1(u)$	-16,03	-10,18	-4,32	1,53	7,39	13,24	19,10	24,95	30,81
$F_1(u)$	-8,17	-2,32	3,54	9,40	15,25	21,11	25,95	32,82	38,67

Rozvoj do Taylorovy řady je podle (3.6)

$$T(u) = e^2 + e^u|_{u=u_0} (u - 2) = e^2 + e^2 (u - 2) = e^2 (u - 1) \tag{3.22}$$

Výsledky rozvoje jsou pro srovnání uvedeny v tabulce 3.1. Výsledek linearizace metodou minimálního součtu kvadrátů odchylek je při zachování pracovního bodu podle 3.14

$$F_1(u) = e^2 + k(u - 2) \quad (3.23)$$

kde  $k$  určíme z rovnic (3.20), které se v tomto případě redukuje na tvar

$$k \sum_{i=1}^8 \Delta u_i^2 = \sum_{i=1}^8 \Delta u_i \Delta y_i \quad (3.24)$$

Z tabulky 3.1 vidíme, že  $\sum_{i=1}^8 \Delta u_i^2 = 15,00$  a  $\sum_{i=1}^8 \Delta u_i \Delta y_i = 175,63$ . Z toho vyplývá  $k = 11,71$ . Výsledek je opět uveden v tabulce 3.1. Tentýž způsob linearizace bez zachování pracovního bodu dává podle (3.12) výsledek

$$F_2(u) = a_0 + a_1 u \quad (3.25)$$

kde koeficienty  $a_0$  a  $a_1$  určíme podle (3.21) z rovnic

$$\begin{aligned} 9a_0 + a_1 \sum_{i=1}^9 u_i &= \sum_{i=1}^9 y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^9 u_i + a_1 \sum_{i=1}^9 u_i^2 &= \sum_{i=1}^9 y_i u_i \end{aligned} \quad (3.26)$$

Z tabulky 3.1 vidíme, že  $\sum_{i=1}^9 u_i = 18$ ;  $\sum_{i=1}^9 u_i^2 = 51$ ;  $\sum_{i=1}^9 y_i = 137,23$ ;  $\sum_{i=1}^9 y_i u_i = 450,09$ . Výsledkem řešení rovnic (3.26) je pak  $a_0 = -8,17$ ;  $a_1 = 11,71$ .

Systém bez paměti s více výstupy a vstupy zapsaný ve formě

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (3.27)$$

je vlastně tvořen vícenásobným použitím zápisu (3.8), takže problematika jeho výpočtu je stejná jako u tohoto zápisu. Poněkud obtížnější situace nastává, je-li systém popsán implicitně např. ve formě

$$f(u, y) = 0 \quad (3.28)$$

pro systém s jedním vstupem a s jedním výstupem, nebo pro systém s více vstupy a jedním výstupem ve formě

$$f(\mathbf{u}, y) = 0 \quad (3.29)$$

eventuálně pro systém s více vstupy a více výstupy ve formě soustavy

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad (3.30)$$

Řešení rovnice (3.28) se provádí obecně grafickými nebo numerickými metodami tak, že ve funkci (3.28) fixujeme hodnotu vstupní veličiny  $u$ , a tím převedeme problém na řešení rovnice o jedné neznámé  $y$ .

$$f_u(y) = 0 \quad (3.31)$$

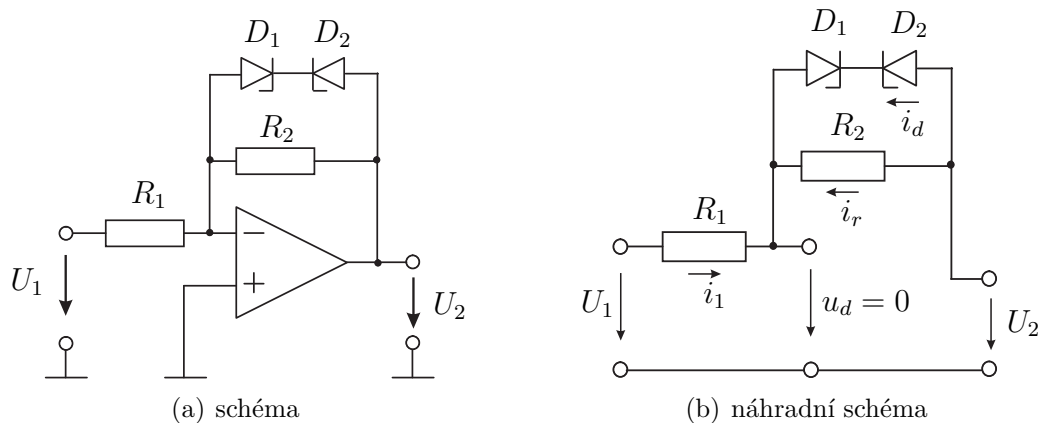
Podobným způsobem se přistupuje k zápisu (3.29), ve kterém se fixuje vstupní vektor  $\mathbf{u}$ , a tím problém opět přechází na řešení rovnice o jedné neznámé. Nejobtížnější je samozřejmě řešení soustavy (3.30), ve které opět fixujeme vstupní vektor  $\mathbf{u}$ , problém pak je vypočítat řešení soustavy obecně nelineárních rovnic

$$\mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad (3.32)$$

Aby zápisy (3.28)-(3.30) reprezentovaly fyzikální systém, je nutné, aby pro zvolenou množinu vstupních hodnot měly řešení. Problematiku si opět částečně objasníme na příkladě.

### Příklad 3.2 Implicitně zadaná nelineární funkce.

Na obr. 3.2(a) je nakresleno schéma operačního zesilovače, u kterého je ve zpětné vazbě zapojen diodový omezovač napětí. Je zapotřebí zjistit, jaká bude relace mezi výstupním  $u_2$  a  $u_1$  vstupním napětím tohoto zapojení. Předpokládáme, že dynamika operačního zesi-



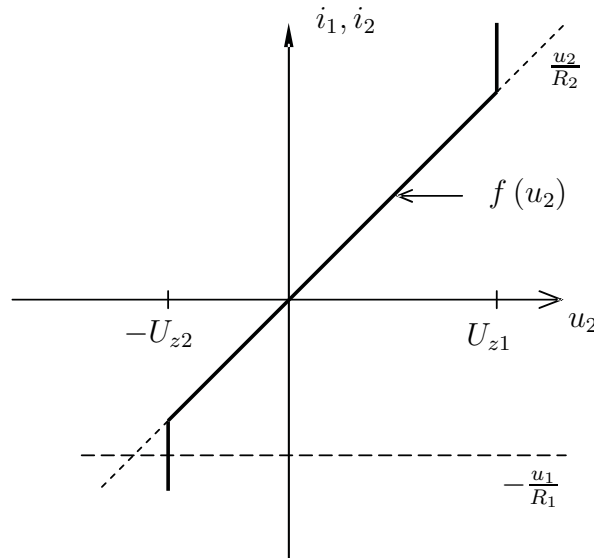
**Obrázek 3.2:** Operační zesilovač s diodovým omezovačem napětí

lovače je zanedbatelná vzhledem k dynamice ostatních částí systému ve kterém je zesilovač použit. Pro jednoduchost budeme u diod předpokládat ideální charakteristiku a hodnoty Zenerova napětí  $u_{z1}$ , resp.  $u_{z2}$  u diod  $D_1$ , resp.  $D_2$ . Dobrým modelem při výpočtech s operačními zesilovači je model využívající principu virtuální nuly, při kterém je náhradní schéma zapojení uvedeno na obr. 3.2(b). Pro toto schéma platí následující rovnice

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 &= 0 \\ i_1 &= \frac{u_1}{R_1} \\ i_2 &= i_d + i_r = f(u_2) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Funkce  $f(u_2)$  je voltampérová charakteristika paralelního zapojení Zenerových diod a odporu  $R_2$ , která je nakreslena na obr. 3.3. Úpravou rovnic (3.33) získáme jedinou rovnici

$$\frac{u_1}{R_1} + f(u_2) = 0 \quad (3.34)$$



Obrázek 3.3: Grafické řešení rovnice (3.34)

Tuto rovnici, která je vlastně ve tvaru (3.27), je výhodné řešit graficky viz obr. 3.3. Z obrázku je zřejmé, že rovnice (3.34) má jediné řešení, pro které platí

$$u_2 = \begin{cases} -\frac{R_2}{R_1}u_1 & u_1 \in \left\langle -u_{z1}\frac{R_1}{R_2}; u_{z2}\frac{R_1}{R_2} \right\rangle \\ -u_{z2} & u_1 > u_{z2}\frac{R_1}{R_2} \\ u_{z1} & u_1 < -u_{z1}\frac{R_1}{R_2} \end{cases} \quad (3.35)$$

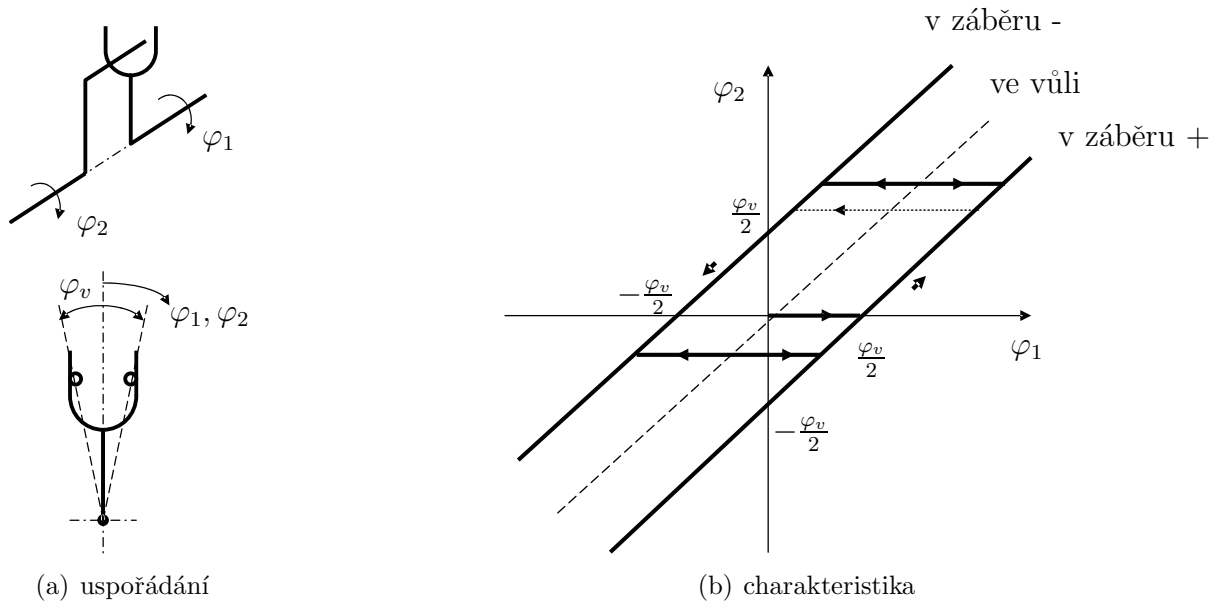
### 3.2.2 Systémy s pamětí

K systémům bez dynamiky ale s pamětí patří např. systémy s jednoduchým stavovým prostorem. V regulačních obvodech jsou to např. relé s hysterezí, jehož stavový prostor obsahuje pouze dva prvky  $\Sigma = \{\text{zapnuto } +; \text{zapnuto } -\}$ , relé s hysterezí, jehož stavový prostor je  $\Sigma = \{\text{zapnuto } +; 0; \text{zapnuto } -\}$ , vůle v převodech, u které je stavový prostor  $\Sigma = \{x : x \in \langle -\varphi_v/2; \varphi_v/2 \rangle\}$  atd. U těchto systémů nebývá problém určit chování segmentu výstupní veličiny  $y(t_0, t)$  a počátečního stavu. Nebývá ani problém určit trajektorii. Pokud je takový systém začleněn do většího systému jako subsystém, je jen zapotřebí bedlivě sledovat vývoj jeho stavu a uvědomit si, že jej nelze jednoduše popsat funkčním vztahem, ale spíše slovním popisem nebo algoritmem. Záležitost si opět objasníme na příkladě.

#### Příklad 3.3 Systém bez dynamiky s pamětí - vůle v převodech

Pro systém vůle v převodech, je zapotřebí nalézt segment výstupní veličiny  $\varphi_2(t_0, t_0 + 2\pi)$ , je-li segment vstupní veličiny  $\varphi_1(t_0, t_0 + 2\pi)$  určen funkcí  $\varphi = A \sin t$ , kde  $A = \varphi_v$  a počáteční stav převodovky je  $x(t_0) = 0$ . V počátečním stavu je unašeč ve středu vidlice a tedy při  $\varphi_1(0) = 0$  je i  $\varphi_2(0) = 0$ . Uspořádání nelinearity typu vůle v převodech je patrné z obr. 3.4 Řešení je zachyceno na obr. 3.5. Je zřejmé, že až do času





**Obrázek 3.4:** Nelinearita typu vůle v převodech

$t_1$  nedojde k pohybu výstupní hřídele a stav se mění od  $x = 0$  do  $x = -\varphi_v/2$ , tedy

$$t \in \left(0; \arcsin \frac{1}{2}\right) \quad \varphi_2 = 0 \quad (3.36)$$

V čase  $t_1$  se převodovka dostane do záběru (stav  $x = -\varphi_v/2$ ) a hřídel bude unášen až do času  $t = \pi/2$ , kdy dochází k reverzaci vstupního hřídele. Platí

$$t \in \left\langle \arcsin \frac{1}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad \varphi_2 = \varphi_v \sin t - \frac{\varphi_v}{2} \quad (3.37)$$

Převodovka pak zůstává ve vůli, dokud se vstupní hřídel nepootočí o úhel  $\varphi_v$  a platí tedy

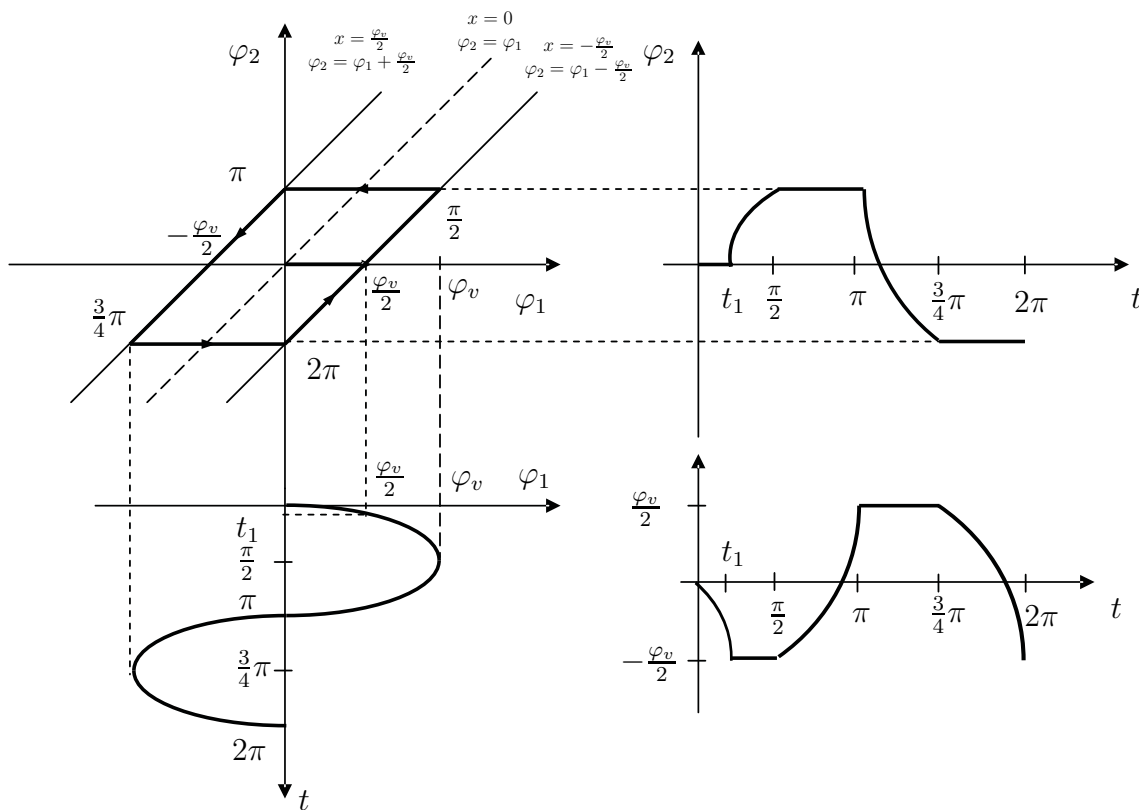
$$t \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle \quad \varphi_2 = \frac{\varphi_v}{2} \quad (3.38)$$

a stav se mění od  $x = -\varphi_v/2$  do  $x = \varphi_v/2$ . Až do času  $t = \frac{3}{2}\pi$  pak zůstává převodovka v záběru (stav  $x = \varphi_v/2$ ), tedy

$$t \in \left\langle \pi; \frac{3}{2}\pi \right\rangle \quad \varphi_2 = \varphi_v \sin t + \frac{\varphi_v}{2} \quad (3.39)$$

V čase  $t = \frac{3}{2}\pi$  nastává reverzace vstupní hřídele a převodovka zůstane ve vůli až do času  $t = 2\pi$  (stav se mění od  $x = \varphi_v/2$  do  $x = -\varphi_v/2$ ) dokud se vstupní hřídel nepootočí o  $\varphi_v/2$ . Platí tedy

$$t \in \left\langle \frac{3}{2}\pi; 2\pi \right\rangle \quad \varphi_2 = -\frac{\varphi_v}{2} \quad (3.40)$$



**Obrázek 3.5:** Grafické řešení nelinearity typu vůle v převodech

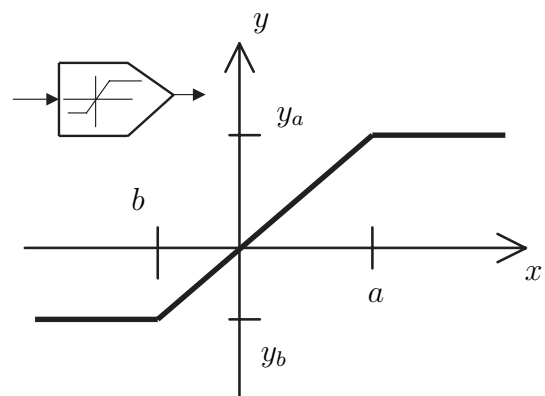
Tím je výstupní segment plně určen. Na obr. 3.5 jsou nakresleny průběhy vstupní, výstupní a stavové veličiny pro tento případ. Je zřejmé, že jsme schopni při znalosti počátečního stavu a segmentu vstupní veličiny vždy určit segment výstupní veličiny i stavovou trajektorii tohoto systému, i když popis nelze uzavřít do nějaké kompaktní formule.

### 3.2.3 Typické nelinearity

Pojem nelineární funkce je velice obecný a nelinearity v řízených systémech mohou mít značně různorodé vlastnosti. Lze však nalézt skupinu několika typických nelinearit, se kterými se v případě technických systémů setkáváme nejčastěji.

#### *Nasycení*

Patrně nejčastěji se vyskytující nelinearitou je nelinearita typu nasycení. Její statická charakteristika je zobrazena na obr. 3.6. V reálných



**Obrázek 3.6:** Nelinearita nasycení

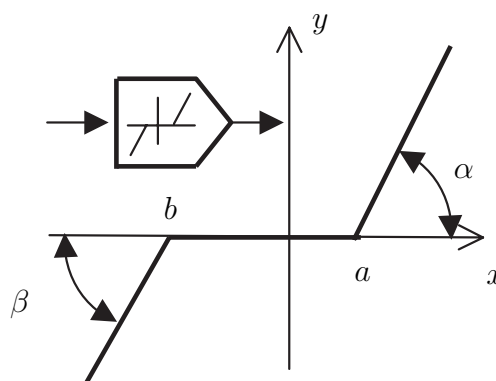
fyzikálních a technických systémech dochází vždy k omezení akční veličiny (omezené zdroje energie, pevnostní omezení, konstrukční výkonová omezení) a proto se tato nelinearita vyskytuje prakticky ve všech reálných systémech. V řadě aplikací je možné tuto nelinearitu nahradit po částech lineární křivkou a systém v okolí vhodných pracovních bodů linearizovat. Závislost výstupu nelinearity  $y$  na vstupu  $x$  je dána vztahem

$$y = \begin{cases} y_a & x \geq a \\ x \frac{y_a}{a} & b < x < a \\ y_b & x \leq b \end{cases} \quad (3.41)$$

### ***Necitlivost***

Nelinearita typu necitlivost se často objevuje především v mechanických systémech, kde vzniká jako projev tření a různých mechanických nepřesností. V některých případech může být do regulačního obvodu i uměle vkládána jako prostředek k omezení oscilací. Výstup nelinearity typu necitlivost je popsán vztahem

$$y = \begin{cases} (x - a) \operatorname{tg} \alpha & x \geq a \\ 0 & b < x < a \\ (x - b) \operatorname{tg} \beta & x \leq b \end{cases} \quad (3.42)$$



**Obrázek 3.7:** Nelinearita necitlivost

### ***Vůle v převodech - hystereze***

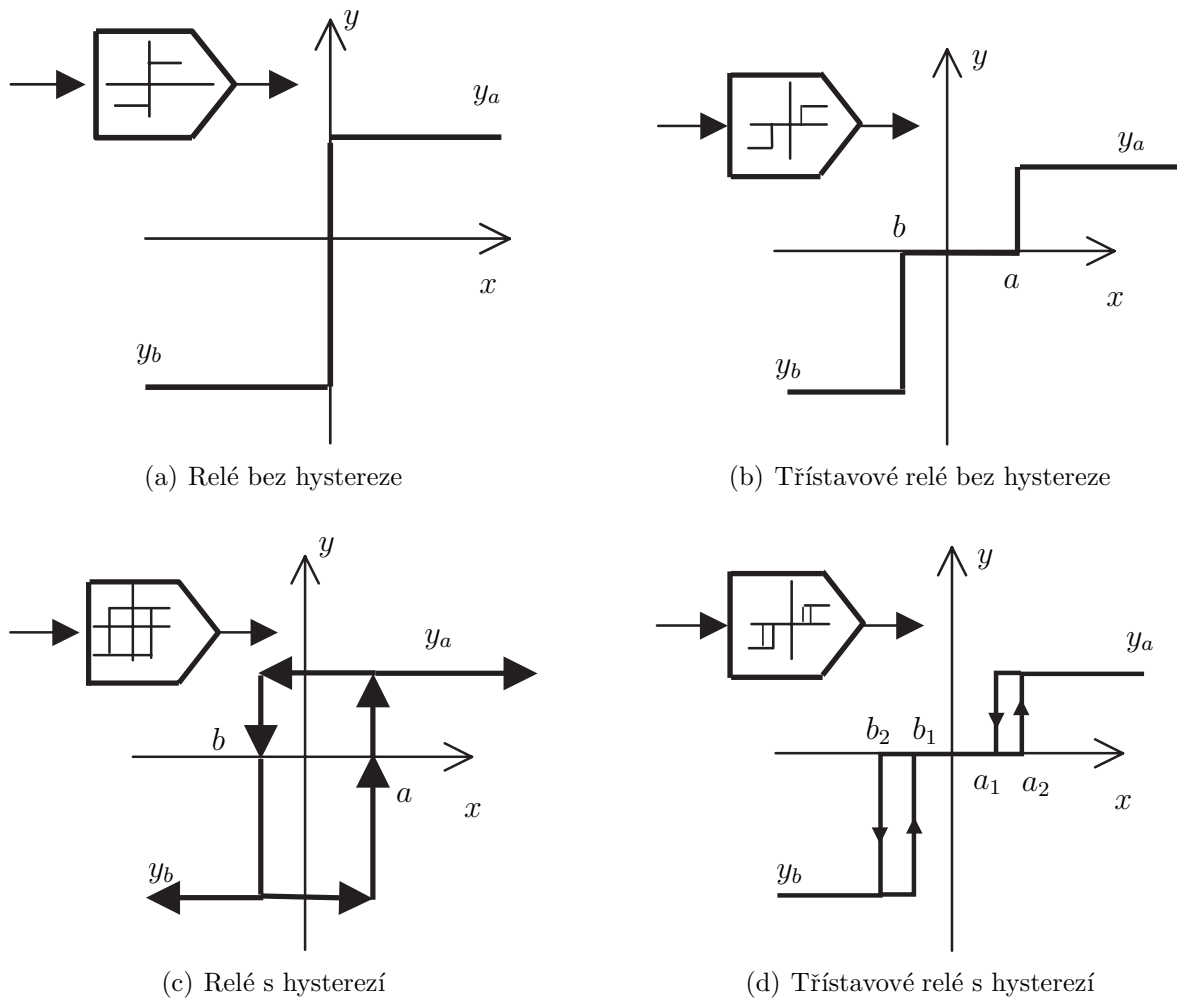
Nelinearita typu vůle v převodech patří mezi statické nelineární systémy s pamětí, jak již bylo ukázáno v kapitole 3.2.2. Její chování není možné určit funkčním vztahem, ale spíše algoritmem popisovaným v příkladě 3.3. Vyskytuje se především v mechanických systémech v důsledku mechanických vůlí nutných při konstrukci převodů. Jiným typickým příkladem této nelinearity je existence hystereze v magnetizačních charakteristikách železa. Závislost mezi vstupním a výstupním signálem „vůle v převodech“ je zobrazena na obr. 3.4(b).

### ***Reléové charakteristiky***

Reléové charakteristiky zahrnují několik možných variant reálně používaných bloků typu relé. Tato nelinearita se často objevuje v regulačních obvodech v podobě reléových regulátorů, jejichž použití bude dále diskutováno v kapitole 5.

Nejjednodušší varianta je zobrazena na obr. 3.8(a). Jedná se o charakteristiku ideálního dvoupolohového relé, jehož výstup lze popsat vztahem

$$y = \begin{cases} y_a & x \geq 0 \\ y_b & x < 0 \end{cases} \quad (3.43)$$



**Obrázek 3.8:** Releové charakteristiky

Ve většině případů navíc uvažujeme, že platí  $y_b = -y_a$ , čímž se vztah (3.43) zjednoduší na

$$y = y_a \operatorname{sign} x \quad (3.44)$$

Obrázek 3.8(b) zachycuje statickou charakteristiku třípolohového relé s pásmem necitlivosti v oblasti  $(b, a)$ . Výstup nelinearity odpovídá zápisu

$$y = \begin{cases} y_a & x \geq a \\ 0 & b < x < a \\ y_b & x \leq b \end{cases} \quad (3.45)$$

V řadě reálných aplikací nalezneme nelinearitu s releovou charakteristikou s hysterezí z obr. 3.8(c). Je zřejmé, že hodnota výstupu pro  $x \in (b, a)$  závisí na předchozím stavu výstupu a jedná se tedy o statickou nelinearitu s pamětí. Typickým příkladem jsou releové regulátory teploty (lednička, žehlička, pokojové termostaty), u kterých je hystereze

využíváno k omezení četnosti přepínání. Výstup relového regulátoru s hysterezí je dán vztahem

$$y = \begin{cases} y_a & x \geq a \\ y \text{ „minulá“} & b < x < a \\ y_b & x \leq b \end{cases} \quad (3.46)$$

Releová charakteristika s hysterezí může být ještě rozšířena o pásmo necitlivosti, čímž dostáváme nelinearitu s charakteristikou zobrazenou na obr. 3.8(d) - třípolohové relé s hysterezí. Chování této nelinearity je pak dáno popisem

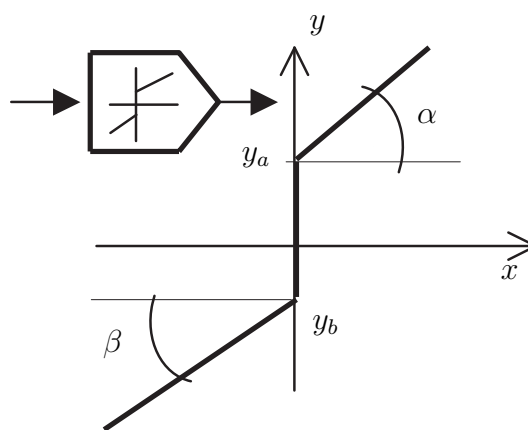
$$y = \begin{cases} y_a & x \geq a_2 \\ y \text{ „minulá“} & a_1 \leq x < a_2 \\ 0 & b_1 < x < a_1 \\ y \text{ „minulá“} & b_2 < x \leq b_1 \\ y_b & x \leq b_2 \end{cases} \quad (3.47)$$

### Nelinearita typu tření

Nelinearita typu tření představuje třecí síly a momenty vyskytující se především v mechanických systémech. Přesný popis chování této nelinearity je značně problematický a existuje pro něj řada aproximací. Jedna z často používaných aproximací tření je zobrazena na obr. 3.9. Pro hodnotu výstupu platí

$$y = \begin{cases} y_a + x \operatorname{tg} \alpha & x > 0 \\ y_b - x \operatorname{tg} \beta & x < 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

Ve většině případů bude navíc platit, že  $y_b = -y_a$  a  $\alpha = \beta$ . V případě analýzy chování systému obsahujícího nelinearitu typu tření je třeba dbát správné fyzikální interpretace, neboť pro  $x = 0$  není hodnota jednoznačně určena (např. pokud je těleso v klidu, třecí síla může nabývat libovolné hodnoty menší než maximální hodnota statického tření a závisí na vnější síle působící na těleso.



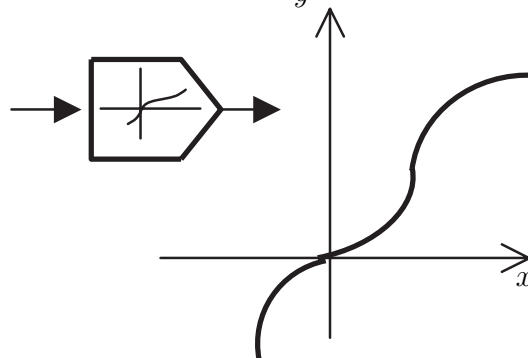
Obrázek 3.9: Nelinearita tření

### Obecná nelinearita

Velkou skupinu nelinearit lze vyjádřit obecnou funkční závislostí

$$y = f(x) \quad (3.49)$$

Řadíme sem především charakteristiky elektronických prvků - diody, tyristory, ale i fyzikální

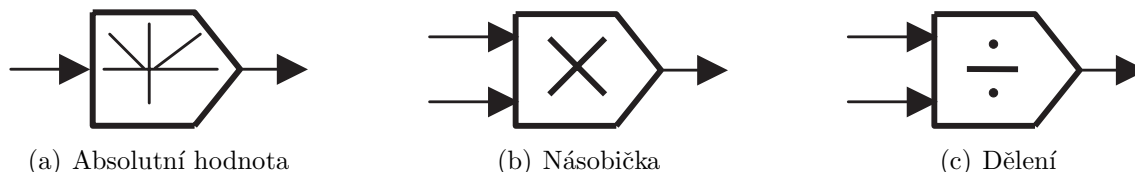


Obrázek 3.10: Obecná nelinearita

jevy jako aerodynamická odporová síla. Obecný nelineární průběh mají rovněž charakteristiky některých snímačů neelektrických veličin.

### Matematické operace

Za nelineární bloky je třeba považovat i některé elementární matematické operace, jako například absolutní hodnotu, násobení signálů (ne násobení konstantou) a dělení signálů.



Obrázek 3.11: Nelineární matematické operace

## 3.3 Nelineární dynamické systémy

Z hlediska teorie řízení je mnohem zajímavější kategorie nelineárních dynamických systémů. Zatímco systémy bez dynamiky bylo možné popsat statickými převodními charakteristikami vyjadřujícími závislost mezi okamžitou hodnotou výstupního a vstupního signálu, u dynamických systémů je třeba posuzovat vývoj jednotlivých signálů v čase.

Obdobně jako u lineárních dynamických systémů lze provést popis nelineárního dynamického systému soustavou diferenciálních rovnic, které však mohou obsahovat obecné nelineární závislosti. Tyto diferenciální rovnice nejčastěji zapisujeme ve tvaru stavových rovnic

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\
 \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\
 &\vdots \\
 \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\
 y_1 &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\
 y_2 &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\
 &\vdots \\
 y_r &= g_r(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m)
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

případně v maticovém tvaru

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\
 \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

kde  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  je sloupcový vektor stavových proměnných,  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$  je sloupcový vektor hodnot vstupů,  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_r]^T$  je sloupcový vektor hodnot

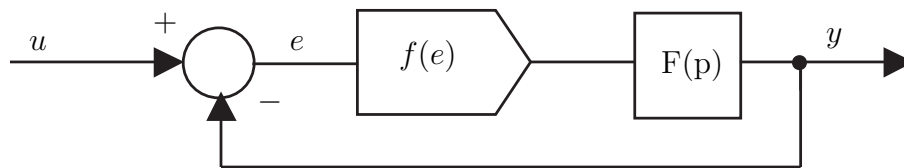
výstupů systému, přičemž všechny veličiny  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{y}$  jsou funkcemi času. Sloupcový vektor  $\mathbf{f}() = [f_1(), f_2(), \dots, f_n()]^T$  je složen z nelineárních závislostí  $f_i()$ , které určují derivaci  $i$ -té stavové proměnné jako nelineární funkci hodnot stavových veličin  $\mathbf{x}$  a hodnot vstupů  $\mathbf{u}$ . Sloupcový vektor  $\mathbf{g}() = [g_1(), g_2(), \dots, g_r()]^T$  obsahuje nelineární funkce udávající hodnotu výstupních signálů.

V nejobecnějším případě může jako argument funkcí  $\mathbf{f}()$  a  $\mathbf{g}()$  vystupovat i čas

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Tento tvar rovnic odpovídá systémům, jejichž parametry a případně i struktura se mohou s časem měnit - tak zvané *t-variantní* systémy. Analýza chování systémů s proměnnými parametry je poměrně náročná a přesahuje rozsah kurzu Regulace a řízení II. Proto se jimi nebudeme dále zabývat a omezíme se pouze na systémy s časově neměnnými parametry - *t-invariantní* systémy.

Pokud je to možné, snažíme se při popisu nelineárního systému vyjádřit samostatně jeho lineární a nelineární část, jak je zobrazeno na obr. 3.12. Toto uspořádání je výhodné z hlediska analýzy chování systému, jak bude ukázáno v kapitole 4.



Obrázek 3.12: Nelineární systém s oddělenou lineární a nelineární částí

### 3.4 Shrnutí kapitoly 3

V kapitole 3 jsme se seznámili se základními nelineárními systémy. Tyto systémy dělíme z hlediska jejich chování v čase na statické a dynamické. U statických existuje vazba mezi okamžitou hodnotou vstupní a výstupní veličiny, zatímco u dynamických systémů je podstatná závislost mezi časovým průběhem vstupní a výstupní veličiny. Nejjednodušší statické nelinearity lze popsat převodními charakteristikami, které přiřazují konkrétní hodnotu výstupu dané hodnotě vstupu. Existuje však i skupina nelinearit s pamětí (vůle v převodech, relé s hysterezí), u kterých hodnota výstupu závisí rovněž na předchozí hodnotě výstupu a jejich chování je pak spíše popsitelné algoritmicky.

### 3.5 Kontrolní otázky pro kapitolu 3

1. Který z následujících nelineárních systémů je systém s pamětí
  - (a) Nasycení
  - (b) Relé s hysterezí

- (c) Necitlivost
2. Operace násobení konstantou a násobení signálů jsou lineární nebo nelineární operace?
  3. Kolik členů Taylorovy řady použijeme při linearizaci?
  4. Pokud je chování nelineárního systému jednoznačně určeno vztahem mezi okamžitou hodnotou vstupu a výstupu, o jaký typ systému se jedná? (statický, dynamický, s pamětí, bez paměti)

Správné odpovědi jsou uvedeny v dodatku A

### 3.6 Řešené příklady pro kapitolu 3

**Příklad 3.4** Předpokládejme nelineární funkci

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad (3.53)$$

kterou chceme linearizovat v okolí pracovního bodu  $\mathbf{x}_0 = (1; 1)$ . Provedeme rozvoj funkce  $f$  do Taylorovy řady v okolí bodu  $\mathbf{x}_0$

$$f(x_1, x_2) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \left. \frac{\partial^i f(\mathbf{x})}{\partial x_1^i} \right|_{\mathbf{x}_0} (x_1 - x_{10})^i + \left. \frac{\partial^i f(\mathbf{x})}{\partial x_2^i} \right|_{\mathbf{x}_0} (x_2 - x_{20})^i \right] \quad (3.54)$$

Linearizaci provedeme tak, že budeme uvažovat pouze první (lineární) člen a tedy

$$f_{lin}(x_1, x_2) = 2 + 2(x_1 - 1) + 2(x_2 - 1) = 2x_1 + 2x_2 - 2 \quad (3.55)$$

### 3.7 Neřešené příklady pro kapitolu 3

**Příklad 3.5** Pro statický systém

$$f(x_1, x_2) = x_1 \sqrt{x_2} \quad (3.56)$$

proved'te linearizaci rozvojem do Taylorovy řady v okolí pracovního bodu  $\mathbf{x}_0 = (\frac{1}{2}; 4)$

## 4 Analýza nelineárních dynamických systémů

V následující části se budeme zabývat základními metodami pro určování chování nelineárních dynamických systémů.

### 4.1 Stavová trajektorie a ustálené stavy nelineárních systémů

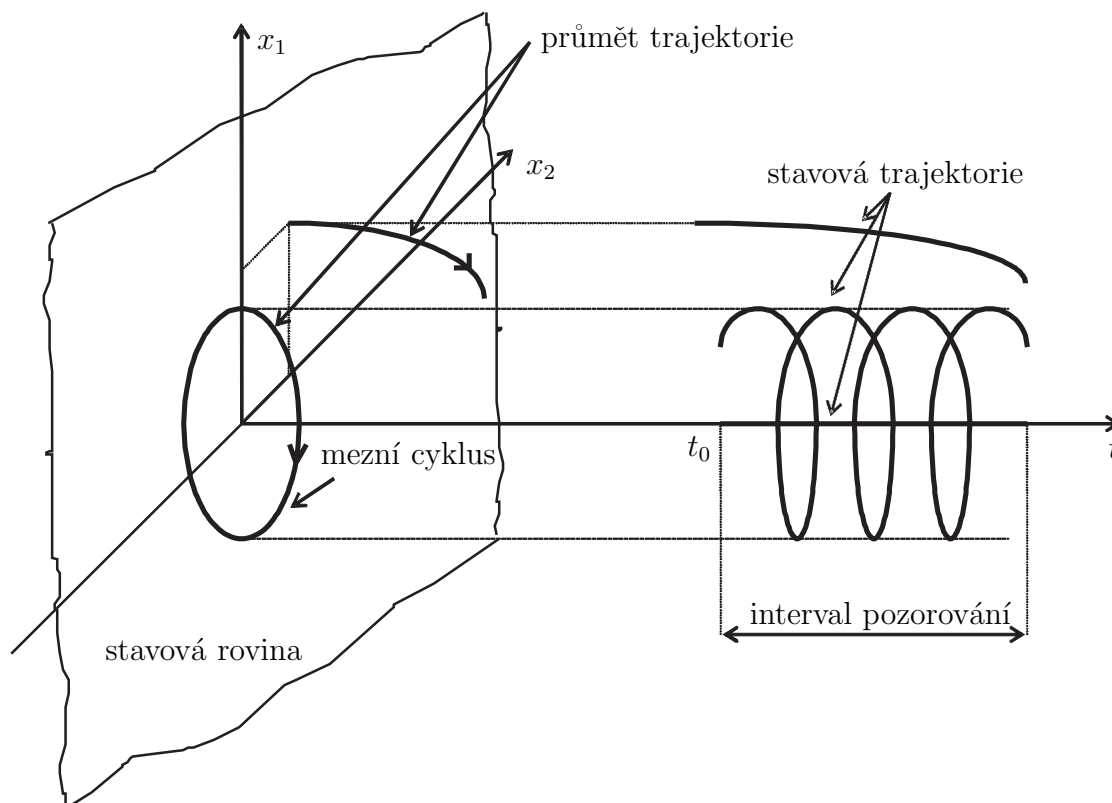
#### 4.1.1 Motivace

Analýza chování nelineárních systémů je značně náročná a v řadě případů analyticky neřešitelná. V řadě případů vycházíme při posuzování chování nelineárního systému z odhadu průběhu signálů zkonstruovaných graficky. V této kapitole budou vysvětleny hlavní pojmy, se kterými budeme dále pracovat.



### 4.1.2 Stavová trajektorie

Základní pojmy, se kterými se budeme dále setkávat při grafickém řešení nelineárních systémů si objasníme pomocí obrázku 4.1



**Obrázek 4.1:** Stavová trajektorie

Stavová trajektorie je křivka zachycující vývoj stavových proměnných v čase. Je zřejmé, že pokud budeme konstruovat stavovou trajektorii graficky jako dvojrozměrný graf, jsme schopni zakreslit její tvar uspokojivě pro systémy prvního řádu (osa  $x$  čas a osa  $y$  hodnota jediné stavové proměnné). Pro systémy druhého řádu, které již potřebujeme zachytit dvě stavové proměnné. Zde můžeme využít zakreslení průmětu stavové trajektorie do roviny tvořené možnými hodnotami dvou stavových veličin. Tato křivka sice již nenese informaci o časovém průběhu veličin, ale jak bude ukázáno později, stále umožňuje vytvoření uceleného pohledu na chování systému. Systémy vyšších řádů již není možné většinou úspěšně grafickými metodami řešit.

Z technického hlediska je velice zajímavá situace, kdy průmětem stavové trajektorie je bod nebo případně uzavřená křivka. Tato podoba průmětu stavové trajektorie odpovídá situaci, kdy je chování nějakým způsobem ustálené. U nelineárních dynamických systémů rozlišujeme dva druhy ustáleného chování - rovnovážný stav a mezní cyklus. Blíže se jimi budeme zabývat v následujících kapitolách.

### 4.1.3 Rovnovážné stavy

K nejpřirozenějším ustáleným stavům patří takové chování systému, kdy se jeho stav s časem v daném intervalu pozorování (většinou  $(0; \infty)$ ) vůbec nemění

$$\mathbf{x} = konst \quad (4.1)$$

Takový ustálený stav se nazývá *rovnovážný stav systému*. Průmět takové trajektorie do stavového prostoru se jeví jako bod, a proto se také pro takový stav používá termínu *singulární bod*. Rovnovážné stavy systému snadno zjistíme řešením rovnice

$$\dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (4.2)$$

což pro systém popsáný obecně diferenciální rovnicí (3.52) znamená hledání řešení soustavy nelineárních algebraických rovnic maticově zapsaných ve tvaru

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0 \quad (4.3)$$

Řešení rovnice (4.3) hledáme obvykle pro konstantní hodnotu vstupů  $\mathbf{u} = konst$ . a bývá pak označováno symbolem  $\mathbf{x}_0$ . Obecně však řešení nemusí existovat, nebo může existovat více řešení, či dokonce nekonečný počet řešení. Výpočet rovnovážného stavu si objasníme na následujícím příkladě

**Příklad 4.1** *Uvažujme systém tvořený matematickým kyvadlem tak, jak je zachycen na obrázku 1.1. Tento systém je popsán pohybovou rovnicí*

$$ml\ddot{\alpha} = -mg \sin \alpha \quad (4.4)$$

kde  $m$  je hmotnost kyvadla,  $l$  délka závěsu,  $\alpha$  úhel vychýlení kyvadla. Tuto rovnici převedeme do stavových rovnic, přičemž položíme  $\alpha = x_1$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Jde tedy o neřízený nelineární dynamický systém. Jeho rovnovážné stavy zjistíme řešením rovnic

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Je zřejmé, že řešením je celá množina dvojic

$$\{(x_{10}, x_{20}) | x_{10} = k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; x_{20} = 0\} \quad (4.7)$$

U rovnovážných stavů můžeme hovořit o jejich stabilitě. Pokud se systém po malém vychýlení z rovnovážného stavu  $\mathbf{x}_0$  vrátí zpět do tohoto stavu, jedná se o *stabilní rovnovážný stav*. Pokud se však systém po malém vychýlení začne od rovnovážného stavu vzdalovat, mluvíme o *nestabilním (labilním) rovnovážném stavu*.

**Příklad 4.2** Pokusme se nyní zhodnotit výsledek příkladu 4.1. Předpokládejme, že je systém v rovnovážném stavu  $(x_{10}, x_{20}) = (2k\pi, 0)$ . Provedeme malé vychýlení o úhel  $\beta \rightarrow 0$ . Vzhledem k tomu, že úhel  $\beta$  je velmi malý, platí

$$\sin(2k\pi + \beta) \simeq \beta \quad (4.8)$$

Pro systém vychýlený z rovnovážného stavu bude platit

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\beta \end{aligned} \quad (4.9)$$

z čehož vyplývá, že úhlové zrychlení  $\ddot{x}_1$  bude mít vždy opačné znaménko, než úhlová výchylka  $\beta$  a systém se vrátí tedy zpět do původní rovnovážné polohy.

Jiná situace je u druhé skupiny rovnovážných stavů  $(x_{10}, x_{20}) = ((2k+1)\pi, 0)$ . Opět budeme předpokládat vychýlení o velmi malý úhel  $\beta \rightarrow 0$ . Nyní však bude platit

$$\sin((2k+1)\pi + \beta) \simeq -\beta \quad (4.10)$$

Pro systém vychýlený z rovnovážného stavu bude platit

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{l}\beta \end{aligned} \quad (4.11)$$

Úhlové zrychlení  $\ddot{x}_1$  bude mít tedy shodné znaménko s úhlovou výchylkou  $\beta$  a systém se bude od původní rovnovážné polohy vzdalovat.

Tento závěr odpovídá zkušenosti, kdy stav  $(x_{10}, x_{20}) = (2k\pi, 0)$  odpovídá dolní poloze kyvadla, která je stabilní, zatímco stav  $(x_{10}, x_{20}) = ((2k+1)\pi, 0)$  představuje horní polohu kyvadla, která je labilní.

Jinou možností určení stability rovnovážného stavu je provedení linearizace systému v okolí tohoto stavu (kapitola 4.2) a následně posouzení stability této lineární náhrady.

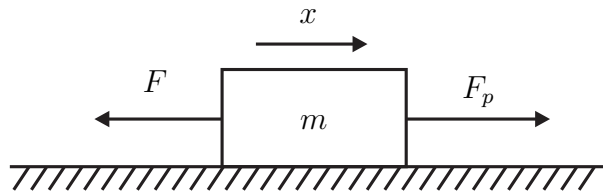
V případě, že pro daný systém existuje více rovnovážných stavů, rozhodujeme rovněž o tom, zda jsou rovnovážné stavy *izolované*. Rovnovážený stav (singulární bod) je izolovaný, pokud existuje jeho malé okolí (tzv.  $\varepsilon$ -okolí), ve kterém se nenachází žádný další rovnovážný stav. Z tohoto pohledu je zřejmé, že všechny rovnovážné stavy systému zkoumaného v příkladu 4.1 jsou izolované.

**Příklad 4.3** Předpokládejme systém zobrazený na obr. 4.2. Systém lze popsat pohybovou rovnicí

$$m\ddot{x} = F_p - F \quad (4.12)$$

kde  $F$  je třecí síla daná vztahem

$$F = \begin{cases} F_t \operatorname{sign} \dot{x} & \dot{x} \neq 0 \\ F_p & \dot{x} = 0; |F_p| \leq F_t \\ F_t \operatorname{sign} F_p & \dot{x} = 0; |F_p| > F_t \end{cases} \quad (4.13)$$



**Obrázek 4.2:** Těleso na podložce

Stavový popis systému je pro  $x = x_1$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{F_p - F}{m} \end{aligned} \quad (4.14)$$

a rovnovážné stavy vyřešíme z rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= F_p - F \end{aligned} \quad (4.15)$$

Z rovnice (4.13) vyplývá, že rovnovážný stav bude existovat pouze pro  $|F_p| \leq F_t$ . Při splnění této podmínky je pak zřejmé, že existuje celá množina ustálených stavů  $\{(x_{10}, x_{20}) | x_1 \in \mathbb{R}; x_2 = 0\}$ . Tato množina představuje přímku ve stavové rovině, přičemž řešení je nespočetně mnoho a pro zvolené řešení neexistuje malé okolí, které nezahrnuje žádné další řešení. Zjištěné rovnovážné stavy tedy nejsou izolované.

#### 4.1.4 Mezní cyklus

Za ustálený stav bývá rovněž považováno takové chování, při kterém se stav systému v daném intervalu pozorování periodicky mění, t.j. platí

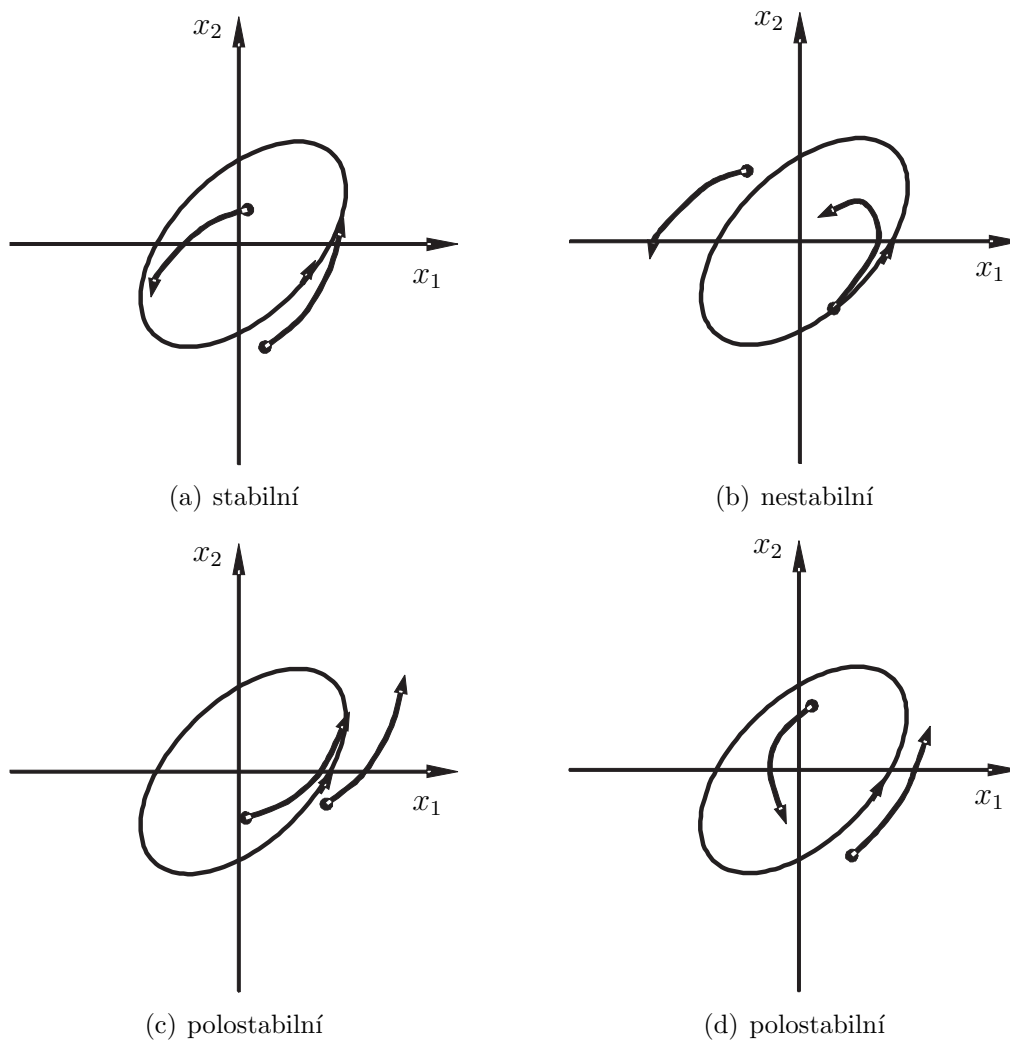
$$\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t) \quad (4.16)$$

kde  $T$  je časová perioda. Průmět takové trajektorie do stavového prostoru se jeví jako uzavřená křivka - cyklus a používá se pro něj termín *mezní cyklus*. K zjišťování existence a parametrů mezních cyklů se používá v technické praxi často metoda *harmonické rovnováhy*, která bude detailně objasněna v kapitole 4.4. Obdobně jako u rovnovážných stavů pak můžeme dále rozhodovat o stabilitě a izolovanosti mezního cyklu.

**Příklad 4.4** Uvažujme opět matematické kyvadlo z obrázku 1.1, popsané stavovými rovnicemi (4.5). Pro tento systém lze nalézt periodické řešení, které pro malé výchylky  $x_1(t) \rightarrow 0$  lze vyjádřit analyticky ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0) \cos \omega_0 t + \frac{x_2(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t \\ x_2(t) &= x_2(0) \cos \omega_0 t - \omega_0 x_1(0) \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (4.17)$$

kde  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ . Řešení lze snadno ověřit dosazením do stavových rovnic (4.5). Je zřejmé, že v těsné blízkosti mezního cyklu najdeme vždy další mezní cyklus pro jiné počáteční podmínky a zjištěný mezní cyklus je tedy neizolovaný.



**Obrázek 4.3:** Druhy mezních cyklů

Vyšetření existence mezního cyklu je v obecném případě značně náročné. Pro názornost se omezíme pouze na systém druhého řádu, jehož stavovou trajektorii můžeme zakreslit v rovině.

Zvolíme-li počáteční podmínky systému v blízkém okolí izolovaného mezního cyklu a jestli trajektorie z nich vycházející směřují do tohoto mezního cyklu, pak se tento mezní cyklus nazývá *stabilní*. Jestliže však trajektorie vycházející z počátečních podmínek v libovolně malém okolí izolovaného mezního cyklu se od něj vzdalují, nazývá se takový cyklus *nestabilní*. Existují ještě tzv. *polostabilní* mezní cykly. Jsou to takové mezní cykly, u kterých trajektorie vycházející z počátečních podmínek na jedné straně cyklu do něj vcházejí, ale na druhé se od něj vzdalují, viz obr. 4.3.

Existence periodického řešení, eventuálně mezního cyklu má pro praxi značný význam. U mnoha systémů automatického řízení bývá existence mezního cyklu nepřijatelná. V některých případech však existenci mezního cyklu připouštíme, obzvláště pokud má malou amplitudu kmitů a nezhorší spolehlivost systému. Existují však i systémy, u kterých exis-

tenci stabilního mezního cyklu úmyslně zajišťujeme. Typickým příkladem jsou oscilátory, ale i některé regulační obvody. Se způsoby vyšetření existence mezního cyklu se blíže seznámíme v kapitole 4.3.5

#### 4.1.5 *Shrnutí kapitoly 4.1*

Významnou pomůckou pro analýzu chování nelineárních dynamických systémů je sledování jejich stavové trajektorie. Stavovou trajektorii je možné přijatelným způsobem zobrazit pro systémy prvního a druhého řádu. Seznámili jsme se s existencí a způsobem zjištění rovnovážných stavů nazývaných též singulární body. U rovnovážných stavů lze obvykle poměrně snadno rozhodnout, zda jsou stabilní či nestabilní. Rovněž byla zmíněna možnost existence periodického řešení, tak zvaného mezního cyklu.

#### 4.1.6 *Kontrolní otázky pro kapitolu 4.1*

1. Jaké typy ustáleného chování lze pozorovat u nelineárních dynamických systémů?
2. Jak najdeme rovnovážné stavy nelineárního dynamického systému?
3. Může existovat pro daný nelineární dynamický systém více rovnovážných stavů?
4. Co je to izolovaný ustálený stav?

Správné odpovědi jsou uvedeny v dodatku A

#### 4.1.7 *Řešené příklady pro kapitolu 4.1*

**Příklad 4.5** *Nelineární dynamický systém je popsán stavovými rovnicemi*

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -3x_2 - 4x_1^3 + x_1\end{aligned}\tag{4.18}$$

*Chceme určit rovnovážné stavy systému a rozhodnout, zda jsou izolované.*

*Rovnovážné stavy vypočteme řešením rovnic*

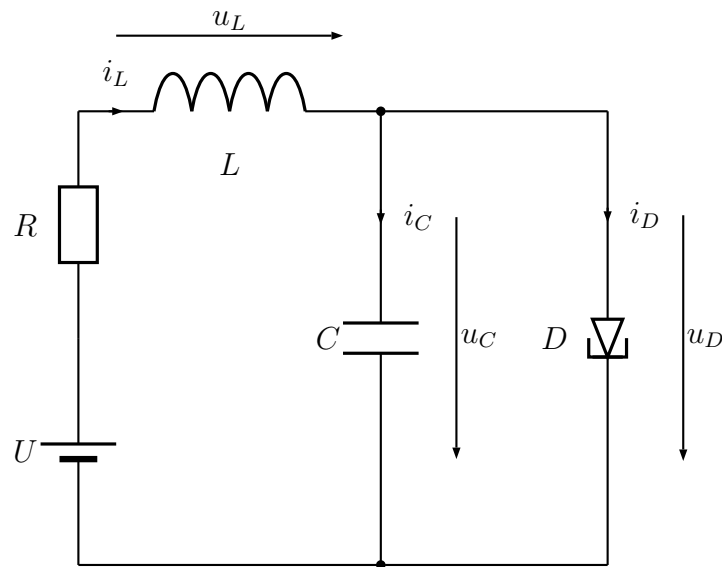
$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 = 0 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -3x_2 - 4x_1^3 + x_1 = 0\end{aligned}\tag{4.19}$$

*Pro všechny rovnovážné stavy bude platit  $x_2 = 0$ . Hodnotu  $x_1$  vypočteme řešením*

$$-4x_1^3 + x_1 = x_1(-4x_1^2 + 1) = 0\tag{4.20}$$

*což vede k výsledku  $x_{10} = \{0; 0,5; -0,5\}$ . Rovnovážné stavy systému tedy jsou  $\mathbf{x}_0 = \{(0; 0), (0,5; 0), (-0,5; 0)\}$ . Vzhledem k tomu, že lze snadno najít takové okolí každého z rovnovážných stavů (např. kružnici se středem v rovnovážném stavu a poloměrem 0,1), ve kterém se nenachází další rovnovážný stav, jsou všechny rovnovážné stavy systému izolované.*

**Příklad 4.6** Cílem příkladu je určit rovnovážné stavy obvodu s tunelovou diodou z obr. 4.4. Voltampérová charakteristika tunelové diody je zakreslena na obr. 4.5



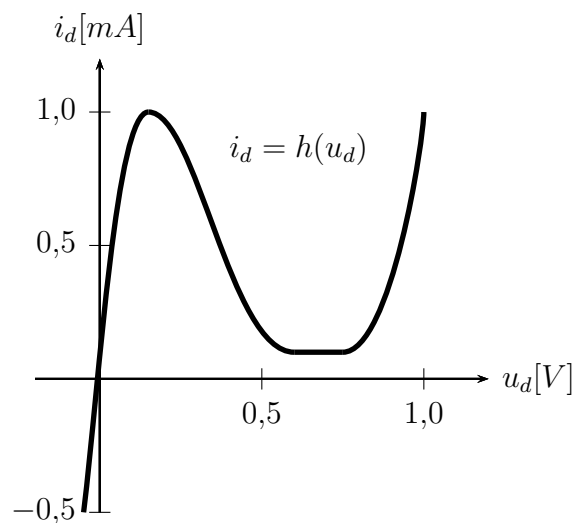
**Obrázek 4.4:** Obvod s tunelovou diodou z příkladu 4.6

Pro proud tekoucí kondenzátorem a napětí na cívce platí

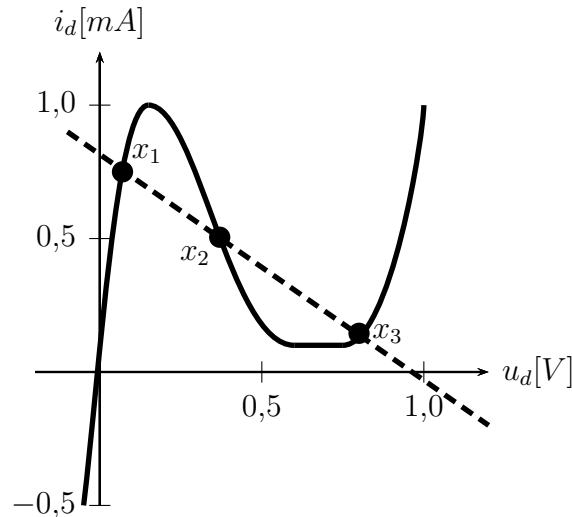
$$\begin{aligned} i_c &= C \frac{du_C}{dt} \\ u_L &= L \frac{di_L}{dt} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Pro proudy dále platí

$$i_C + i_D - i_L = 0 \quad (4.22)$$



**Obrázek 4.5:** Voltampérová charakteristika tunelové diody



**Obrázek 4.6:** Řešení rovnovážných stavů z příkladu 4.6

a tedy

$$i_C = -h(u_D) + i_L = -h(u_C) + i_L \quad (4.23)$$

Součet napětí v levé smyčce je

$$u_C - U + Ri_L + u_L = 0 \quad (4.24)$$

z čehož dostaneme

$$u_L = -u_C - Ri_L + U \quad (4.25)$$

Pokud zvolíme za stavové proměnné veličiny  $u_C$  a  $i_L$  získáme z (4.23), (4.25) stavové rovnice

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= \frac{1}{C}[-h(u_C) + i_L] \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{L}[-u_C - Ri_L + U] \end{aligned} \quad (4.26)$$

Rovnovážný stav vypočteme pomocí

$$\begin{aligned} 0 &= -h(u_C) + i_L \\ 0 &= -u_C - Ri_L + U \end{aligned} \quad (4.27)$$

Rovnice pro rovnovážný stav bude splněna při

$$h(u_C) = \frac{U}{R} - \frac{1}{R}u_C \quad (4.28)$$

Rovnovážné stavy můžeme najít grafickým řešením jako průsečíky voltampérové charakteristiky tunelové diody  $h(u_c)$  a přímky  $\frac{U}{R} - \frac{1}{R}u_C$ , tak jak je ukázáno na obr. 4.6. Při situaci zachycené na obrázku má systém celkem 3 rovnovážné stavy. Pokud při zachování odporu  $R$  zvýšíme napětí  $U$  bude mít systém je jeden rovnovážný stav v oblasti  $x_3$ . Pokud napětí pro změnu snížíme dostaneme jen jeden rovnovážný stav v oblasti  $x_1$ . Počet a poloha rovnovážných stavů tedy závisí na napětí  $U$  a odporu  $R$ . Jinou otázkou je pak, zda systém v jednotlivých rovnovážných stavech setrvává. Tento problém se pokusíme vyřešit později.



#### 4.1.8 Neřešené příklady pro kapitolu 4.1

**Příklad 4.7** Určete rovnovážné stavy systému popsaného diferenciální rovnicí

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0,6\frac{dx}{dt} + 3x + x^2 = 0 \quad (4.29)$$

**Příklad 4.8** Systém je popsán stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + (u - 1)x_2 + u \end{aligned} \quad (4.30)$$

Určete, za jakých podmínek dosáhne systém ustáleného chování.

## 4.2 Linearizace rozvojem do Taylorovy řady

### 4.2.1 Motivace

Řešení rovnic obsahujících nelineární závislosti je často problematické. To se týká samozřejmě i nelineárních dynamických systémů. Jednou z často používaných metod je náhrada nelineárního systému vhodně zvoleným systémem lineárním. Následně je pak možné k analýze chování a návrhu řízení použít metody známé z oblasti lineárních systémů. Tato kapitola se bude zabývat proto úlohou linearizace nelineárních systémů.

### 4.2.2 Postup linearizace rozvojem do Taylorovy řady

K nejčastějším v praxi používaným metodám náleží metoda používající rozvoje do Taylorovy řady. Linearizace rozvojem do Taylorovy řady se obvykle provádí v okolí izolovaných rovnovážných stavů. Předpokládejme, že systém popsaný stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{aligned} \quad (4.31)$$

dosáhl v čase  $t_0$  při působení vstupního signálu  $\mathbf{u}_0$  rovnovážného stavu  $\mathbf{x}_0$ . Pro  $t > t_0$  pak bude platit

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_0}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t) = 0 \\ \mathbf{y}_0 &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Stavový vektor, vektor výstupních a vstupních hodnot můžeme vyjádřit s pomocí rovnovážných hodnot a odchylek od těchto hodnot

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Dosazením rovnic (4.33) do stavových rovnic (4.31) dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}, t)\end{aligned}\quad (4.34)$$

Za předpokladu, že lze pravé strany rozvinout do Taylorovy řady, můžeme zapsat

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}_0}{dt} + \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t) + \left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \Delta\mathbf{x} + \left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}}\right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \Delta\mathbf{u} + \mathcal{R}_f \\ \mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t) + \left(\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{x}}\right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \Delta\mathbf{x} + \left(\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{u}}\right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \Delta\mathbf{u} + \mathcal{R}_g\end{aligned}\quad (4.35)$$

Pokud je odchylka od rovnovážného stavu malá můžeme zbytkové členy  $\mathcal{R}_f$ ,  $\mathcal{R}_g$  zanedbat a po odečtení rovnic (4.32) od rovnic (4.35) dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} &= \left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \Delta\mathbf{x} + \left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}}\right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \Delta\mathbf{u} \\ \Delta\mathbf{y} &= \left(\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{x}}\right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \Delta\mathbf{x} + \left(\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{u}}\right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \Delta\mathbf{u}\end{aligned}\quad (4.36)$$

Rovnice (4.36) reprezentují lineární dynamický systém popisující vývoj odchylek od rovnovážného stavu. Parciální derivace v rovnicích (4.36) představují matice systému, které vypočteme podle vztahu

$$\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)} \end{bmatrix}\quad (4.37)$$

Obdobně určíme i další parciální derivace. Tyto matice se nazývají *Jacobiho matice* vzhledem k příslušným vektorovým funkcím.

Tímto způsobem je získána velká část lineárních modelů fyzikálních systémů. Uvědomíme-li si, že rovnovážný stav je vlastně speciální trajektorie systému, můžeme si výše uváděnou metodu zobecnit a provádět linearizaci systému v blízkém okolí libovolné trajektorie označené  $\mathbf{x}_0$ , které náleží vstupní vektor  $\mathbf{u}_0$  a výstupní vektor  $\mathbf{y}_0$ . Je jen zapotřebí, aby pravé strany stavových rovnic byly v okolí této trajektorie schopny rozvoje do Taylorovy řady a odchylky od trajektorie byly malé. Potíž však v tomto případě tvoří vyjádření trajektorie (řešení původního nelineárního systému), které je vyjma trajektorie rovnovážného stavu obvykle velmi obtížné. Jistou nevýhodou je, že rozsah odchylek pro které je lineární náhrada ještě dostatečně přesná, není možno exaktně stanovit. Celou problematiku linearizace si vysvětlíme na příkladě.

**Příklad 4.9** Stejnoseměrný motor s cizím buzením je popsán stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned}
 \frac{d\omega_m}{dt} &= \frac{1}{J}[K\Phi i_a - B\omega_m - m_p] \\
 \frac{di_a}{dt} &= \frac{1}{L_a}[-R_a i_a - K\Phi\omega_m + u_a] \\
 \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{1}{N_b}[-R_b f^{-1}(\Phi) + u_b] \\
 m_i &= K\Phi i_a
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

kde  $\omega_m$  jsou mechanické otáčky,  $J$  moment setrvačnosti,  $\Phi$  magnetický tok budícího vinutí,  $i_a$  proud kotvy,  $m_p$  mechanický zátěžný moment,  $B$  tlumení (konstanta viskózního tření,  $K$  konstanta motoru,  $L_a$  indukčnost kotvy,  $R_a$  odpor vinutí kotvy,  $u_a$  elektrické napětí kotvy,  $N_b$  počet závitů budícího vinutí,  $R_b$  odpor budícího vinutí,  $u_b$  napětí na budícím vinutí,  $f()$  nelineární magnetizační charakteristika.

Pokusme se nyní provést linearizaci systému v blízkosti ustáleného stavu. Pro konstantní hodnoty vstupních veličin  $u_a$ ,  $u_b$  a  $m_p$  určíme hodnotu ustáleného stavu  $x_0$  z rovnic

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{J}[K\Phi i_a - B\omega_m - m_p] \\
 0 &= \frac{1}{L_a}[-R_a i_a - K\Phi\omega_m + u_a] \\
 0 &= \frac{1}{N_b}[-R_b f^{-1}(\Phi) + u_b]
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Řešení je jednoznačné a vede na hodnoty

$$\begin{aligned}
 \Phi_0 &= f\left(\frac{u_{b0}}{R_b}\right) \\
 i_{a0} &= \frac{Bu_{a0} + K\Phi_0 m_{p0}}{BR_a + (K\Phi_0)^2} \\
 \omega_{m0} &= \frac{K\Phi_0 u_{a0} - R_a m_{p0}}{BR_a + (K\Phi_0)^2}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Lineární model bude popisovat odchylky od ustáleného stavu a bude mít tvar

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \frac{d\Delta\omega_m}{dt} \\ \frac{d\Delta i_a}{dt} \\ \frac{d\Delta\Phi}{dt} \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} \Delta\omega_m \\ \Delta i_a \\ \Delta\Phi \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} \Delta u_a \\ \Delta u_b \\ \Delta m_p \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \Delta\omega_m \\ \Delta m_i \end{bmatrix} &= \mathbf{C} \begin{bmatrix} \Delta\omega_m \\ \Delta i_a \\ \Delta\Phi \end{bmatrix} + \mathbf{D} \begin{bmatrix} \Delta u_a \\ \Delta u_b \\ \Delta m_p \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Jacobiho matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  určíme analogicky ke vztahu (4.37). Například pro prvek  $a_{12}$  platí

$$a_{12} = \left. \frac{\partial}{\partial i_a} \left\{ \frac{1}{J} (K\Phi i_a - B\omega_m + m_p) \right\} \right|_{x_0} = \left. \frac{K\Phi}{J} \right|_{\Phi=\Phi_0} = \frac{K\Phi_0}{J} \quad (4.42)$$

přičemž další prvky matic vypočteme obdobně. Pro matice stavového popisu pak dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{K\Phi_0}{J} & \frac{K i_{a0}}{J} \\ -\frac{K\Phi_0}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K\omega_{m0}}{L_a} \\ 0 & 0 & -\frac{R_b}{N_b} \left( \frac{\partial f^{-1}(\Phi)}{\partial \Phi} \right)_{\Phi=\Phi_0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{J} \\ \frac{1}{L_a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{N_b} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & K\Phi_0 & K i_{a0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Dosáhli jsme tedy náhrady původního nelineárního systému systémem lineárním

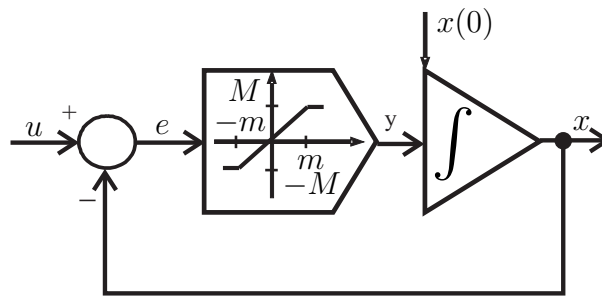
Linearizace rozvojem do Taylorovy řady umožňuje získání lineární náhrady původního nelineárního systému. Problémem však je, že tato náhrada dobře aproximuje původní systém jen v blízkosti zvoleného pracovního bodu (ustáleného stavu), kolem kterého byla linearizace provedena. Řada technických systémů však obsahuje nelinearitu, která se skládá z řady lineárních úseků. Tyto systémy nazýváme obvykle *po částech lineární*. Použitím lineární teorie v jednotlivých úsecích pak obvykle dokážeme analyzovat globální chování systému. Tento případ si opět ukážeme na příkladu.

**Příklad 4.10** Na obr. 4.7 je nakresleno schéma jednoduchého regulačního obvodu na kterém je ideální integrátor řízen proporcionalním regulátorem s nasycením. Je zapotřebí nalézt stavovou trajektorii systému pro spojitě vstupní signály  $u(t)$  a libovolné počáteční podmínky, speciálně pak pro konstantní vstupní signál  $u(t) = u_0 > 0$ . Dynamika systému je popsána rovnicí

$$\frac{dx}{dt} = f(u - x) \quad (4.44)$$

kde  $f$  je nelineární funkce typu nasycení. Tato funkce se skládá ze tří lineárních úseků a model systému tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} K(u - x) & u - m \leq x \leq u + m \\ M & x < u - m \\ -M & x > u + m \end{cases} \quad (4.45)$$



Obrázek 4.7: Proporcionální regulátor s nasycením

kde  $K = \frac{M}{m}$ . Z teorie lineárních systémů nyní snadno určíme chování systému v jednotlivých lineárních oblastech

$$x(t) = \begin{cases} e^{-Kt}x(t_0) + K \int_{t_0}^t e^{-K(t-\tau)}u(\tau)d\tau & u - m \leq x \leq u + m \\ x(t_0) + M(t - t_0) & x < u - m \\ x(t_0) - M(t - t_0) & x > u + m \end{cases} \quad (4.46)$$

Pro jakýkoli průběh vstupní funkce  $u(t)$  a hodnotu počátečního stavu  $x(t_0)$  jsme nyní schopni určit chování systému. Jen je třeba pečlivě sledovat okamžiky, kdy hodnota stavové veličiny  $x$  dosáhne hraniční hodnoty, kdy se mění popis systému. Hraniční hodnota se pak stává počáteční hodnotou pro výpočet v dalším lineárním úseku. V případě, že hodnota vstupu je konstantní  $u(t) = u_0 > 0$ , rovnice (4.46) přejde do tvaru

$$x(t) = \begin{cases} e^{-Kt}x(t_0) + u_0(1 - e^{-Kt}) & u - m \leq x \leq u + m \\ x(t_0) + M(t - t_0) & x < u - m \\ x(t_0) - M(t - t_0) & x > u + m \end{cases} \quad (4.47)$$

Z rovnice (4.47) je zřejmé, že pro jakoukoli hodnotu  $u_0$  a počáteční hodnotu stavu  $x(t_0)$  systém bude směřovat k ustálenému stavu  $x = u_0$ . Podařilo se nám tedy získat poměrně významný závěr týkající se globálního chování systému.

### 4.2.3 Shrnutí kapitoly 4.2

Řešení nelineárních diferenciálních rovnic je velice náročné. Proto se snažíme najít lineární náhradu. Seznámili jsme se s metodou linearizace založené na rozvoji do Taylorovy řady v okolí zvoleného pracovního bodu (většinou ustálený stav). V řadě technických aplikací se vyskytují takové nelinearity, které se skládají z řady lineárních úseků (po částech lineární funkce). V takovém případě můžeme řešit chování systému pomocí lineární teorie v každém úseku samostatně a získat tak globální pohled na chování systému.

### 4.2.4 Kontrolní otázky pro kapitolu 4.2

1. Musí být prováděna linearizace pomocí Taylorova rozvoje jen kolem ustáleného stavu?

2. Lze získat pomocí lineární náhrady vytvořené metodou Taylorova rozvoje globální představu o chování systému?
3. Jak vypočteme Jacobiho matici?
4. Co to jsou systémy po částech lineární?

Správné odpovědi jsou uvedeny v dodatku A.

#### 4.2.5 Řešené příklady pro kapitolu 4.2

**Příklad 4.11** *Pokusme se najít linearizaci systému*

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -3x_2 - 4x_1^3 + x_1 \\ y &= x_1^3\end{aligned}\tag{4.48}$$

*v okolí jeho rovnovážných stavů.*

*Rovnovážné stavy zadaného systému byly již nalezeny při řešení příkladu 4.5. Hodnoty rovnovážných stavů jsou  $\mathbf{x}_0 = \{(0; 0), (0,5; 0), (-0,5; 0)\}$ . Linearizaci hledáme ve tvaru*

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} \\ \Delta y &= \mathbf{C} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.49}$$

*kde  $\Delta x_1 = x_1 - x_{10}, \Delta x_2 = x_2 - x_{20}, \Delta y = y - y_0$  a*

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 12x_{10}^2 & -3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} 3x_{10}^2 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.50}$$

*Pro rovnovážný stav  $\mathbf{x}_0 = (0; 0)$  pak dostaneme lineární náhradu*

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta x_1}{dt} &= \Delta x_2 \\ \frac{d\Delta x_2}{dt} &= \Delta x_1 - 3\Delta x_2 \\ \Delta y &= 0\end{aligned}\tag{4.51}$$

zatímco pro  $\mathbf{x}_0 = (\pm 0,5; 0)$  platí

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta x_1}{dt} &= \Delta x_2 \\ \frac{d\Delta x_2}{dt} &= -2\Delta x_1 - 3\Delta x_2 \\ \Delta y &= 0,75\Delta x_1\end{aligned}\tag{4.52}$$

**Příklad 4.12** Chceme určit Jacobiho matici pro systém z příkladu 4.6. Stavové rovnice systému jsou

$$\begin{aligned}\frac{du_C}{dt} &= \frac{1}{C}[-h(u_C) + i_L] \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{L}[-u_C - Ri_L + U]\end{aligned}\tag{4.53}$$

přičemž předpokládáme, že voltampérovou charakteristiku tunelové diody budeme aproximovat funkcí

$$i_D = h(u_D) = [17,76u_D - 103,79u_D^2 + 229,62u_D^3 - 226,31u_D^4 + 83,72u_D^5]10^{-3}\tag{4.54}$$

kde  $u_D = u_C$  (obr. 4.4). Další parametry obvodu jsou  $R = 1,5k\Omega$ ,  $C = 2pF$  a  $L = 5\mu H$ . Pro Jacobiho matici pak dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_C} & \frac{\partial f_1}{\partial i_L} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_C} & \frac{\partial f_2}{\partial i_L} \end{bmatrix}_{u_{C0}, i_{L0}} = \begin{bmatrix} -0,5 \cdot 10^{12} \frac{dh(u_C)}{du_C} & 0,5 \cdot 10^{12} \\ -0,2 \cdot 10^6 & -0,3 \cdot 10^9 \end{bmatrix}_{u_{C0}} = \\ &= 10^5 \begin{bmatrix} -5 \cdot 10^6 \frac{dh(u_C)}{du_C} & 5 \cdot 10^6 \\ -2 & -3000 \end{bmatrix}_{u_{C0}}\end{aligned}\tag{4.55}$$

kde

$$\frac{dh(u_C)}{du_C} = [17,76 - 207,58u_C + 688,86u_C^2 - 905,24u_C^3 + 418,6u_C^4]10^{-3}\tag{4.56}$$

#### 4.2.6 Neřešené příklady pro kapitolu 4.2

**Příklad 4.13** Nelineární dynamický systém je popsán stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2^2 + x_1 \cos x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 + (x_1 + 1)x_1 + x_1 \sin x_1\end{aligned}\tag{4.57}$$

Proveďte jeho linearizaci v okolí pracovního bodu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

**Příklad 4.14** Systém je popsán diferenciální rovnicí

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4 \left( \frac{dx}{dt} \right)^5 + (x^2 + 1)u = 0\tag{4.58}$$

Najděte lineární náhradu systému platnou v okolí pracovního bodu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

## 4.3 Konstrukce trajektorie systému

### 4.3.1 Motivace

Ve většině případů nedokážeme vyřešit chování nelineárního dynamického systému analyticky. V předchozí kapitole jsme se zabývali možnostmi použití lineární náhrady. Jak však již bylo řečeno, lineární náhrada často aproximuje původní systém jen v poměrně úzké oblasti a neumožňuje tedy získání globální představy o vlastnostech systému. V takové situaci jsme nuceni se uchýlit k tradičním grafickým metodám. Následující kapitola ukáže možnosti konstrukce stavové trajektorie za účelem vytvoření globálního pohledu na chování studovaného nelineárního systému.

### 4.3.2 Trajektorie systémů prvního řádu

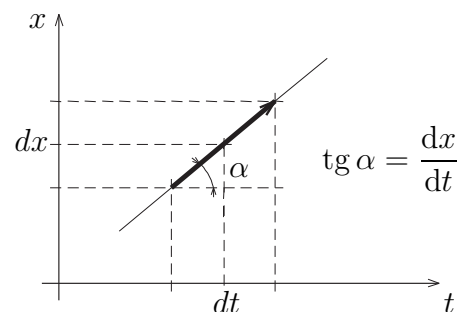
Systémy prvního řádu představují skupinu nejjednodušších dynamických systémů. I když je většina reálných technických systémů vyššího než prvního řádu, budeme se systémy prvního řádu dále zabývat. Některé systémy vyšších řádů je totiž možné úspěšně zjednodušit, či rozložit na několik systémů prvního řádu a ty dále řešit samostatně. Spojitý nelineární dynamický systém prvního řádu je popsán rovnicemi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, \mathbf{u}, t) \\ y &= g(x, \mathbf{u}, t) \end{aligned} \quad (4.59)$$

Představíme-li si stavovou trajektorii tohoto systému v časoprostoru (obr. 4.1), udává rovnice (4.59) hodnotu derivace  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  v každém bodě časoprostoru. Tato derivace nám určuje sklon tečny k stavové trajektorii v každém bodě časoprostoru. Celý časoprostor tedy můžeme takovými tečnami vyplnit a trajektorie se musí po krátký časový interval k této tečně přimykát a postupovat po ní ve směru rostoucího času. Po krátký čas se tedy trajektorie pohybuje podél geometrického vektoru, jehož složky jsou  $dx$ ,  $dt$  (obr. 4.8). Tento vektor budeme nazývat *směrový vektor*. Celý časoprostor pak můžeme pokrýt polem takových vektorů a získat tak globální přehled o chování všech možných trajektorií. Pokrytí časoprostoru *polem směrových vektorů* je užitečné provést organizovaně tak, abychom opravdu globální pohled získali. Za tímto účelem je vhodné vyšetřit ty množiny bodů, ve kterých je sklon směrových vektorů (směrnice tečen  $k$ ) stejný, tj. zjistit  $x$ ,  $t$ , které vyhovují rovnici

$$\frac{dx}{dt} = k = konst, \quad (4.60)$$

Množiny bodů  $(x, t)$  pro daný sklon směrnice  $k$  se nazývají *izokliny*. Jejich sestavení si ukážeme na jednoduchém příkladě.



Obrázek 4.8: Směrový vektor



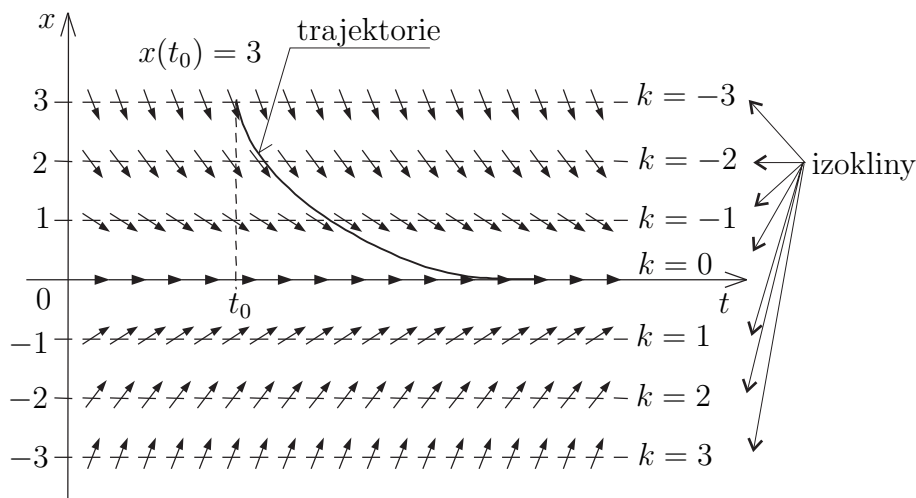
**Příklad 4.15** Předpokládejme systém prvního řádu popsany rovnicí

$$\frac{dx}{dt} = -x \quad (4.61)$$

Izokliny budou množiny bodů

$$\frac{dx}{dt} = -x = k = konst, \quad (4.62)$$

což odpovídá přímkám  $x = -k$  rovnoběžným s časovou osou. Pole směrových vektorů s vyznačenými izoklinami je uvedeno na obrázku 4.9.



**Obrázek 4.9:** Pole směrových vektorů

Nyní dokážeme snadno zakreslit trajektorii pro libovolný počáteční stav, tak jak je zakreslena trajektorie např. pro  $x(t_0) = 3$ . Z uspořádání pole směrových vektorů je zřejmé, že trajektorie bude vždy směřovat k ustálenému stavu  $x = 0$ .

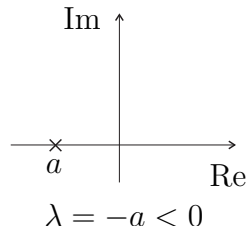
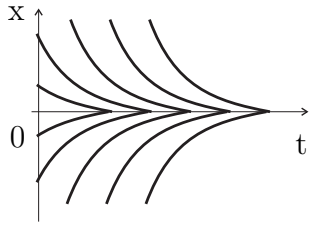
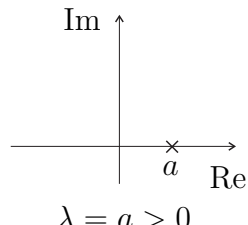
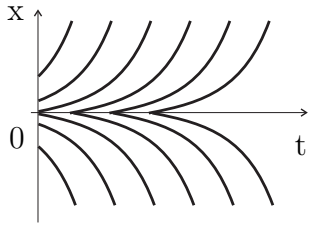
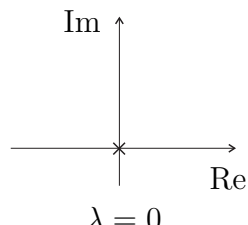
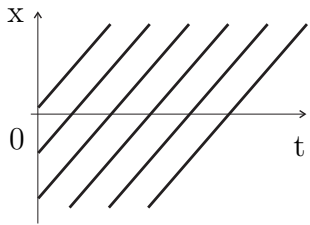
Dynamický systém analyzovaný v předchozím příkladě byl lineární. Má však uvedené řešení nějaký smysl i pro systémy nelineární? Řada nelineárních systémů spadá do skupiny systémů po částech lineárních. Můžeme tedy určit hraniční podmínky, při kterých se mění chování systému a následně určit v rámci daných mezí trajektorii lineárního systému tak, jak ukazuje příklad 4.15. V tabulce 4.1 jsou uvedeny tři možné tvary stavových trajektorií lineárních t-invariantních systémů. První dva případy odpovídají neřízeným systémům (což jak bude uvedeno dále neznamená žádné omezení), třetí případ uvažuje přímo systém s konstantním řízením.

Pro lineární řízený dynamický systém prvního řádu platí

$$\frac{dx}{dt} = ax + u \quad (4.63)$$

při počáteční podmínce  $x(t_0)$ . Nyní uvažujme při konstantní hodnotě řízení  $u = konst$  substituci

$$ax + u = z \quad (4.64)$$

	Stavová rovnice	Charakteristické číslo $\lambda$	Analytický zápis stavové trajektorie	Stavová trajektorie
1	$\dot{x} = -ax$	 $\lambda = -a < 0$	$x(t) = x(t_0)e^{-at}$	
2	$\dot{x} = ax$	 $\lambda = a > 0$	$x(t) = x(t_0)e^{at}$	
3	$\dot{x} = u$ $u = konst$	 $\lambda = 0$	$x(t) = x(t_0) + ut$	

**Tabulka 4.1:** Stavové trajektorie lineárních t-invariantních systémů prvního řádu

Po vyjádření proměnné  $x$  ze substituce (4.64) a dosazení do (4.63) dostaneme

$$\frac{dz}{dt} = az \quad (4.65)$$

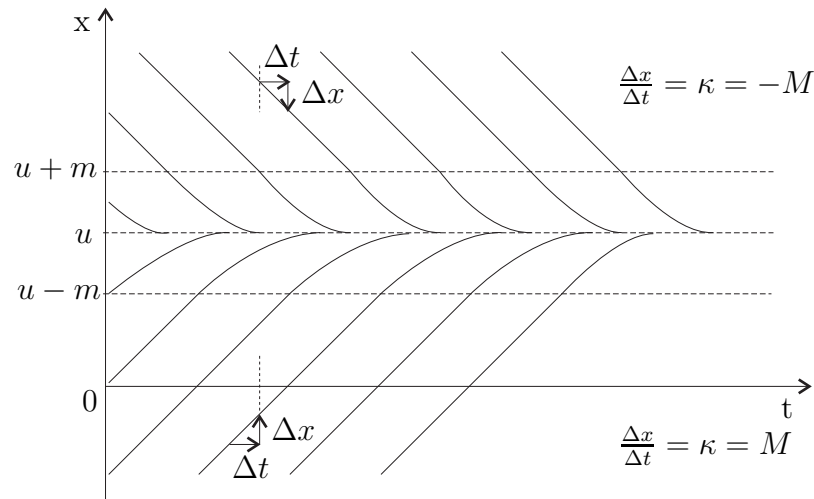
s počáteční podmínkou  $z(t_0) = ax(t_0) + u$ . Substitucí (4.64) jsme tedy původní řízený systém (4.63) převedli na systém neřízený (4.65). Pokud známe trajektorii neřízeného lineárního systému prvního řádu, dokážeme určit trajektorii původního systému podle vztahu

$$x = \frac{z}{a} - \frac{u}{a} \quad (4.66)$$

což odpovídá změně měřítká a posunutí trajektorie neřízeného systému. Použití tabulky 4.1 si ukážeme na následujícím příkladě.

**Příklad 4.16** V příkladě 4.10 jsme se zabývali jednoduchým regulačním obvodem s nasycením. Nyní se k tomuto systému pokusíme načrtnout možné průběhy stavové trajektorie. Systém obsahuje jen nelinearitu typu nasycení, která je po částech lineární funkcí. V rozsahu  $u - m \leq x \leq u + m$  bude chování odpovídat řízenému systému (4.63), kde  $a = -K$  a vstup má konstantní hodnotu  $Ku$ . V této oblasti se tedy bude systém

chovat obdobně jako uvádí první řádek tabulky 4.1, přičemž vzhledem k posunutí (4.66) se budou trajektorie blížit rovnovážnému stavu  $x_0 = u$ . Pro  $x > u + m$  nebo  $x < u - m$  bude mít stavová trajektorie charakter odpovídající třetímu řádku tabulky 4.1 se směrnici  $-M$ , respektive  $M$ . Možný průběh stavové trajektorie jsou načrtnuty na obrázku 4.10.



**Obrázek 4.10:** Trajektorie jednoduchého systému s nelinearitou typu nasycení

Obrázek potvrzuje závěr uvedený v příkladě 4.10, že pro libovolnou počáteční podmínku se hodnota stavu systému ustálí na hodnotě  $x_0 = u$ . Je také zřejmé, že nasycení zpomalí reakci systému při vyšších hodnotách vstupu  $u$  (lineární průběh) oproti čistě lineárnímu systému bez nasycení (exponenciální průběh).

U regulačních obvodů bývá zvykem sledovat průběh regulační odchylky v závislosti na čase. Důvodem je, že vesměs žádáme, aby regulační odchylka pro jakékoliv vstupní signály a počáteční podmínky byla minimální a s časem konvergovala k nule. To nám zaručuje jednodušší kreslení stavových trajektorií, pokud se nám podaří stav systému jednoznačně vyjádřit regulační odchylkou. Problém si ukážeme ještě jedním řešením předchozího příkladu.

**Příklad 4.17** Opět budeme uvažovat systém řešený v příkladě 4.10. Předpokládejme, že na vstupu systému působí signál  $u = \text{konst}$ . Nyní použijeme substituci

$$e = u - x \quad (4.67)$$

v rovnicích (4.44) a (4.45). Dostaneme tak systém, jehož stavovou veličinou je právě regulační odchylka  $e$

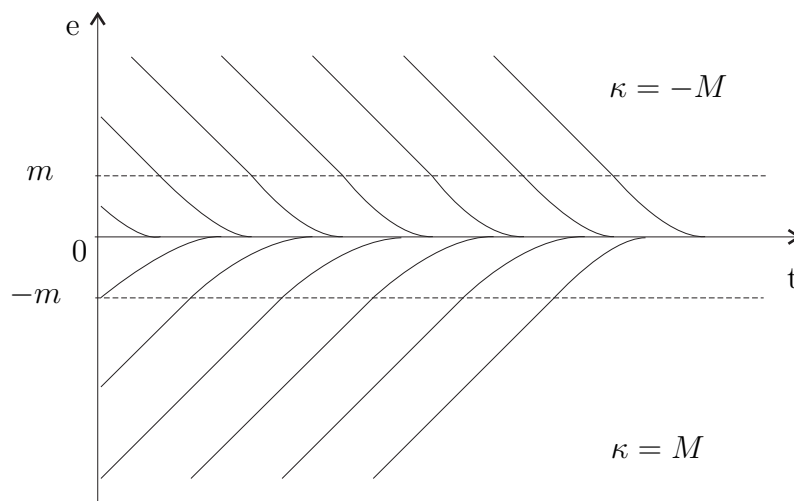
$$\frac{de}{dt} = -f(e) \quad (4.68)$$

$$f(e) = \begin{cases} Ke & -m \leq e \leq m \\ M & e > m \\ -M & e < -m \end{cases} \quad (4.69)$$

Počáteční podmínky pro stavovou rovnici (4.68) určíme ze substituční rovnice (4.67)

$$e(0) = x(0) - u \quad (4.70)$$

V pásmu  $-m \leq e \leq m$  se pak stavové trajektorie chovají jako u neřízeného systému (první řádek tabulky 4.1), zatím co mimo uvedené pásmo budou trajektorie odpovídat řízenému systému - integrátoru s konstantním vstupem (třetí řádek tabulky 4.1). Výsledné trajektorie jsou zakresleny na obrázku 4.11.

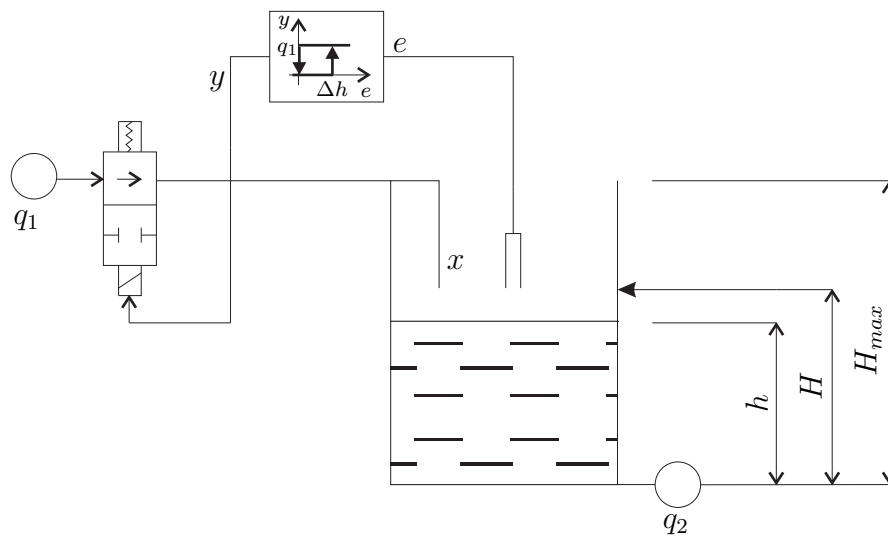


**Obrázek 4.11:** Trajektorie jednoduchého systému s nelinearitou typu nasycení - regulační odchylka

V případě, že v systému se jako subsystém vyskytuje systém bez dynamiky ale s pamětí, je zapotřebí sledovat i vývoj stavu tohoto subsystému. Stavový prostor celého subsystému se tak rozšíří, vesměs však takovým způsobem, že v dostatečně dlouhém časovém intervalu lze na celý systém pohlížet jakoby šlo o jednoduchý systém prvního řádu (to platí i pro spojitě dynamické systémy vyšších řádů). Problém si opět vysvětlíme příkladem.

**Příklad 4.18** Uvažujme systém řízení výšky hladiny zachycený na obrázku 4.12, kde  $h$  je okamžitá výška hladiny,  $H$  je žádaná výška hladiny,  $H_{max}$  je maximální možná výška hladiny. Výška hladiny je ovlivňována průtoky  $q_1$  a  $q_2$ . První stavovou veličinou je v tomto případě výška hladiny  $h$ . Vzhledem k tomu, že pro řízení je použit relový regulátor s hysterezí, je však třeba dále uvažovat i stav sepnutí relé (nelinearita s pamětí). Předpokládejme, že výstupní průtok  $q_2$  je daný, chování systému je pak dáno rovnicemi

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= f_1(h, y, q_2) \\ y &= f_2(e, y) \end{aligned} \quad (4.71)$$



Obrázek 4.12: Releový regulátor výšky hladiny

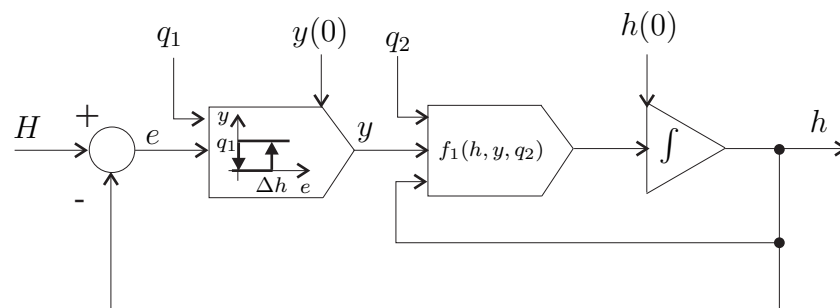
kde

$$f_1(h, y, q_2) = \begin{cases} 0 & 0 < h < H_{max} \\ K(y - q_2) & h = 0 \wedge y - q_2 \geq 0 \\ 0 & h = H_{max} \wedge y - q_2 \leq 0 \\ 0 & h = 0 \wedge y - q_2 < 0 \\ 0 & h = H_{max} \wedge y - q_2 > 0 \end{cases} \quad (4.72)$$

přičemž konstanta  $K$  je dána rozměry nádrže. Funkce  $f_2$  odpovídá nelinearitě relé s hysterezí a bude pro ni platit

$$f_2(e, y) = \begin{cases} 0 & e < 0 \\ q_1 & e > \Delta h \\ \text{„bez změny stavu“} & 0 \leq e \leq \Delta h \end{cases} \quad (4.73)$$

Stavové schéma celého systému je zakresleno na obrázku 4.13. Pokusme se nyní zakreslit



Obrázek 4.13: Stavové schéma regulace výšky hladiny

stavové trajektorie pro případ  $q_1 = \text{konst}$ ,  $q_2 = \text{konst}$ ,  $q_1 > q_2$ . Pokud bude regulátor ve stavu zapnuto ( $y = q_1$ ), platí

$$\frac{dh}{dt} = \begin{cases} K(q_1 - q_2) & 0 \leq h < H_{max} \\ 0 & h = H_{max} \end{cases} \quad (4.74)$$

Pro regulátor ve vypnutém stavu ( $y = 0$ ) dostaneme

$$\frac{dh}{dt} = \begin{cases} -Kq_2 & 0 < h \leq H_{max} \\ 0 & h = 0 \end{cases} \quad (4.75)$$

Regulátor může být ve stavu zapnuto pro  $e \geq 0$ , t.j.  $h \leq H$  a ve stavu vypnuto pro  $e \leq \Delta h$ , t.j.  $h \geq H - \Delta h$ . Výška hladiny smí být jen v rozmezí  $h \in \langle 0, H_{max} \rangle$ . Rovnice (4.74), (4.75) a znalost průběhu reléové charakteristiky nám nyní umožňuje zkonstruovat stavovou trajektorii pro zvolenou hodnotu  $H$ . Vyjdeme-li z počátečního stavu  $h(0) = 0$  musí být pro  $H > \Delta h$  regulátor ve stavu zapnuto a hladina v nádrži poroste podle rovnice (4.74). Jakmile  $h$  překročí hodnotu  $H$ , dojde ke změně stavu regulátoru a hladina začne klesat podle rovnice (4.75). K další změně stavu regulátoru dojde v okamžiku, kdy výška hladiny  $h$  klesne pod hodnotu  $H - \Delta h$ . Celý děj se bude opakovat a v systému vzniknou periodické oscilace. Pokud vyjdeme z počáteční podmínky  $h(0) \in \langle H, H - \Delta h \rangle$ , musí být zadán i počáteční stav relé. I v tomto případě pak vzniknou periodické oscilace. Je zřejmé, že pro správnou činnost regulace je nutné, aby  $H < H_{max}$ . V opačném případě systém dosáhne ustáleného stavu  $h = H_{max}$  a voda bude přetékat. Obdobně musí platit  $H - \Delta h > 0$ , jinak nastane ustálený stav  $h = 0$  a regulátor setrvá ve stavu vypnuto. Při normální funkci bude hladina oscilovat mezi úrovněmi  $H - \Delta h$  a  $H$  s periodou

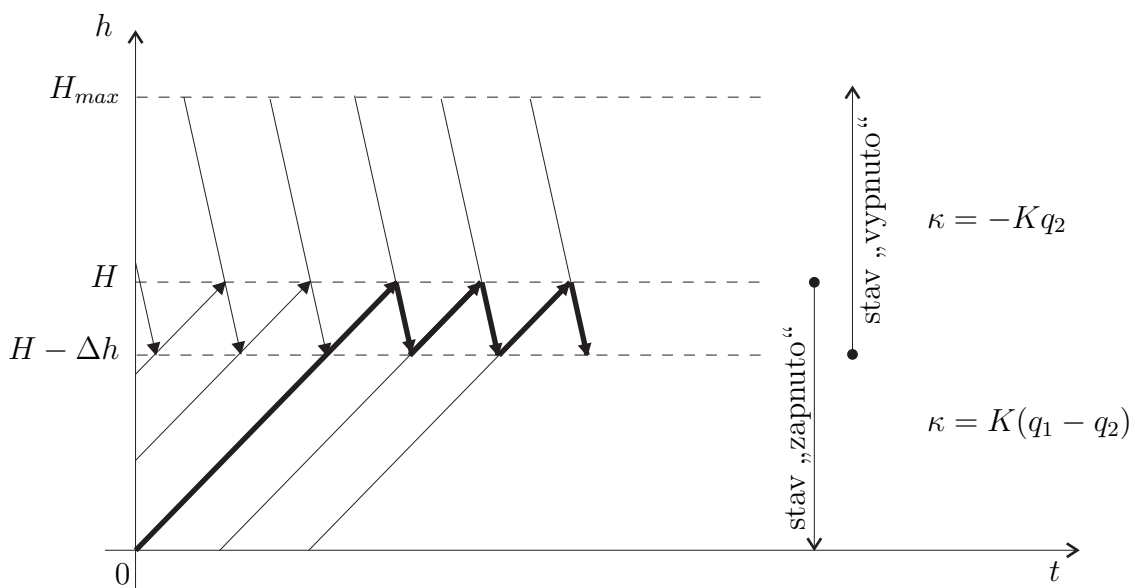
$$T = \frac{\Delta h}{K(q_1 - q_2)} + \frac{\Delta h}{Kq_2} = \frac{\Delta h q_1}{K(q_1 - q_2)q_2} \quad (4.76)$$

Průběh stavové trajektorie je zobrazen na obrázku 4.14

Z probraných příkladů je zřejmé, že výpočet systému prvního řádu je poměrně jednoduchý, pokud jde o systémy t-invariantní s konstantními vstupními signály. Globální řešení t-variantních resp. t-invariantních systémů s proměnnými vstupními signály již není s pomocí výše uváděné metodiky tak jednoduché a přehledné. Většinou však jde o vyšetření chování pro nějaký standardní vstupní signál, např. harmonického průběhu. V takovém případě je výhodnější použít buďto po částech lineární výpočet nebo výpočet chování v určité části časoprostoru na počítači. Následující příklad objasní tuto problematiku a zároveň osvětlí jeden ze způsobů potlačení efektu suchého tření.

**Příklad 4.19** Uvažujme systém zachycený na obrázku 4.2. Na těleso působí síla  $F_p = F_0 + F_{st}$ , kde  $F_0$  je konstantní složka a  $F_{st}$  je střídavá složka s pilovým průběhem. Pohyb tělesa je brzděn třecí silou  $F < F_t$ , kde  $F_t$  je hodnota Coulombova tření. Dále budeme předpokládat, že amplituda střídavé složky  $F_{st}$  je právě  $F_t$ . Úkolem je nyní vyšetřit průběh rychlosti tělesa za daných podmínek. Pohyb tělesa je dán rovnicí

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_v}{m} \quad (4.77)$$



Obrázek 4.14: Stavová trajektorie regulace výšky hladiny

kde  $m$  je hmotnost tělesa a

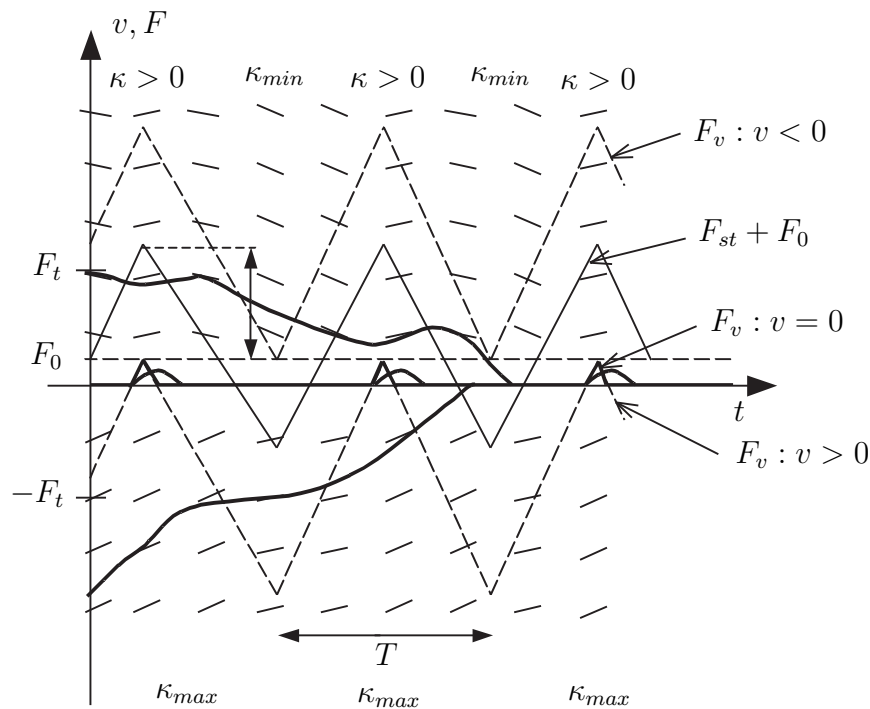
$$F_v = F_0 + F_{st} - F \quad (4.78)$$

Hodnotu třecí síly  $F$  určíme pomocí vztahu (4.13). Střídavá složka  $F_{st}$  má pilový průběh a platí pro ni

$$F_{st}(t) = \begin{cases} \frac{4F_t}{T}(t - nT) & t \in \langle nT - \frac{T}{4}; nT + \frac{T}{4} \rangle \\ -\frac{4F_t}{T}(t - n\frac{T}{2}) & t \in \langle (2n+1)\frac{T}{2} - \frac{T}{4}; (2n+1)\frac{T}{2} + \frac{T}{4} \rangle \end{cases} \quad (4.79)$$

kde  $n = 0, 1, 2, \dots$

Stavová trajektorie systému je zakreslena na obrázku 4.15. Jestliže  $v = 0$  a  $|F_0 + F_{st}| < F_t$ , pak velikost třecí síly bude  $F = F_0 + F_{st}$ , celková síla působící na těleso  $F_v = 0$  a tedy  $\frac{dv}{dt} = \kappa = 0$ . V případě, že  $|F_0 + F_{st}| > F_t$ , bude mít třecí síla hodnotu  $F = F_t \text{sign}(F_0 + F_{st})$  a celková síla působící na těleso bude  $F_v = F_0 + F_{st} - F_t \text{sign}(F_0 + F_{st})$ . Vzhledem k tomu, že amplituda síly  $F_{st}$  byla zvolena ve stejné velikosti jako Coulombovo tření  $F_t$ , průběh výsledné síly odpovídá trojúhelníkům o výšce  $F_0$  nad osou  $v = 0$ , tak jak je zobrazeno na obrázku 4.15 pro  $v = 0$ . Průběh této síly určuje  $\kappa$  (směrnici tečen k trajektorii) na ose  $v = 0$ . Jestliže  $v > 0$ , je celková síla  $F_v = F_0 + F_{st} - F_t$ , čímž je určena hodnota směrnice  $\kappa$  nad osou  $v = 0$  a izokliny jsou přímky  $t = \text{konst}$ . Pro  $v < 0$  je celková síla  $F_v = F_0 + F_{st} + F_t$ , která určuje hodnotu  $\kappa$  pod osou  $v = 0$ . Vzhledem ke zvoleným hodnotám jednotlivých sil je v celé této oblasti  $\kappa > 0$ . Nyní jsme schopni vykreslit pole tečen k trajektorii. Zahájíme-li pohyb z počátečních podmínek  $v(0) = 0$  a při působení malé síly  $F_0$ , nedojde zpočátku k žádnému pohybu. Teprve až řídicí síla překoná tření, dojde k růstu rychlosti. Jakmile velikost řídicí síly klesne pod hodnotu třecí síly, začne být těleso brzděno až do úplného zastavení. Při malé hodnotě  $F$  se bude tedy



**Obrázek 4.15:** Stavová trajektorie systému s dynamickým mazáním

těleso střídavě rozjíždět a zastavovat, střední hodnota rychlosti však bude konstantní a kladná. Z průběhu stavových trajektorií je navíc zřejmé, že tohoto chování dosáhneme z libovolných počátečních podmínek. Použitím pomocné síly  $F_{st}$  je tedy možné eliminovat jeden z důsledků suchého tření, který spočívá v tom, že těleso nereaguje pohybem na řídicí sílu menší než je velikost suchého tření. Považujeme-li nyní sílu  $F_0$  za řídicí, je zřejmé, že se těleso dostane do pohybu i při  $|F_0| < F_t$  (pokud působí současně i střídavá síla  $F_{st}$ ). Při dostatečně vysoké frekvenci síly  $F_{st}$  zjistí pozorovatel pouze průměrnou rychlost. V této průměrné rychlosti pak ale bude reakce tělíska se třením na skokovou změnu síly  $F_0$  poněkud odlišná od reakce tělíska bez tření (tření není úplně odstraněno). Tak při nulové síle  $F_0$  a nenulových počátečních podmínkách se tělíska se třením i za přítomnosti  $F_{st}$  zastaví. Tělíska bez tření by se pohybovala stále počáteční rychlostí. Při malé síle  $F_0$  nabude tělíska během periody  $F_{st}$  konstantní střední rychlost určenou silou  $F_0$ . Teprve při  $|F_0| > F_t$  bude tělíska zrychlovat se zrychlením úměrným rozdílu  $F_0 - F_t$ . Tento způsob potlačení tření se nazývá dynamické mazání.

### 4.3.3 Trajektorie systémů druhého řádu

Podobně jako v předchozí kapitole lze u spojitých dynamických systémů druhého řádu získat v některých případech globální pohled na chování systému. Dynamika spojitěho dynamického systému druhého řádu je popsána soustavou dvou diferenciálních rovnic



prvního řádu

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \mathbf{u}, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \mathbf{u}, t)\end{aligned}\tag{4.80}$$

Řešením těchto rovnic při daných počátečních podmínkách získáme trajektorii systému (obr. 4.16). Vzhledem k tomu, že časoprostor je v tomto případě již trojrozměrný prostor, je výhodnější vykreslovat trajektorie pouze v dvojrozměrném stavovém prostoru stavových veličin  $x_1, x_2$  a čas uvádět jako parametr stavové trajektorie. V rovině stavových proměnných se pak trajektorie jeví jako křivka, která může být zapsána pro určitý úsek jako funkční závislost stavové proměnné  $x_2$  na stavové proměnné  $x_1$

$$x_2 = f(x_1)\tag{4.81}$$

Ve zvoleném čase  $t$  nabývají stavové proměnné hodnoty  $x_1(t), x_2(t)$  a můžeme v tomto čase pro odpovídající hodnoty  $x_1, x_2$  sestavit tečnu k trajektorii. Pokud dokážeme z rovnic (4.80) stanovit v každém bodě stavové roviny tečnu k trajektorii, můžeme si udělat představu o chování trajektorií podobně jako u jednorozměrných systémů. Pro směrnici  $\kappa$  tečny k trajektorii pak platí

$$\kappa = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{df(x_1)}{dx_1}\tag{4.82}$$

Derivací (4.81) podle času současně dostáváme

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{df(x_1)}{dx_1} \frac{dx_1}{dt}\tag{4.83}$$

a tedy

$$\kappa = \frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}} = \frac{f_2(x_1, x_2, \mathbf{u}, t)}{f_1(x_1, x_2, \mathbf{u}, t)}\tag{4.84}$$

Jsme tedy schopni z rovnic dynamiky systému stanovit směrnici tečny k stavové trajektorii v těch bodech stavové roviny, ve kterých je pravá strana rovnice (4.84) definována. Je zřejmé, že pravá strana rovnice (4.84) není definována v těch bodech roviny  $x_{10}, x_{20}$ , kdy nastává rovnovážný stav (v singulárních bodech)

$$f_1(x_{10}, x_{20}, \mathbf{u}_0, t) = f_2(x_{10}, x_{20}, \mathbf{u}_0, t) = 0\tag{4.85}$$

Představme si nyní, že rovnice (4.80) reprezentuje zobrazení, které každému bodu  $(x_1, x_2)$  z dvojrozměrného stavového prostoru v každém čase přiřazuje vektor

$$[f_1(x_1, x_2, \mathbf{u}, t), f_2(x_1, x_2, \mathbf{u}, t)]\tag{4.86}$$

který svírá s osou  $x_1$  úhel  $\theta$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \kappa\tag{4.87}$$

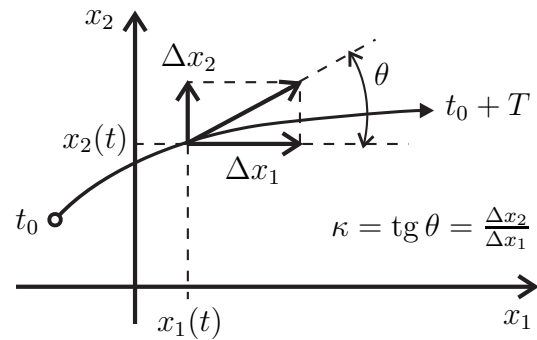
Uvedený vektor leží na tečně k trajektorii a jeho složky určují velikost změny příslušných stavových veličin za jednotku času, tedy rychlost změny stavových veličin. Celkově vektor (4.86) vyjadřuje nejen směr malého úseku stavové trajektorie, ale i velikost rychlosti změn stavových veličin, nazývá se proto *směrový vektor* nebo *vektor stavové rychlosti*. Protože pravé strany rovnic (4.80) musí být definovány v každém bodě stavového prostoru, jsou směrové vektory definovány rovněž v každém bodě stavové roviny. (V singulárních bodech je to nulový vektor  $[0, 0]$ ). Jsme tedy schopni nakreslit pole těchto vektorů, které nám určí chování trajektorií. Nákres pole směrových vektorů se všemi možnými trajektoriemi budeme nazývat *stavový portrét*. Bude-li se však v rovnici (4.84) explicitně vyskytovat čas, ať už z důvodu *t-variantnosti* systému, nebo z důvodu časově proměnného vektoru vstupních veličin, bude se pole směrových vektorů s časem měnit a globální představa o chování systému nebude prakticky ve většině případů možná. Znamená to tedy, že vyšetřování chování systému s pomocí náčrtu pole směrových vektorů je prakticky možné jen tehdy, je-li popis systému převoditelný na systém *t-invariantní* a *neřízený*. V případě systémů *t-invariantních řízených* konstantními vstupními signály je tento převod možný vždy, vstupní signály považujeme prostě za konstanty ve funkčním zápisu (4.80). Proto se budeme v dalším obecném popisu zabývat hlavně systémy, jejichž rovnice dynamiky mají tvar

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{4.88}$$

Univerzálnější metoda k získání globálního přehledu o chování systému druhého řádu stavového portréту, než je pokrytí stavové roviny polem směrových vektorů, neexistuje. Podobně jako v případě systémů prvního řádu bude vhodné provést pokrytí stavové roviny směrovými vektory metodou *izoklin*. Izoklina je v tomto případě množina bodů ve stavové rovině, ve kterých je směrnice tečny k trajektorii  $\kappa$  konstantní. Vzhledem k tomu, že hodnota  $\kappa$  není definována v singulárních bodech, je výhodné před vlastním řešením izoklin provést vyšetření singulárních bodů. V případě systému (4.88) můžeme získat přehled o trajektoriích také řešením diferenciální rovnice prvního řádu

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}\tag{4.89}$$

přičemž výsledkem je pak přímo trajektorie (4.81). Řešení této rovnice je však ve většině případů značně obtížné. Sestavení stavového portréту si objasníme na příkladě.

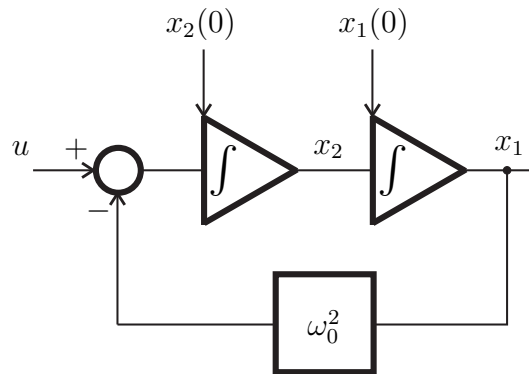


Obrázek 4.16: Stavová trajektorie

**Příklad 4.20** Uvažujme systém popsaný rovnicemi

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= u - \omega_0^2 x_1\end{aligned}\tag{4.90}$$

kde řízení  $u$  je konstantní  $u = \text{konst}$ ,



**Obrázek 4.17:** Stavové schéma z příkladu 4.20

Na obr. 4.17 je nakresleno odpovídající stavové schéma. Jde tedy o kmitavý člen s koeficientem tlumení  $\xi = 0$  a vlastní frekvencí  $\omega_0$ , řízený konstantním vstupním signálem. Nyní se pokusíme nalézt stavové trajektorie tohoto systému jednak nánkresem pole směrových vektorů, ale také řešením rovnice (4.89). Pro směrnici  $\kappa$  tečen k stavové trajektorii platí v tomto případě

$$\kappa = \frac{u - \omega_0^2 x_1}{x_2}\tag{4.91}$$

Singulární body tohoto systému lze určit řešením rovnice

$$\begin{aligned}0 &= x_2 \\ 0 &= u - \omega_0^2 x_1\end{aligned}\tag{4.92}$$

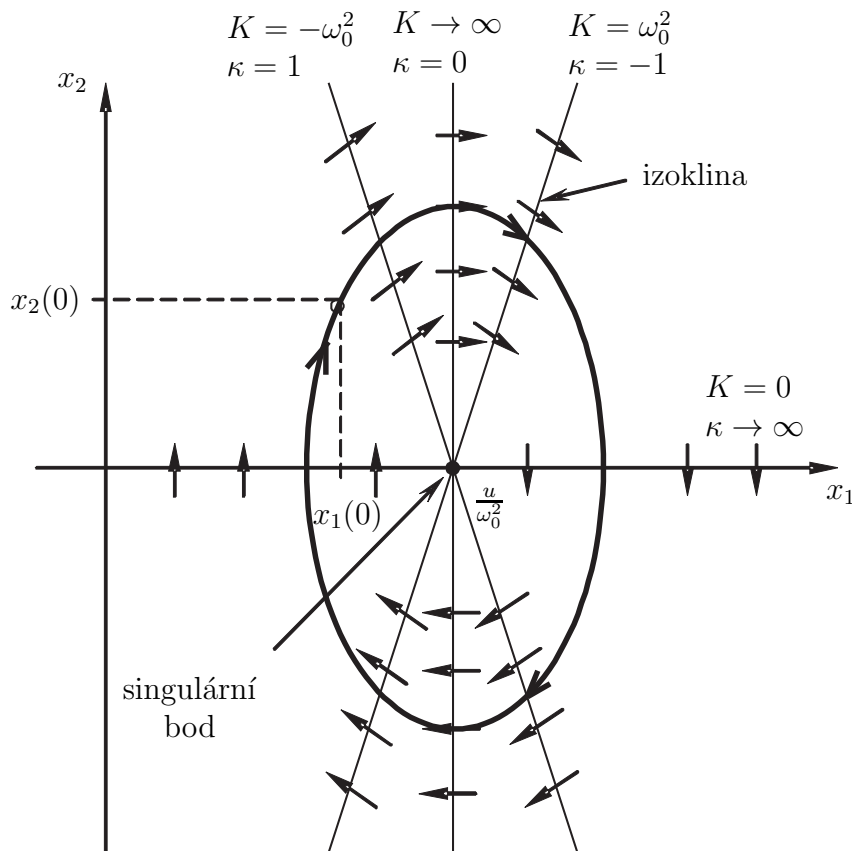
Je tedy zřejmé, že singulární bod leží na souřadnicích  $x_{10} = \frac{u}{\omega_0^2}$ ;  $x_{20} = 0$ . Rovnice izoklin odvodíme z (4.91) pro  $\kappa = \text{konst}$ ,

$$x_2 = -\frac{\omega_0^2}{\kappa} x_1 + \frac{u}{\kappa}\tag{4.93}$$

Izokliny budou tedy přímky

$$x_2 = Kx_1 + q\tag{4.94}$$

se směrnicí  $K = -\frac{\omega_0^2}{\kappa}$  a posunutím  $q = \frac{u}{\kappa}$ . Pro  $x_2 = 0$  dostáváme z rovnice izokliny  $x_1 = \frac{u}{\omega_0^2}$ , což odpovídá hodnotě dříve zjištěného rovnovážného stavu. Všechny izokliny budou tedy procházet vypočteným singulárním bodem. Izoklina pro limitní případ  $\kappa \rightarrow 0$  je



**Obrázek 4.18:** Pole směrových vektorů a trajektorie z příkladu 4.20

rovnoběžná s osou  $x_2$ . Tyto výsledky nám již umožňují rovnoměrné pokrytí stavové roviny izoklinami jak je zachyceno na obr. 4.18. Na jednotlivých izoklinách můžeme vykreslit tečny k trajektorii (směrové vektory) pomocí rovnic (4.87), (4.90). Z nakresleného pole směrových vektorů pak lze usoudit, že jednotlivé trajektorie systému budou elipsy. Získali jsme tedy přibližnou představu o tvaru stavových trajektorií.

Nyní se pokusíme určit možné průběhy stavové trajektorie řešením rovnice (4.89), která bude mít v našem případě tvar

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{u - \omega_0^2 x_1}{x_2} \quad (4.95)$$

což odpovídá separabilní diferenciální rovnici prvního řádu

$$x_2 dx_2 - (u - \omega_0^2 x_1) dx_1 = 0 \quad (4.96)$$

jejíž řešení lze nalézt ve tvaru

$$\int x_2 dx_2 - \int (u - \omega_0^2 x_1) dx_1 = c \quad (4.97)$$

$$\frac{1}{2} x_2^2 - u x_1 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x_1^2 = c \quad (4.98)$$

Vynásobením  $\frac{2}{\omega_0^2}$  a přičtením  $\frac{u^2}{\omega_0^4}$  pak dostaneme

$$\frac{x_2^2}{\omega_0^2} - \frac{2ux_1}{\omega_0^2} + x_1^2 + \frac{u^2}{\omega_0^4} = c\frac{2}{\omega_0^2} + \frac{u^2}{\omega_0^4} \quad (4.99)$$

$$\frac{x_2^2}{\omega_0^2} + \left(x_1 - \frac{u}{\omega_0^2}\right)^2 = c\frac{2}{\omega_0^2} + \frac{u^2}{\omega_0^4} \quad (4.100)$$

Vzhledem k tomu, že jsme předpokládali konstantní velikost žádané hodnoty  $u$  lze rovnici dále upravit do tvaru

$$\frac{x_2^2}{a} + \frac{\left(x_1 - \frac{u}{\omega_0^2}\right)^2}{b} = 1 \quad (4.101)$$

kde

$$\begin{aligned} a &= 2c + \frac{u^2}{\omega_0^2} \\ b &= c\frac{2}{\omega_0^2} + \frac{u^2}{\omega_0^4} \end{aligned} \quad (4.102)$$

Zápis (4.101) představuje rovnici elipsy. Trajektorie systému jsou tedy skutečně elipsy s hlavními osami rovnoběžnými s osami souřadnicového systému. Můžeme prohlásit, že pro jakékoliv počáteční podmínky a konstantní hodnotu vstupního signálu bude systém kmitat ustálenými periodickými kmity, které se ve stavové rovině projeví jako mezní cykly.

Vhodnými substitucemi (změnou báze a počátku stavového prostoru) můžeme často získat jednodušší vyjádření problému i jeho jednodušší řešení. V předchozím příkladě by zřejmě změna měřítek na souřadných osách vedla k tomu, že trajektorie se z elipsy změnila na kružnici. Rovněž přemístění počátku stavové roviny do singulárního bodu způsobí, že se singulární bod ztotožní s počátkem a portrét se zjednoduší. Pokusíme se o to v následujícím příkladu. Vzhledem k tomu, že kreslení celého pole směrových vektorů je dosti pracné, bývá zvykem nakreslit si v jednoduchých příkladech na izoklinách vždy jen jeden směrový vektor, nebo načrtnout jen pole tečen. Pokud chceme využít pole směrových vektorů ke konstrukci konkrétní trajektorie, postupujeme takto. Stavovou rovinu pokryjeme rovnoměrně izoklinami. Nakreslíme symetrály mezi jednotlivými izoklinami. Předpokládáme, že trajektorie mezi jednotlivými symetrály je totožná s tečnou na izoklině sevřené těmito symetrály. Jednotlivé tečny spojíme, získaný po částech přímkový graf pak prohlásíme za trajektorii nebo za obálku trajektorie. V podstatě tímto způsobem využíváme graficky Eulerovu metodu k integraci rovnice (4.89). Tento postup lze použít i pro řešení systémů 1. řádu. Obecně je ovšem mnohem výhodnější provést výpočet konkrétní trajektorie některou z numerických metod na počítači.

**Příklad 4.21** *Pokusme se vyšetřit stavové trajektorie systému z příkladu 4.20 v jednodušší podobě. Uvažujme nové stavové proměnné získané substitucí*

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - \frac{u}{\omega_0^2} \\ z_2 &= \frac{x_2}{\omega_0} \end{aligned} \quad (4.103)$$

*S ohledem na předpoklad  $u = \text{konst}$ , pak po dosazení za  $x_1, x_2$  do (4.90) dostaneme nové stavové rovnice*

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= \omega_0 z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} &= -\omega_0 z_1\end{aligned}\tag{4.104}$$

*s počátečními podmínkami*

$$\begin{aligned}z_1(0) &= x_1(0) - \frac{u}{\omega_0^2} \\ z_2(0) &= \frac{x_2(0)}{\omega_0}\end{aligned}\tag{4.105}$$

*Dostali jsme tak neřízený systém se singulárním bodem v počátku souřadnic. První substituční rovnice (4.103) zajišťuje posun singulárního bodu do počátku nového souřadnicového systému, druhá substituční rovnice zajišťuje změnu měřítka a tím změnu tvaru trajektorií z elips na kružnice, jak bude ukázáno dále. Směrnice tečen k trajektoriím je*

$$\kappa = \frac{\dot{z}_2}{\dot{z}_1} = -\frac{z_1}{z_2}\tag{4.106}$$

*Z analytické geometrie je známo, že platí-li pro směrnice  $K_1, K_2$  dvou přímek, že  $K_1 = -\frac{1}{K_2}$ , pak jsou tyto přímky vzájemně kolmé. Je tedy zřejmé, že v našem případě budou směrnice tečen k trajektoriím kolmé na příslušné izokliny. Můžeme tedy nakreslit pole izoklin a tečen k trajektoriím, viz obr. 4.19. Vzhledem ke kolmosti izoklin a tečen k trajektorii musí být jednotlivé trajektorie kružnice.*

*Rovněž řešení diferenciální rovnice (4.89)*

$$\frac{dz_2}{dz_1} = -\frac{z_1}{z_2}\tag{4.107}$$

*kteří můžeme provést obdobně jako v příkladě 4.20, vede k výsledku*

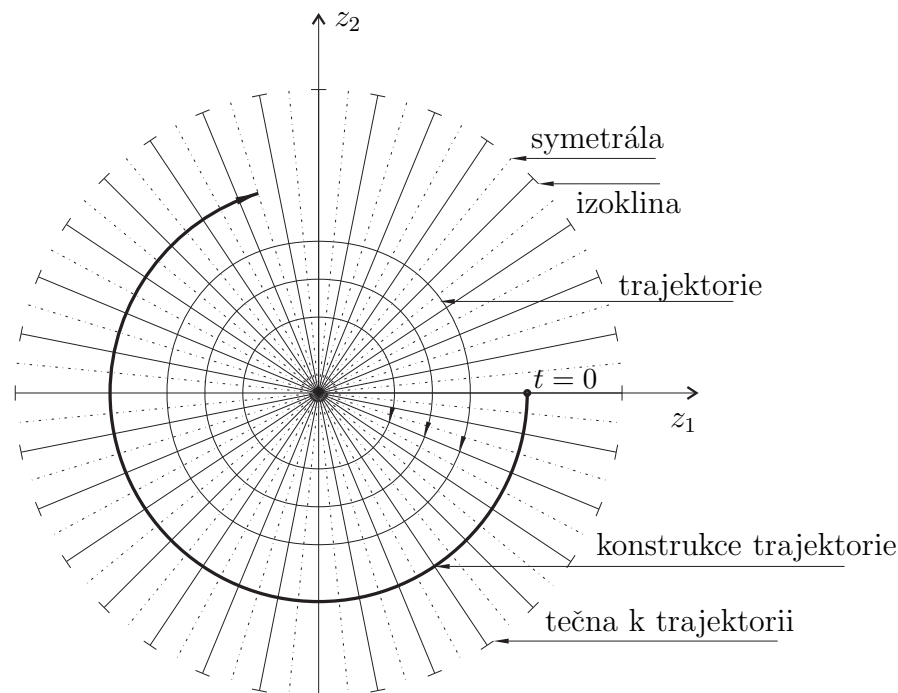
$$z_1^2 + z_2^2 = c\tag{4.108}$$

*Poslední rovnice je rovnicí kružnice, což odpovídá odhadovanému průběhu stavové trajektorie na obr. 4.19.*

Z předchozích příkladů je zřejmé, že při popisované konstrukci stavové trajektorie ve stavové rovině se ztrácí informace o čase, která je nutná při plném popisu stavové trajektorie. Tuto informaci můžeme relativně snadno získat, pokud se nám podaří systém popsat ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{4.109}$$

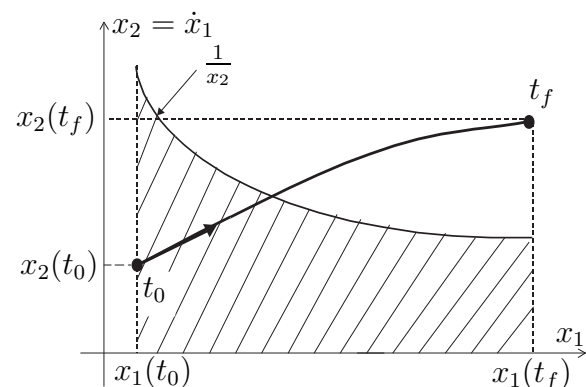
Při práci s takovým systémem se místo pojmů stavová rovina, resp. stavová trajektorie, používá pojmů *fázová rovina*, resp. *fázová trajektorie*. V obou předcházejících příkladech byl systém formulován tak, že šlo o fázové trajektorie.



**Obrázek 4.19:** Trajektorie systému z příkladu 4.21

Předpokládejme nyní, že máme fázovou trajektorii začínající v čase  $t_0$  a končící v čase  $t_f$  jak je zobrazeno na obr. 4.20. Pokud veličina  $x_2$  na úseku mezi těmito zvolenými časovými okamžiky nemění znaménko, můžeme délku časového intervalu  $t_f - t_0$  vypočítat pomocí

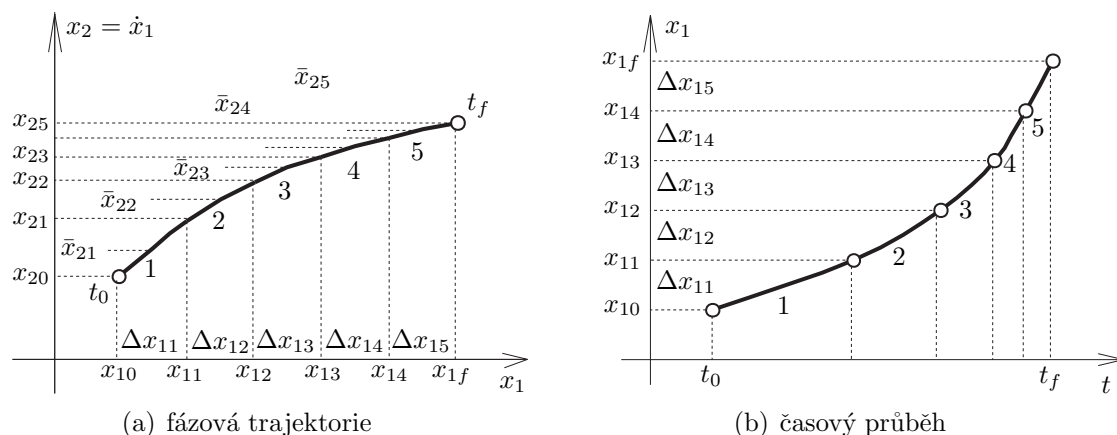
$$t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt = \int_{x_1(t_0)}^{x_1(t_f)} \frac{1}{x_2} dx_1 \quad (4.110)$$



**Obrázek 4.20:** Určení času na fázové trajektorii

Časový úsek je tedy určen plochou vyznačenou v obr. 4.20 šrafovaně. Je zřejmé, že čím bude hodnota  $x_2$  v úseku mezi  $x_1(t_0)$  a  $x_1(t_f)$  větší, tím kratší bude časový interval, který uplyne mezi těmito dvěma body, a tím rychlejší bude systém. (Vzhledem k formulaci rovnic systému (4.109) reprezentuje  $x_2$  rychlost změny veličiny  $x_1$ ). Jestliže v úseku mezi  $x_1(t_0)$  a  $x_1(t_f)$  mění veličina  $x_2$  znaménko, musíme tento úsek rozdělit na části, ve kterých ke změně znaménka nedochází, určit časový úsek v těchto částech a celkové časové úseky pak sečíst.

Z fázové trajektorie můžeme také snadno vyčíst časový průběh stavové proměnné  $x_1$  a tím i stavové proměnné  $x_2$ . Mějme opět fázovou trajektorii resp. její úsek na daném intervalu pozorování - obr. 4.21(a). Fázovou trajektorii můžeme rozdělit na malé úseky,



**Obrázek 4.21:** Určení časového průběhu stavové veličiny z fázové trajektorie

ve kterých rychlost  $x_2$  změny veličiny  $x_1$  nahradíme hodnotou  $\bar{x}_{2i}$  tak, že bude platit

$$\frac{\Delta x_{1i}}{\Delta t_i} = \bar{x}_{2i} \quad (4.111)$$

Ze znalosti velikostí úseku  $\Delta x_{1i}$  a hodnoty  $\bar{x}_{2i}$  pak můžeme určit  $\Delta t_i$ , a tak určit bod na grafu  $x_1(t)$  obr. 4.21(b). Potíž spočívá v nalezení hodnoty  $\bar{x}_{2i}$ , která by splňovala rovnici (4.111). Bezpečně víme jen, že tato hodnota leží mezi hodnotami  $x_2$  určenými hranicemi intervalu. S dostatečnou přesností můžeme hodnotu  $\bar{x}_{2i}$  určit jako aritmetický průměr hraničních hodnot

$$\bar{x}_{2i} \approx \frac{x_{2i} + x_{2(i-1)}}{2} \quad (4.112)$$

Určování časového intervalu, eventuálně výpočet průběhu  $x_1(t)$  výše uváděným způsobem lze použít především k odhadu která trajektorie je rychlejší, nebo může sloužit k ocenění správnosti numerického výpočtu.

Jak již bylo řečeno dříve, konstrukce stavových trajektorií metodou izoklin je rozumně proveditelná jen v případě, kdy lze popis systému převést do tvaru (4.88). Tento převod je možný i v případě t-variantního systému zapsaného ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1 + kt, x_2) \end{aligned} \quad (4.113)$$

kde  $k$  je konstanta. Substitucí  $x_1 + kt = z_1$  pak dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= x_2 + k \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(z_1, x_2) \end{aligned} \quad (4.114)$$

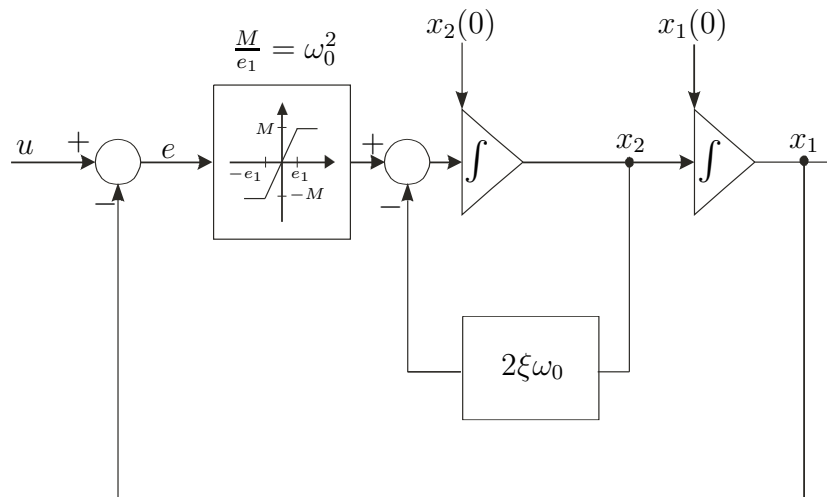


Další substituce  $x_2 + k = z_2$  pak vede na

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} &= f_2(z_1, z_2 - k)\end{aligned}\tag{4.115}$$

Tento systém je již t-invariantní, řešitelný ve fázové rovině. Uvedený postup nám umožňuje zjistit metodou izoklin odezvu některých regulačních obvodů na vstupní signál ve tvaru  $u = kt$  (rychlostní skok). Řešení si ukážeme na následujícím příkladě.

**Příklad 4.22** Předpokládejme regulační obvod zakreslený na obr. 4.22. Zesilovač zesilující regulační odchylku má statickou charakteristiku s nasycením. Dále předpokládejme, že  $\xi > 1$ . Chceme vyšetřit chování systému pro  $u = \text{konst}$ , a  $u = kt$  pro všechny možné počáteční stavy.



Obrázek 4.22: Regulační obvod s nasycením z příkladu 4.22

Stavové rovnice systému jsou

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= f(u - x_1) - 2\xi\omega_0 x_2\end{aligned}\tag{4.116}$$

kde

$$f(u - x_1) = \begin{cases} \omega_0^2(u - x_1) & |u - x_1| \leq e_1 \\ M \operatorname{sign}(u - x_1) & |u - x_1| > e_1 \end{cases}\tag{4.117}$$

**Řešení pro  $u = \text{konst}$**

Substitucemi  $u - x_1 = e$ ,  $-x_2 = \omega$  převedeme popis systému na tvar

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -f(e) - 2\xi\omega_0\omega\end{aligned}\tag{4.118}$$

Vzhledem ke tvaru funkce  $f$  nastává rovnovážný stav pro  $\omega = e = 0$ . Fázovou rovinu lze vzhledem k průběhu funkce (4.117) rozdělit na tři pásma.

1.  $|e| \leq e_1$ : V tomto pásmu se pohybujeme v lineární oblasti a systém můžeme popsat rovnicemi

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\omega_0^2 e - 2\xi\omega_0\omega\end{aligned}\tag{4.119}$$

Směrnici tečen k fázové trajektorii lze vyjádřit jako

$$\kappa = \frac{\dot{\omega}}{\dot{e}} = -\frac{\omega_0^2 e + 2\xi\omega_0\omega}{\omega}\tag{4.120}$$

Izokliny jsou pak dány vztahem

$$\omega = -\frac{\omega_0^2}{\kappa + 2\xi\omega_0}e\tag{4.121}$$

což odpovídá přímkám procházejícím počátkem fázové roviny se směrnicí

$$K = -\frac{\omega_0^2}{\kappa + 2\xi\omega_0}\tag{4.122}$$

Všimněme si nyní situace, kdy směrnice tečny k trajektorii je shodná se směrnicí izokliny  $\kappa = K$ . V takovém případě dostaneme pro směrnici izokliny rovnici

$$K^2 + 2\xi\omega_0 K + \omega_0^2 = 0\tag{4.123}$$

jejíž řešení je

$$K_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}\tag{4.124}$$

Fázová trajektorie tedy prochází přímo po izoklinách se směrnicemi  $K_{1,2}$ .

2.  $e > e_1$ : V tomto pásmu můžeme systém zapsat

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -M - 2\xi\omega_0\omega\end{aligned}\tag{4.125}$$

Pro směrnici  $\kappa$  tečen k fázové trajektorii pak platí

$$\kappa = \frac{\dot{\omega}}{\dot{e}} = \frac{-M - 2\xi\omega_0\omega}{\omega}\tag{4.126}$$

a izokliny budou tedy přímky  $\omega = \text{konst}$

$$\omega = \frac{-M}{\kappa + 2\xi\omega_0}\tag{4.127}$$

3.  $e < -e_1$ : V posledním pásmu je systém opět v omezení a může být popsán

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= M - 2\xi\omega_0\omega\end{aligned}\quad (4.128)$$

Směrnice tečen k fázové trajektorii pak bude

$$\kappa = \frac{\dot{\omega}}{\dot{e}} = \frac{M - 2\xi\omega_0\omega}{\omega}\quad (4.129)$$

a izokliny jsou opět přímky  $\omega = \text{konst}$

$$\omega = \frac{M}{\kappa + 2\xi\omega_0}\quad (4.130)$$

Na základě uvedeného rozboru můžeme načrtnout fázový portrét tak, jak zachycen na obr. 4.23. Z fázového portréту lze učinit závěr, že pro libovolné počáteční podmínky dosáhne systém ustáleného stavu v singulárním bodě  $(0, 0)$ . Rovněž je zřejmé, že bude-li systém vycházet z nulových počátečních podmínek

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0 \Rightarrow e(0) = u, \omega(0) = 0\quad (4.131)$$

pak při řízení  $u = \text{konst}$  nikdy nemůže dosáhnout stavu  $|\omega| > \frac{M}{2\xi\omega_0}$ . Vzhledem k tomu, že veličina  $\omega$  v našem příkladě reprezentuje vlastně rychlost změny regulační odchylky  $e$ , je zřejmé, že nasycení v regulačním obvodu způsobí zpomalení regulačního děje.

### **Řešení pro $u = kt$**

V případě lineárně narůstajícího vstupního signálu mají stavové rovnice tvar

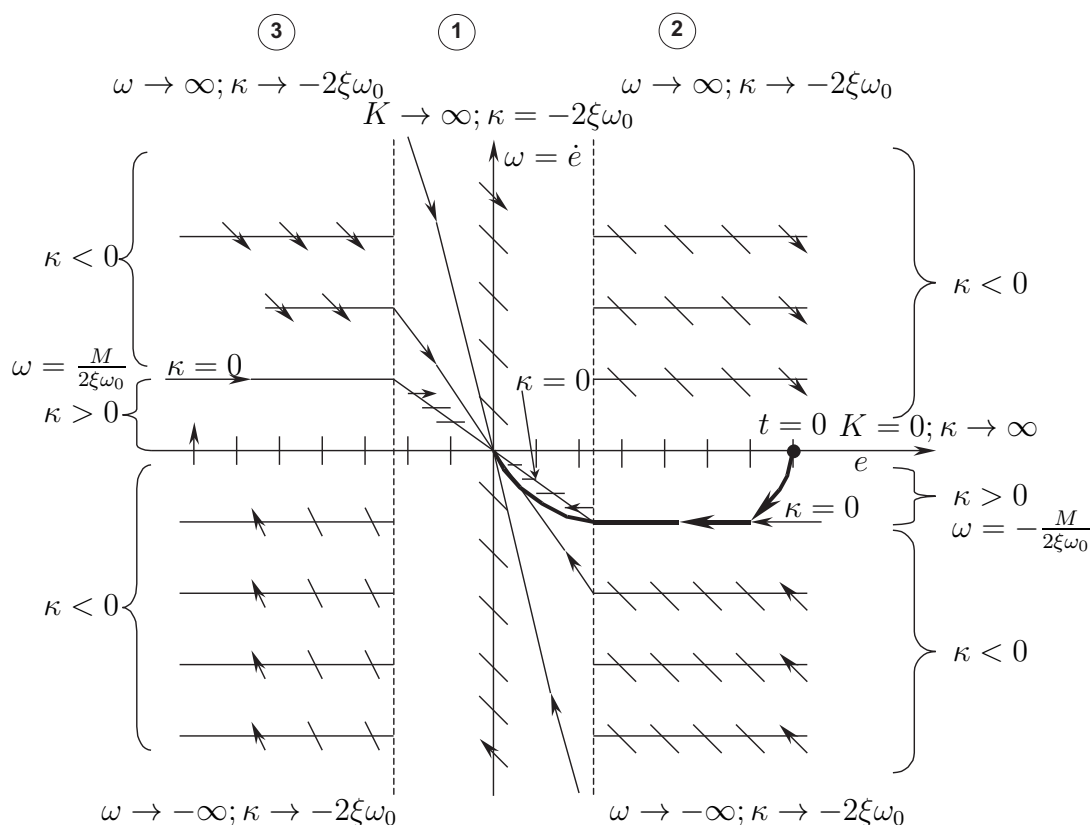
$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= f(kt - x_1) - 2\xi\omega_0x_2\end{aligned}\quad (4.132)$$

Použitím substituce  $e = kt - x_1$  a  $\omega = -x_2 + k$  získáme rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -f(e) - 2\xi\omega_0\omega + 2\xi\omega_0k\end{aligned}\quad (4.133)$$

Tyto rovnice již představují  $t$ -invariantní neřízený systém a umožňují řešení ve fázové rovině. Rovnovážný stav systému je určen rovnicemi

$$\begin{aligned}0 &= \omega \\ 0 &= -f(e) - 2\xi\omega_0\omega + 2\xi\omega_0k\end{aligned}\quad (4.134)$$



**Obrázek 4.23:** Fázový portrét systému z příkladu 4.22 pro konstantní řízení

Rovnice (4.134) mají řešení jen v případě, že  $|k| < \frac{M}{2\xi\omega_0}$ . Řešení tedy rozdělíme na dva případy.

Řešení pro  $|k| \leq \frac{M}{2\xi\omega_0}$

V tomto případě bude existovat rovnovážný stav

$$\begin{aligned} \omega &= 0 \\ e &= \frac{2\xi}{\omega_0}k \end{aligned} \tag{4.135}$$

Dále musíme uvažovat tři případy podobně jako u systému s konstantním vstupním signálem.

1.  $|e| \leq e_1$ : Stavové rovnice (4.133) přejdou do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\omega_0^2 e - 2\xi\omega_0\omega + 2\xi\omega_0k \end{aligned} \tag{4.136}$$

Výše vypočtený singulární bod leží uvnitř tohoto pásma neboť z předpokladu

$|k| \leq \frac{M}{2\xi\omega_0}$  plyne

$$|e_0| = \frac{2\xi}{\omega_0}|k| \leq \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{M}{2\xi\omega_0} = e_1 \quad (4.137)$$

Pokud provedeme substituci  $z = e - \frac{2\xi}{\omega_0}k$ , dojde k posunutí počátku souřadnicového systému do singulárního bodu a stavové rovnice přejdou do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\omega_0^2 z - 2\xi\omega_0\omega \end{aligned} \quad (4.138)$$

Dospěli jsme tak k rovnici, která má stejný tvar, jako (4.119). Je tedy zřejmé, že i stavový portrét v daném pásmu bude shodný s případem pro  $u = \text{konst}$  s tím rozdílem, že původní počátek souřadnic posuneme do vypočteného singulárního bodu.

2.  $e > e_1$ : V této situaci dostaneme stavové rovnice

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -M - 2\xi\omega_0\omega + 2\xi\omega_0k \end{aligned} \quad (4.139)$$

Zavedeme-li substituci  $M - 2\xi\omega_0k = M_1$  přejdou stavové rovnice do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -M_1 - 2\xi\omega_0\omega \end{aligned} \quad (4.140)$$

což formálně odpovídá rovnicím (4.125). Fázový portrét tedy bude mít obdobný charakter jak u systému s konstantním vstupním signálem. Dojde pouze k posunutí izokliny pro  $\kappa = 0$  ve směru osy  $\omega$ .

3.  $e < e_1$ : Stavové rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= M - 2\xi\omega_0\omega + 2\xi\omega_0k \end{aligned} \quad (4.141)$$

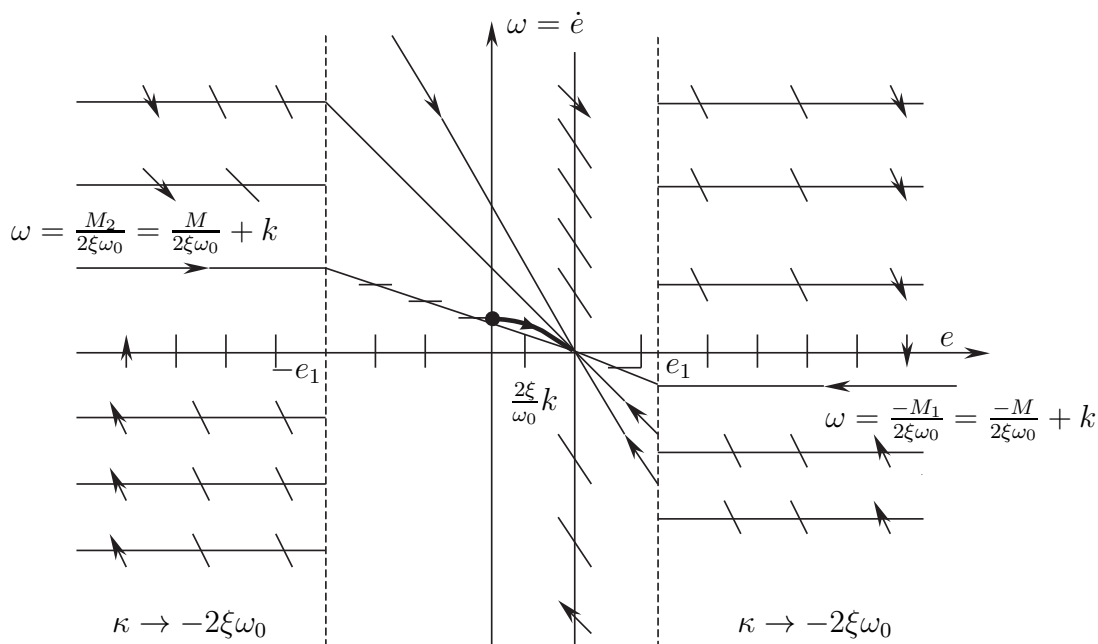
Substitucí  $M + 2\xi\omega_0k = M_2$  pak dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= M_2 - 2\xi\omega_0\omega \end{aligned} \quad (4.142)$$

což odpovídá zápisu (4.128). Fázový portrét bude tedy opět odpovídat fázovému portrétu systému s konstantním vstupním signálem v odpovídající oblasti.

Na základě uvedeného rozboru můžeme opět zakreslit fázový portrét uvedený na obr. 4.24. Silně vyznačená trajektorie odpovídá nulovým počátečním podmínkám původního systému

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0 \Rightarrow e(0) = u, \omega(0) = k \quad (4.143)$$



**Obrázek 4.24:** Fázový portrét systému z příkladu 4.22 pro pomalu lineárně narůstající vstupní signál

Z fázového portréту lze učinit závěr, že při  $u = kt; |k| < \frac{M}{2\xi\omega_0}$  pro libovolné počáteční podmínky přejde do rovnovážného stavu s ustálenou regulační odchylkou  $e = \frac{2\xi}{\omega_0}k$ . Rovněž si lze všimnout, že pro nulové počáteční podmínky  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  vůbec nedojde k nasycení a systém se bude chovat jako lineární.

Řešení pro  $|k| > \frac{M}{2\xi\omega_0}$

Opět musíme uvažovat tři oblasti

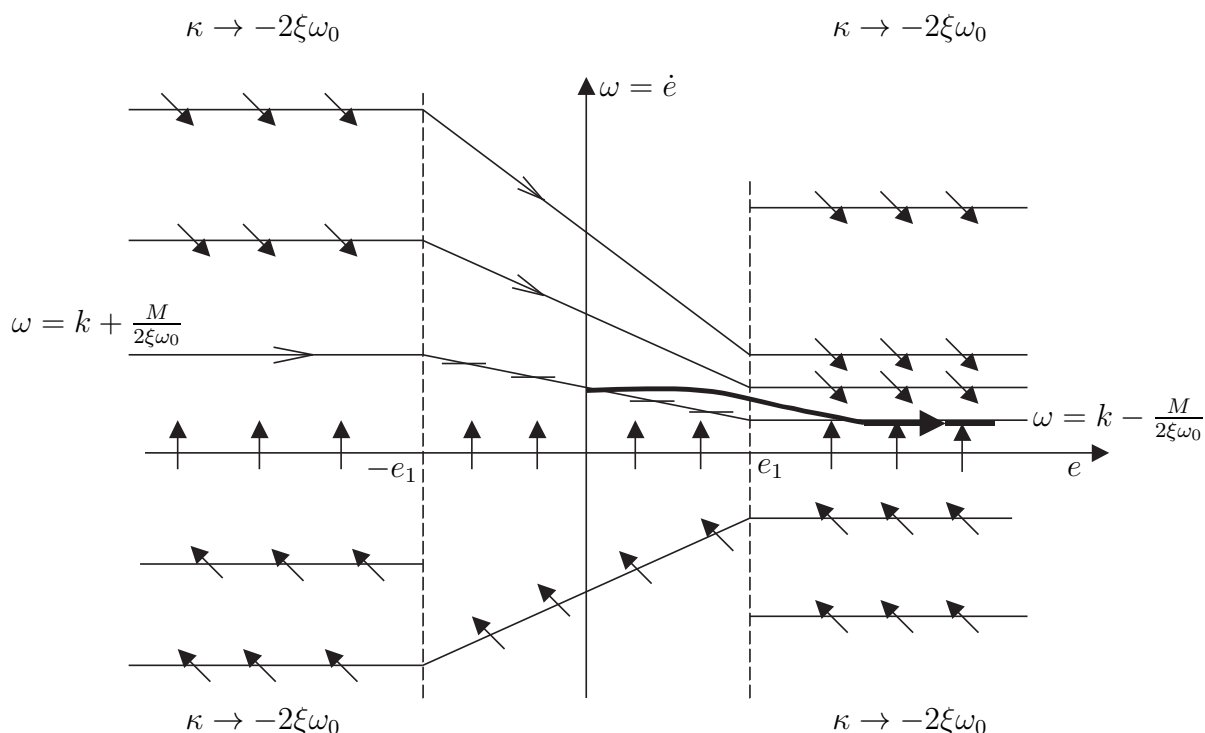
1.  $|e| \leq e_1$ : Předpokládejme, že  $k > 0$ . Stavové rovnice pak přejdou opět na tvar (4.136). Pro uvedené rovnice lze nalézt singulární bod, jak bylo ukázáno dříve. Tento singulární bod bude však ležet mimo pásmo, ve kterém rovnice (4.136) platí a systém jej tedy nemůže dosáhnout. Fázový portrét bude samozřejmě stejný jako u rovnic (4.136) v okolí pomyslného nedosažitelného singulárního bodu, avšak musíme uvažovat pouze jeho část pro  $|e| \leq e_1$ .
2.  $e > e_1$ : Rovnice přejdou na tvar (4.140). Vzhledem k tomu, že  $k > \frac{M}{2\xi\omega_0}$  bude  $M_1 < 0$  a izokliny s  $\kappa = 0$  bude dosaženo při  $\omega_1 = -\frac{M_1}{2\xi\omega_0} > 0$ .

3.  $e < -e_1$ : Stavové rovnice budou mít tvar (4.142)

Fázový portrét ze zakreslen na obr. 4.25. Silně je vykreslena trajektorie pro nulové počáteční podmínky

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0 \Rightarrow e(0) = u, \omega(0) = k \quad (4.144)$$

Z fázového portréту plyne, že se systém pro libovolné počáteční podmínky dostane do nasycení a jeho regulační odchylka pak poroste rychlostí  $k - \frac{M}{2\xi\omega_0}$ . Podobné závěry lze odvodit i pro  $k < 0$ .



**Obrázek 4.25:** Fázový portrét systému z příkladu 4.22 pro rychle lineárně narůstající vstupní signál

Uvedené příklady ukázaly, že konstrukce stavového portrétu umožňuje získání globální představy o chování nelineárního systému. Zvláště poslední příklad pak ukazuje, že je často možné chování nelineárního systému v určité oblasti popsat lineárními závislostmi. Je tedy velice užitečné, pokud máme představu o chování stavové trajektorie lineárních systémů, o čemž bude pojednávat následující kapitola.

#### 4.3.4 Trajektorie lineárních systémů druhého řádu

Vyšetřování chování nelineárního systému metodou izoklin tak, jak bylo popsáno v předchozí kapitole, je značně pracné. Vzhledem k tomu, že řada nelineárních systémů může být v okolí rovnovážných stavů nahrazena systémy lineárními, nebo je vyjádřitelná

popisem po částech lineárním, bude užitečné udělat si dobrou představu o stavovém portrétu lineárních systémů. Tento portrét pak můžeme použít pro konstrukci portrétu nelineárního systému v určité části stavové roviny, aniž bychom v této části prováděli detailní vyšetřování trajektorií nebo izoklin.

V okolí izolovaných singulárních bodů mohou být linearizovatelné t-invariantní systémy druhého řádu nahrazeny lineárním systémem (kapitola 4.2)

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned}\tag{4.145}$$

případně v maticovém tvaru

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}\tag{4.146}$$

Za podmínky, že matice  $\mathbf{A}$  je regulární

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0\tag{4.147}$$

bude mít lineární systém jediný singulární bod

$$0 = \mathbf{A}\mathbf{x}\tag{4.148}$$

$$\mathbf{x} = 0\tag{4.149}$$

v počátku stavové roviny. Umístěním počátku stavové roviny do izolovaného singulárního bodu nelineárního systému ztotožníme jednoduše singulární body obou systémů. Chování lineárního systému je určeno charakteristickými čísly  $\lambda$  matice  $\mathbf{A}$ , která vypočteme z charakteristické rovnice

$$\det[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}] = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0\tag{4.150}$$

Nyní provedeme vyšetření stavového portréту lineárního systému (4.145) pro možné hodnoty vlastních čísel  $\lambda$ , přičemž z podmínky (4.147) vyplývá, že  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ .

Obecně je známo, že každý lineární systém může být vhodnou substitucí

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}\tag{4.151}$$

převeden do tvaru

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{B}\mathbf{z}\tag{4.152}$$

kde  $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$  je matice, která má tzv. Jordanův kanonický tvar a platí

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{z}\tag{4.153}$$

Stavový portrét systému v Jordanově tvaru v rovině  $(z_1, z_2)$  lze nalézt poměrně snadno a následně jej pomocí transformace (4.151) můžeme převést zpět do stavové roviny  $(x_1, x_2)$ .



Nejdříve uvažujme, že vlastní čísla systému jsou reálná  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . V tomto případě má systém (4.153) při počátečních podmínkách  $(z_1(0), z_2(0))$  řešení

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ z_2 &= z_2(0)e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (4.154)$$

Pokud z rovnice (4.154) vyloučíme čas, dostaneme

$$z_2 = z_2(0) \left( \frac{z_1}{z_1(0)} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad (4.155)$$

Pomocí této rovnice již snadno zakreslíme stavové portréty pro možné hodnoty vlastních čísel jak je ukázáno na obr. 4.26. U stabilních systémů směřují trajektorie do singulárního bodu, u nestabilních systémů směřují ze singulárního bodu. Na obr. 4.26 je použit souřadnicový systém  $(z_1, z_2)$ . Souřadný systém  $(x_1, x_2)$  je s tímto systémem spojen lineární transformací (4.151), která způsobuje pouze změnu báze vektorů. Jsou-li souřadné systémy navzájem spojeny, jak je naznačeno na obr. 4.26(a), 4.26(e), mohou mít trajektorie v systému  $(x_1, x_2)$  tvar jak je uvedeno v obr. 4.27. Je zřejmé, že se transformací může portrét dosti změnit, ale bude zachována jeho stabilita a charakter.

Druhá možnost je, že vlastní čísla matice systému jsou komplexně sdružená  $\lambda_1 = \alpha + j\beta, \lambda_2 = \alpha - j\beta$ . V takovém případě je Jordanův kanonický tvar systému

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad (4.156)$$

Řešení tohoto systému je názornější v polárních souřadnicích, které zavedeme substitucí

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \\ \phi &= \operatorname{arctg} \frac{z_2}{z_1} \end{aligned} \quad (4.157)$$

Systém (4.156) pak přejde na tvar

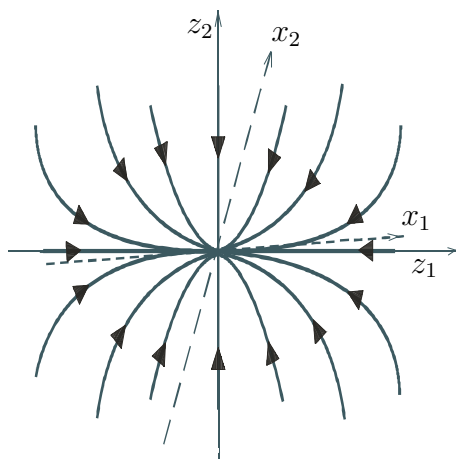
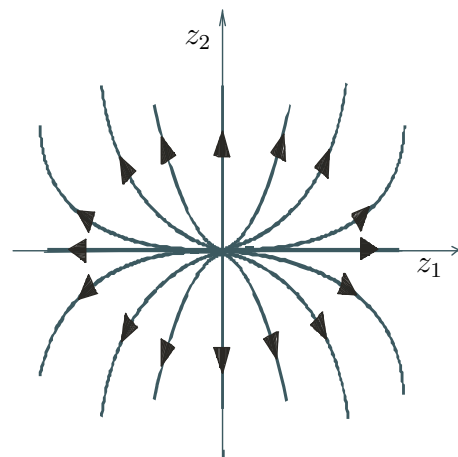
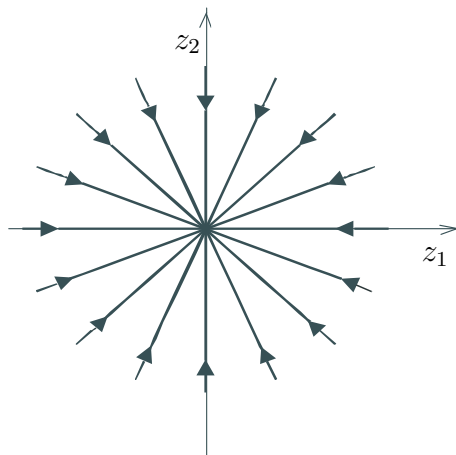
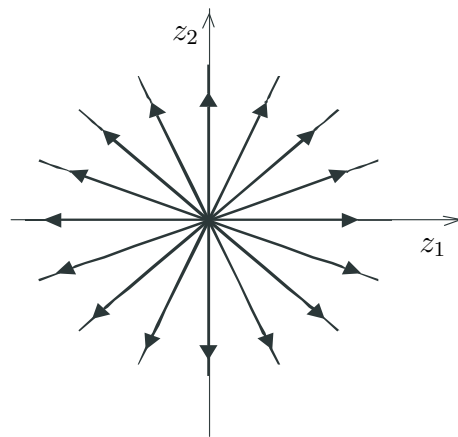
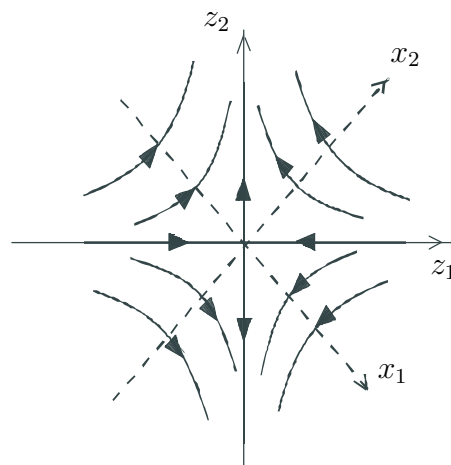
$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \alpha r \\ \frac{d\phi}{dt} &= -\beta \end{aligned} \quad (4.158)$$

jehož řešení při počátečních podmínkách  $r(0), \phi(0)$  je

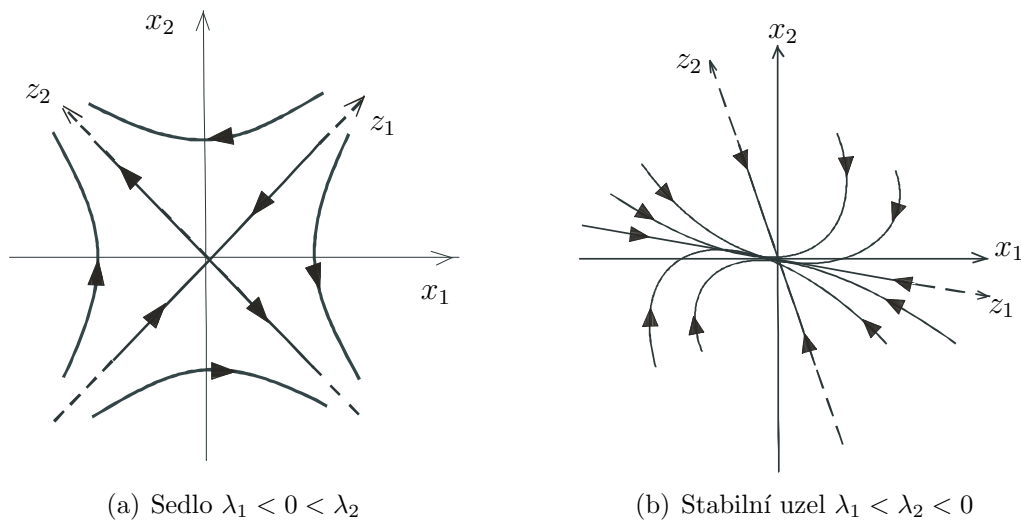
$$\begin{aligned} r &= r(0)e^{\alpha t} \\ \phi &= \phi(0) - \beta t \end{aligned} \quad (4.159)$$

Tvar trajektorie je tedy určen hodnotou  $\alpha$  a snadno jej načrtneme, jak je ukázáno na obr. 4.28.

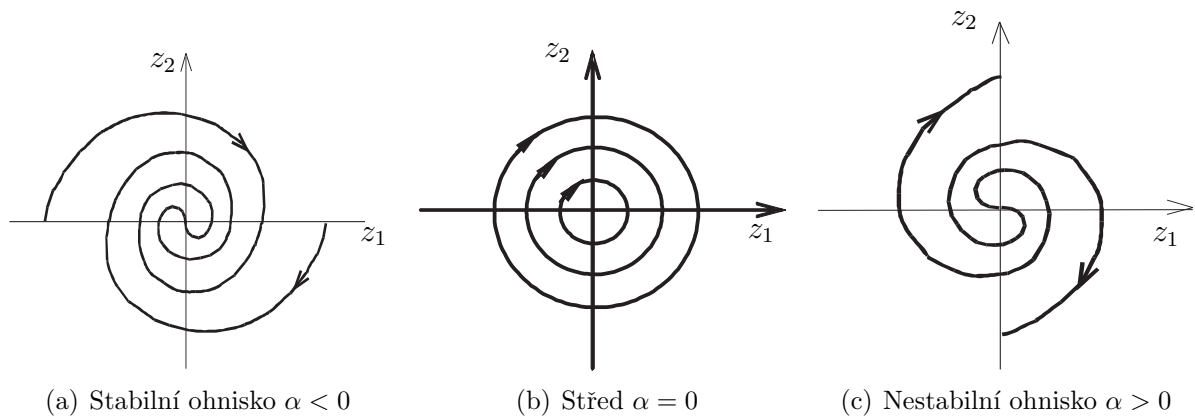
Jestliže bude alespoň jedno charakteristické číslo matice  $\mathbf{A}$  systému (4.146) nulové, bude nutně matice  $\mathbf{A}$  singulární a systém bude mít nekonečně mnoho singulárních bodů.

(a) Stabilní uzel  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (b) Nestabilní uzel  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ (c) Stabilní dikritický uzel  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ (d) Nestabilní dikritický uzel  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ (e) Sedlo  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ 

**Obrázek 4.26:** Stavové portréty lineárních systémů v Jordanově kanonickém tvaru v rovině  $(z_1, z_2)$



**Obrázek 4.27:** Stavové portréty lineárních systémů v Jordanově kanonickém tvaru v rovině  $(x_1, x_2)$



**Obrázek 4.28:** Stavové portréty lineárních systémů v Jordanově kanonickém tvaru

Nemůže být tedy použit k náhradě nelineárního systému v okolí izolovaného singulárního bodu. Předpokládejme nyní  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ . Jordanův kanonický tvar systému je pak

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z \quad (4.160)$$

Řešení tohoto systému při počátečních podmínkách  $z_1(0), z_2(0)$  je

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ z_2 &= z_2(0) \end{aligned} \quad (4.161)$$

Trajektorie jsou tedy přímky  $z_2 = konst$  a singulární body tvoří přímka  $z_1 = 0$ . Jiná situace nastane pro  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , přičemž nejdříve uvažujme že matice systému je nenulová

$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ . Pak Jordanův kanonický tvar systému je

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad (4.162)$$

a jeho řešení

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1(0) + z_2(0)t \\ z_2 &= z_2(0) \end{aligned} \quad (4.163)$$

Trajektorie jsou tedy přímky  $z_2 = konst$  a singulární body leží na přímce  $z_2 = 0$ . Poslední možností je  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  a  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ . V tomto případě je každý bod stavové roviny singulárním bodem systému a řešení stavových rovnic je

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1(0) \\ z_2 &= z_2(0) \end{aligned} \quad (4.164)$$

Pokud si k jednotlivým Jordanovým kanonickým tvarům nakreslíme odpovídající stavová schémata, zjistíme, že v případě singulární matice  $\mathbf{A}$  obsahuje schéma nezavazbené integrační členy, které způsobují, že množina rovnovážných stavů je nekonečná.

Použití popsanych stavových portrétů si ukážeme na příkladě.

**Příklad 4.23** V příkladu 4.1 jsme zjišťovali singulární body systému tvořeného matematickým kyvadlem se stavovými rovnicemi (4.5). Směrnice tečen k trajektorii je

$$\kappa = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = -\frac{g \sin x_1}{l x_2} \quad (4.165)$$

a rovnice izokliny tedy je

$$x_2 = -\frac{g \sin x_1}{l \kappa} \quad (4.166)$$

Pole izoklin a směrnice tečen k trajektorii je načrtnuto na obr. 4.29.

Nyní můžeme provést linearizaci v okolí singulárních bodů zjištěných v příkladu 4.1. V okolí singulárního bodu  $x_{10} = x_{20} = 0$  dostaneme pro odchylové rovnice

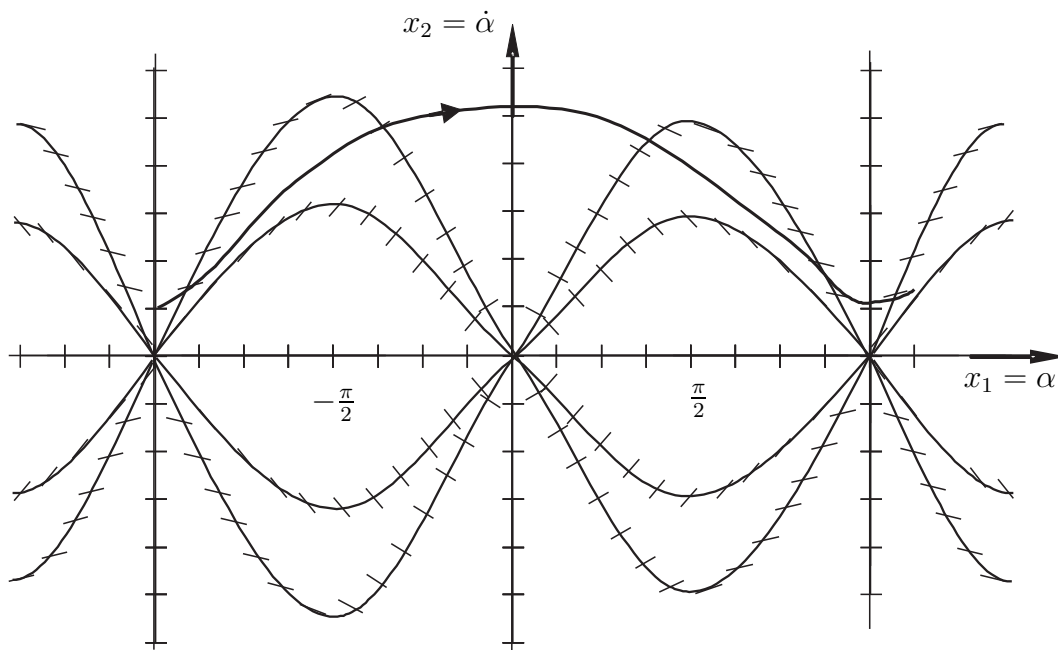
$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x_1}{dt} &= \Delta x_2 \\ \frac{d\Delta x_2}{dt} &= -\frac{g}{l} \Delta x_1 \end{aligned} \quad (4.167)$$

kde

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_1 - x_{10} \\ \Delta x_2 &= x_2 - x_{20} \end{aligned} \quad (4.168)$$

Charakteristická čísla matice systému (4.167) jsou ryze imaginární

$$\lambda_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (4.169)$$



**Obrázek 4.29:** Stavový portrét systému matematického kyvadla

V blízkém okolí bodu  $x_{10} = x_{20} = 0$  bude tedy stavový portrét typu střed (což je v souladu s obr. 4.29). V okolí singulárního bodu  $x_{10} = \pi, x_{20} = 0$  budou linearizované odchylkové rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x_1}{dt} &= \Delta x_2 \\ \frac{d\Delta x_2}{dt} &= \frac{g}{l} \Delta x_1 \end{aligned} \quad (4.170)$$

přičemž charakteristická čísla budou reálná

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (4.171)$$

V blízkém okolí tohoto singulárního bodu musí být stavový portrét typu sedlo (což opět odpovídá náskresu na obr. 4.29).

#### 4.3.5 Vyšetření existence mezního cyklu systémů druhého řádu

K vyšetřování mezních cyklů u systémů druhého řádu slouží následující teoremy, které jsou uváděny bez důkazů.

**Věta 4.1** Bendixsonův teorém:

Ať  $\mathcal{D}$  je jednoduše souvislá oblast  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  taková, že divergence

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \quad (4.172)$$

pole směřových vektorů systému

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{4.173}$$

není identicky rovna nule v jakékoliv podoblasti  $\mathcal{D}$  a nemění v  $\mathcal{D}$  znaménko, pak  $\mathcal{D}$  neobsahuje žádné uzavřené trajektorie.

Jednoduše souvislou oblast si lze představit např. jako spojitě deformovaný kruh. Teorém tedy udává podmínku postačující pro neexistenci mezního cyklu v nějaké oblasti  $\mathcal{D}$ .

**Příklad 4.24** Mějme lineární systém

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned}\tag{4.174}$$

Divergence pole směřových vektorů tohoto systému je

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) = a_{11} + a_{22}\tag{4.175}$$

Bude-li tedy platit  $a_{11} + a_{22} > 0$ , nemohou u tohoto systému podle Bendixsonova teorému 4.1 nastat periodická řešení. Vzhledem k tomu, že se jedná o lineární systém, je zřejmé, že periodické řešení bude existovat jen v případě, že charakteristická čísla systému budou ryze imaginární. Charakteristická rovnice systému je

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0\tag{4.176}$$

Charakteristická čísla systému budou ryze imaginární právě když

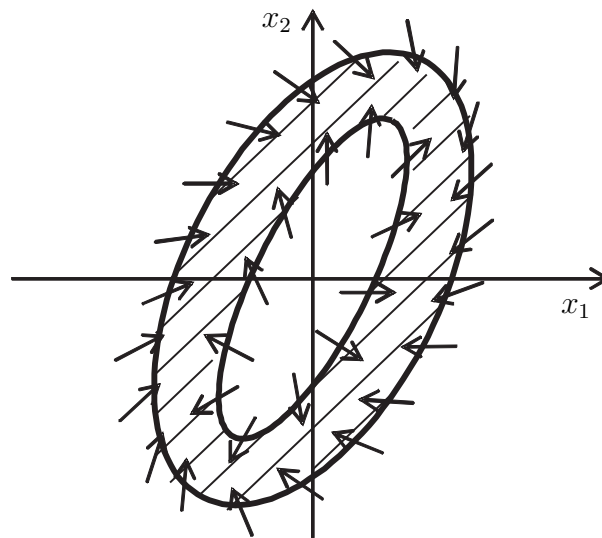
$$\begin{aligned}a_{11} + a_{22} &= 0 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &> 0\end{aligned}\tag{4.177}$$

Pokud tedy bude existovat periodické řešení, bude porušen Bendixsonův teorém 4.1 o neexistenci uzavřené trajektorie.

**Věta 4.2** Poincaré-Bendixsonův teorém:

Můžeme-li nalézt uzavřenou souvislou ohraničenou oblast  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^2$  takovou, že neobsahuje žádné singulární body a takovou, že nějaká trajektorie systému do ní vstupuje a s rostoucím časem už v ní zůstává, pak tato oblast obsahuje alespoň jedno periodické řešení systému.

Postačující podmínkou pro to, aby taková trajektorie existovala, je, aby pole směřových vektorů směřovalo v každém bodě hranice oblasti  $\mathcal{M}$  dovnitř této oblasti, jak je zobrazeno na obr. 4.30.



Obrázek 4.30: Poincaré-Bendixonův teorém

**Příklad 4.25** *Mějme systém*

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 + \alpha x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + \alpha x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \quad \alpha > 0\end{aligned}\tag{4.178}$$

Na tento systém se nyní pokusíme aplikovat Poincaré-Bendixonův teorém 4.2. Uvažujme oblast

$$\mathcal{M} = \{(x_1, x_2) | 0,9 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 1,1\}\tag{4.179}$$

kteřá představuje mezikružší se středem v počátku s poloměrem vnitřní kružnice  $\sqrt{0,9}$  a poloměrem vnější kružnice  $\sqrt{1,1}$ . Vzhledem k tomu, že uvažovaný systém má jediný singulární bod  $(0, 0)$  neobsahuje oblast  $\mathcal{M}$  žádné singulární body. Lehce zjistíme, že pole směrových vektorů pro  $x_1^2 + x_2^2 > 1$  (a tedy i v oblasti vně vnější kružnice) směřuje k počátku stavové roviny, zatím co pro  $x_1^2 + x_2^2 < 1$  (a tedy i v oblasti uvnitř vnitřní kružnice) směřuje od počátku stavové roviny. Podle Bendixonova teorému musí tedy v oblasti  $\mathcal{M}$  existovat alespoň jedno periodické řešení.

Další orientaci ve stavové rovině nám umožňují tzv. *indexové teorémy*. Teorémy uvedeme opět bez důkazu.

**Definice 4.1** *Předpokládejme, že  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  je jednoduše spojitá oblast. Dále předpokládejme, že je dáno zobrazení  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , které definuje pole směrových vektorů. Dále předpokládejme, že  $\mathcal{D}$  obsahuje pouze izolované singulární body systému*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\tag{4.180}$$

Atž  $\mathcal{J}$  je jednoduchá spojitá pozitivně orientovaná Jordanova křivka uvnitř  $\mathcal{D}$ , která neprochází žádným singulárním bodem systému. Pak indexem této Jordanovy křivky vzhledem k poli směrových vektorů  $\mathbf{f}$  rozumíme číslo  $I_{\mathbf{f}}(\mathcal{J})$  definované integrálem

$$I_{\mathbf{f}}(\mathcal{J}) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{J}} d\Theta_{\mathbf{f}}(x_1, x_2) \quad (4.181)$$

Pod jednoduchou Jordanovou křivkou si můžeme představit spojitě deformovanou kružnici. Při kladné orientaci obcházíme při integraci tuto křivku proti směru hodinových ručiček. Integrál (4.181) nám pak udává počet celistvých otáček, které provede směrový vektor na křivce  $\mathcal{J}$ , obejdeme-li ji jedenkrát v kladném směru. Kladné otáčky se počítají proti směru hodinových ručiček.

**Definice 4.2** Nechť je  $\mathbf{p}$  izolovaný singulární bod systému 4.180. Pak Poincareův index tohoto bodu je definován jako  $I_{\mathbf{f}}(\mathbf{p})$

$$I_{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) = I_{\mathbf{f}}(\mathcal{J}) \quad (4.182)$$

kde  $\mathcal{J}$  je libovolná Jordanova křivka taková, že  $\mathbf{p}$  je uvnitř této křivky a žádný další singulární bod není uvnitř křivky.

Na základě uvedených definic lze dokázat následující věty

**Věta 4.3** Poincareův index

- Jordanovy křivky, která neobsahuje žádný singulární bod je 0
- singulárního bodu typu střed, ohnisko nebo uzel je 1
- singulárního bodu typu sedlo je  $-1$

**Věta 4.4** Jestliže Jordanova křivka obklopuje několik izolovaných singulárních bodů  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ , pak Poincareův index této křivky je součtem indexů jednotlivých singulárních bodů

$$I_{\mathbf{f}}(\mathcal{J}) = \sum_i I_{\mathbf{f}}(\mathbf{p}_i) \quad (4.183)$$

**Věta 4.5** Nechť  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  jsou dvě pole směrových vektorů v  $\mathbb{R}^2$  a nechť  $\Theta_{\mathbf{f}}, \Theta_{\mathbf{g}}$  jsou směrové úhly směrových vektorů. Dále předpokládejme, že  $\mathcal{J}$  je jednoduchá uzavřená pozitivně orientovaná Jordanova křivka taková, že  $|\Theta_{\mathbf{f}} - \Theta_{\mathbf{g}}| < \pi$  podél této křivky (tj. směrové vektory polí  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  nejdou na této křivce nikdy proti sobě) a  $\mathcal{J}$  neprochází žádným singulárním bodem systému 4.180 ani systému

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (4.184)$$

pak platí

$$I_{\mathbf{f}}(\mathcal{J}) = I_{\mathbf{g}}(\mathcal{J}) \quad (4.185)$$



**Věta 4.6** *Nechť  $\mathcal{J}$  je jednoduchý uzavřený pozitivně orientovaný mezní cyklus systému 4.180. Pak*

$$I_f(\mathcal{J}) = 1 \quad (4.186)$$

**Věta 4.7** *Jestliže systém 4.180 má jen izolované singulární body, pak každý jeho mezní cyklus obsahuje uvnitř konečný počet těchto bodů takový, že součet jejich indexů je 1.*

**Příklad 4.26** *Mějme systém popsaný stavovými rovnicemi*

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \left(0,1 - \frac{10}{3}x_2^2\right)x_2 - x_1 - x_1^2 \end{aligned} \quad (4.187)$$

*Pokusme se vyřešit jeho stavový portrét se speciálním zřetelem na existenci mezního cyklu. Nejprve najdeme singulární body řešením rovnice*

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= \left(0,1 - \frac{10}{3}x_2^2\right)x_2 - x_1 - x_1^2 \end{aligned} \quad (4.188)$$

*Rovnici vyhovují pouze dva singulární body  $(0,0)$  a  $(-1,0)$ . Pokud provedeme linearizaci v okolí singulárního bodu  $(0,0)$  dostaneme odchylkové rovnice*

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x_1}{dt} &= \Delta x_2 \\ \frac{d\Delta x_2}{dt} &= -\Delta x_1 + 0,1\Delta x_2 \end{aligned} \quad (4.189)$$

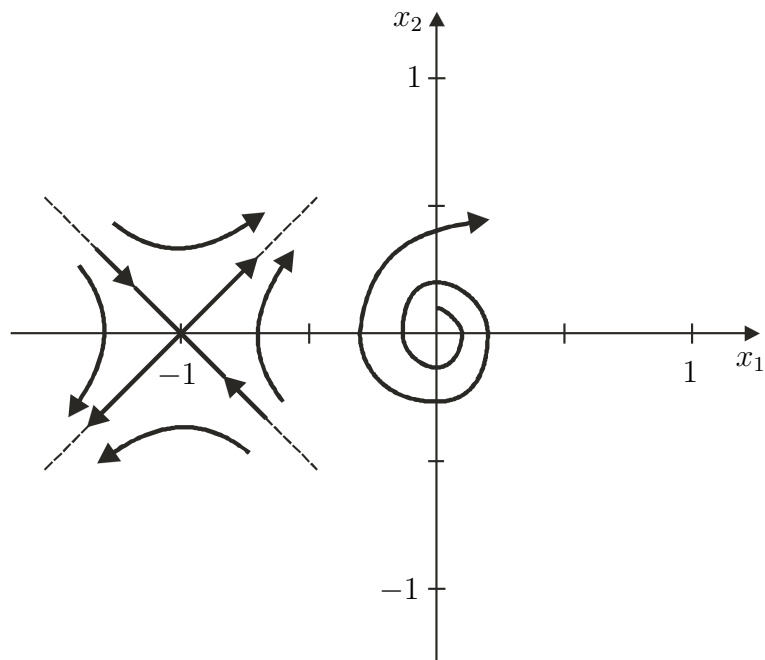
*Charakteristický polynom této soustavy je  $\lambda^2 - 0,1\lambda + 1$  a jeho kořeny  $\lambda_{1,2} = 0,05 \pm j$ . Ze závěrů kapitoly 4.3.4 pak vyplývá, že stavový portrét v okolí singulárního bodu  $(0,0)$  bude mít tvar nestabilního ohniska. Po linearizaci v okolí singulárního bodu  $(-1,0)$  dostaneme odchylkové rovnice*

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x_1}{dt} &= \Delta x_2 \\ \frac{d\Delta x_2}{dt} &= \Delta x_1 + 0,1\Delta x_2 \end{aligned} \quad (4.190)$$

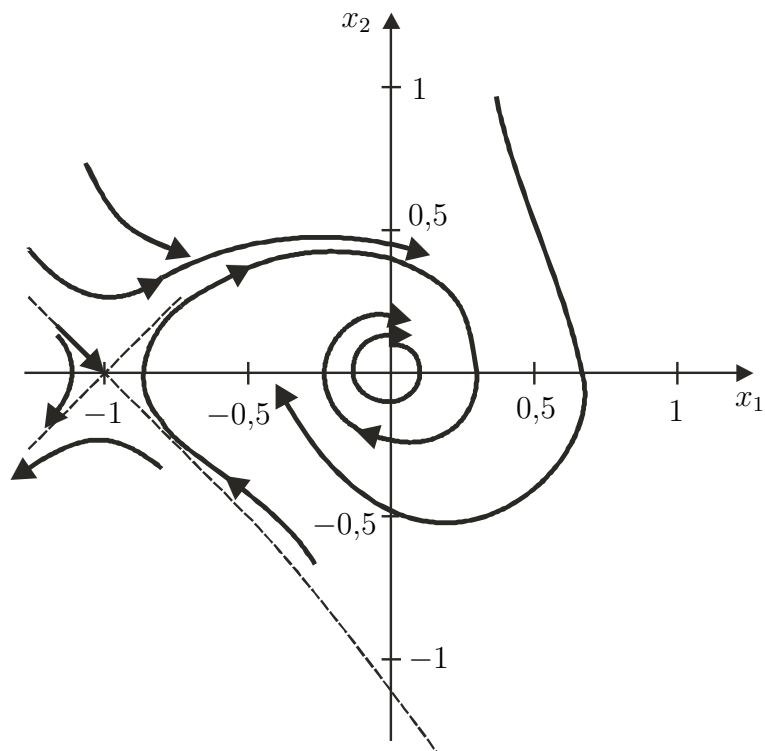
*Charakteristický polynom tohoto systému je  $\lambda^2 - 0,1\lambda - 1$  s kořeny  $\lambda_{1,2} = 0,05 \pm 1$ . Opět pomocí výsledků kapitoly 4.3.4 dospějeme k závěru, že v okolí singulárního bodu  $(-1,0)$  má stavový portrét charakter sedla. Nyní můžeme provést hrubý náčrt fázového portréту obr. 4.31.*

*Vzhledem k uvedeným větám nemůže existovat mezní cyklus, který by uzavíral bod  $(-1,0)$ , a rovněž nemůže existovat mezní cyklus, který by neuzavíral bod  $(0,0)$ . Existence mezního cyklu kolem bodu  $(0,0)$  není vyloučena. Zvolíme-li si například oblast vymezenou podmínkami  $|x_1| < 0,5, |x_2| < 0,5$  a vypočteme divergenci pole směrových vektorů, dostaneme*

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 0,1 - 10x_2^2 \quad (4.191)$$



Obrázek 4.31: Hrubý náčrt fázového portréu z příkladu 4.26

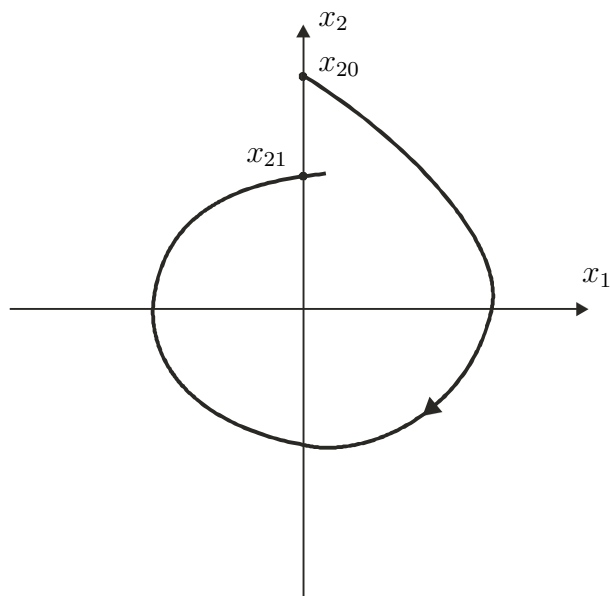


Obrázek 4.32: Náčrt fázového portréu a trajektorie z příkladu 4.26

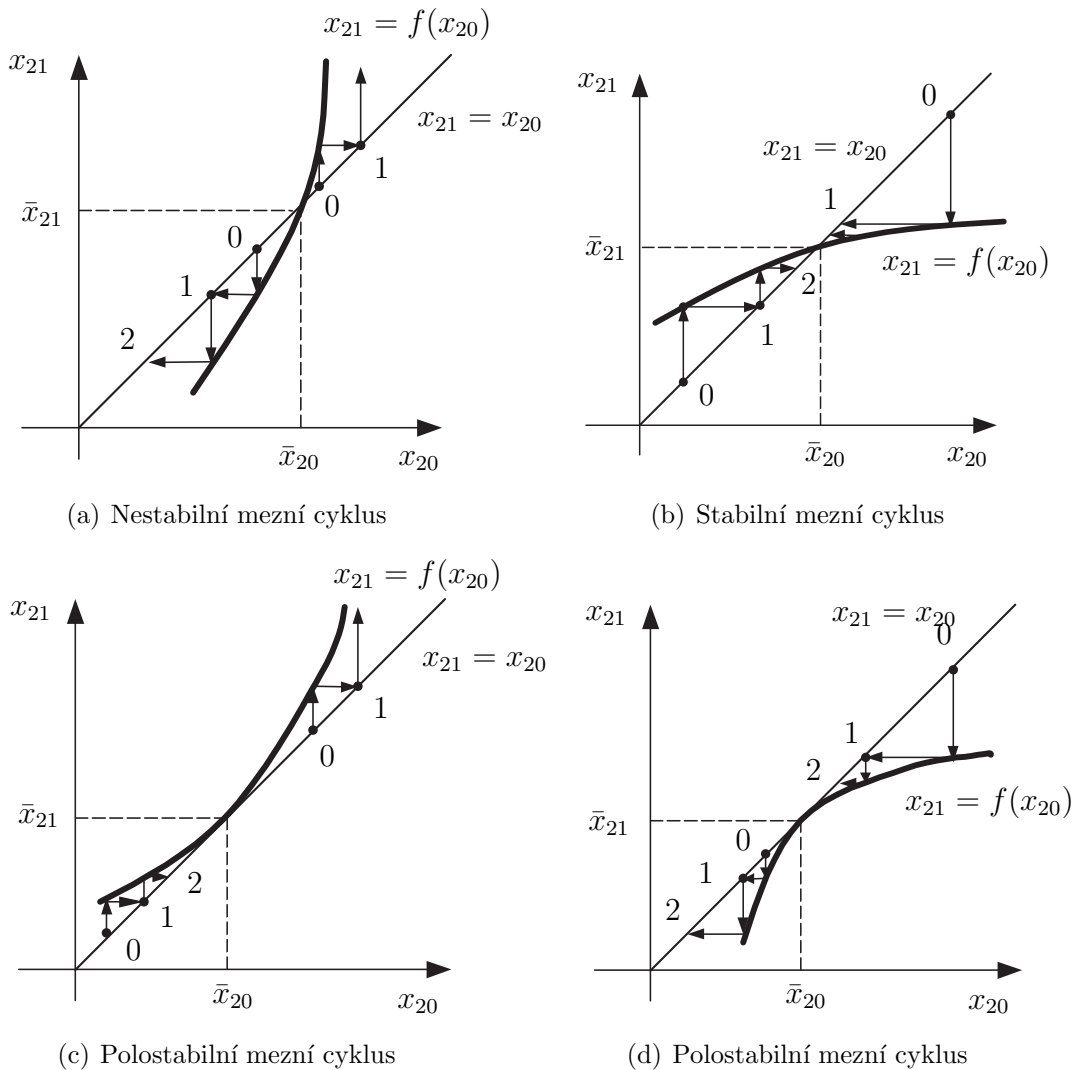
Je zřejmé, že  $\nabla f(\mathbf{x})$  mění na zvolené oblasti znaménko a podle Bendixsonova teoremu není existence mezního cyklu v této oblasti vyloučena. Dalším řešením simulací na počítači zjistíme, že mezní cyklus skutečně existuje a trajektorie mají tvar zachycený na obr. 4.32.

K vyšetřování existence a stability mezních cyklů systému druhého řádu se také používá tzv. metoda *bodových transformací*. Její princip je následující. Ve stavové rovině si zvolíme vhodnou přímku, nejčastěji kladnou poloosu  $x_2$  stavové roviny, viz obr. 4.33. Obecně může však být tato přímka volena libovolně tak, aby ulehčila výpočty spojené s touto metodou. Stavová trajektorie vychází na obr. 4.33 z bodu  $x_{20}$  na této přímce a po jednom oběhu prochází bodem  $x_{21}$ . Hodnoty  $x_{20}, x_{21}$  určují zároveň vzdálenost trajektorie od počátku při průchodu trajektorie přímkou. Další průchody trajektorie přímkou nám vytvoří posloupnost  $[x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots]$ . Hodnotu  $x_{20}$  můžeme volit naprosto libovolně a k ní vypočítat ze znalosti systému hodnotu  $x_{21}$ , tj. určit funkci  $x_{21} = f(x_{20})$  (prakticky tento výpočet nemusí být jednoduchý). Jestliže ke zvolené hodnotě  $x_{20}$  zjistíme, že  $x_{21} = x_{20}$ , pak zřejmě i ostatní členy posloupnosti budou  $x_{20}$  a nalezneme mezní cyklus nebo singulární bod. Stačí nám tedy najít řešení rovnice  $f(x_{20}) = x_{20}$ . Jestliže řešení této rovnice existuje, pak mezní cyklus může nastat a jeho stabilitu můžeme zjistit zkoumáním posloupnosti  $[x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots]$  pro různé počáteční hodnoty  $x_{20}$ . Řešení rovnice  $f(x_{20}) = x_{20}$  a zjištění stability případného mezního cyklu zjistíme nejnadhěji graficky, viz obr. 4.34. Jak na obr. 4.34(a), tak na obr. 4.34(b) existuje řešení rovnice  $f(x_{20}) = x_{20}$  a má hodnotu  $\bar{x}_{20}$ . Jestliže však u systému, pro který platí obr. 4.34(a) budeme sledovat posloupnost hodnot  $[x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots]$  zjistíme, že začínáme-li v bodě označeném 0 (odpovídá prvnímu členu posloupnosti), bude další člen posloupnosti odpovídat bodu 1 atd. Hodnoty posloupnosti se budou od hodnoty  $x_{20}$  vzdalovat a mezní cyklus bude nestabilní. Podobně zdůvodníme, že mezní cyklus zjištěný z obr. 4.34(b) bude stabilní a obr. 4.34(c), obr. 4.34(d) bude polostabilní. Protože zjištění funkce  $f(x_{20})$  je relativně nejsnadnější u systému po částech lineárních, je tato metoda vhodná především pro tyto systémy.

Uvedené metody umožňují spíše hrubou představu o existenci periodického řešení. V praxi je pak pro zjištění mezního cyklu používána často metoda harmonické rovnováhy, která bude popsána v kapitole 4.4.



**Obrázek 4.33:** Metoda bodových transformací



**Obrázek 4.34:** Grafické vyšetření stability mezního cyklu

#### 4.3.6 Shrnutí kapitoly 4.3

Chování nelineárních systémů často nedokážeme vypočítat analyticky. Můžeme však obvykle graficky sestavit stavovou trajektorii, která nám umožňuje vytvořit globální představu o chování nelineárního dynamického systému. Obvyklým způsobem sestavování stavové trajektorie je pokrytí stavové roviny směrovými vektory tečen k trajektorii a zakreslení izoklin - křivek, na kterých je směrnice tečen k trajektorii konstantní. Nelineární systém lze obvykle linearizovat v okolí jeho singulárních bodů. Stavový portrét nelineárního systému v okolí singulárního bodu pak odpovídá svým tvarem stavovému portréту příslušného lineárního systému. Proto jsme určili možné tvary stavové trajektorie lineárních systémů druhého řádu, které je možné použít při sestavování stavového portrétu nelineárního systému.

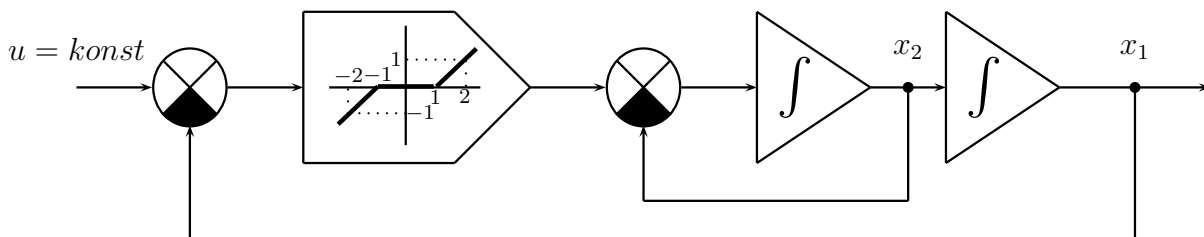
#### 4.3.7 Kontrolní otázky pro kapitolu 4.3

1. Co je to izoklina?
2. Jaké jsou základní typy stavové trajektorie systému druhého řádu v okolí izolovaného singulárního bodu?
3. Jaký tvar stavových rovnic je výhodný pro určování času na trajektorii?
4. Je možné nakreslit stavový portrét řízeného systému?

Správné odpovědi jsou uvedeny v dodatku A.

#### 4.3.8 Řešené příklady pro kapitolu 4.3

**Příklad 4.27** Zkonstruuje fázový portrét systému popsaného blokovým schématem na obr. 4.35 a zakreslete fázovou trajektorii pro  $u = 0$ ,  $x_1(0) = -0,8$ ,  $x_2(0) = -1$ .



Obrázek 4.35: Blokové schéma systému z příkladu 4.27

Blokovému schématu odpovídají stavové rovnice

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= f(u - x_1) - x_2 \end{aligned} \quad (4.192)$$

Jedná se o řízený systém a proto se pokusíme nejdříve z rovnic odstranit závislost na vstupním signálu  $u$ . Substitucemi  $e = u - x_1$  a  $x_2 = -\omega$  převedeme popis systému do tvaru fázových rovnic (máme sestavit fázový portrét)

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -f(e) - \omega \end{aligned} \quad (4.193)$$

Rovnovážné stavy jsou dány řešením

$$\begin{aligned} 0 &= \omega \\ 0 &= -f(e) - \omega \end{aligned} \quad (4.194)$$

Rovnovážné stavy systému tedy představují celou úsečku  $\omega = 0, |e| \leq 1$  a jsou neizolované.

*Nelinearita, vyskytující se v zadaném systému, je po částech lineární funkce. Fázový portrét budeme proto řešit v jednotlivých oblastech, kde se systém chová jako lineární.*

*I.  $|e| \leq 1$*

*Fázové rovnice přejdou do tvaru*

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\omega\end{aligned}\tag{4.195}$$

*Směrnice tečny k trajektorii*

$$\kappa = \frac{\dot{\omega}}{\dot{e}} = \frac{-\omega}{\omega} = -1\tag{4.196}$$

*Celý pás představuje jednu izoklinu.*

*II.  $e > 1$*

*Fázové rovnice přejdou do tvaru*

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -e + 1 - \omega\end{aligned}\tag{4.197}$$

*Směrnice tečny k trajektorii*

$$\kappa = \frac{\dot{\omega}}{\dot{e}} = \frac{-e + 1 - \omega}{\omega}\tag{4.198}$$

*Rovnice izokliny pro  $\kappa = \text{konst}$*

$$\begin{aligned}\omega\kappa &= -e + 1 - \omega \\ \omega &= \frac{-e + 1}{\kappa + 1} = \frac{-1}{\kappa + 1}(e - 1) = K(e - 1)\end{aligned}\tag{4.199}$$

*Izokliny jsou přímky procházející bodem  $(1; 0)$  a směrnicí  $K = \frac{-1}{\kappa + 1}$ .*

*III.  $e < -1$*

*Fázové rovnice přejdou do tvaru*

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -e - 1 - \omega\end{aligned}\tag{4.200}$$

*Směrnice tečny k trajektorii*

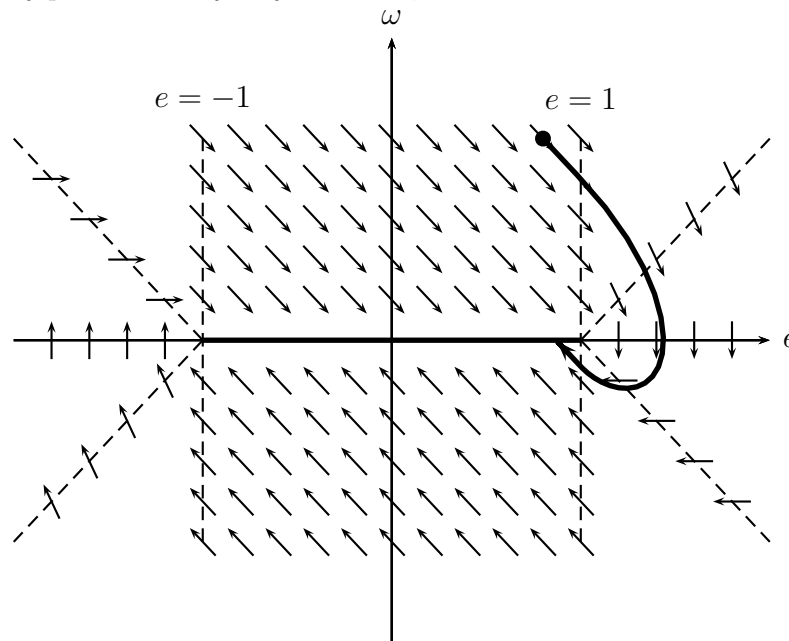
$$\kappa = \frac{\dot{\omega}}{\dot{e}} = \frac{-e - 1 - \omega}{\omega}\tag{4.201}$$

Rovnice izokliny pro  $\kappa = \text{konst}$

$$\begin{aligned}\omega\kappa &= -e - 1 - \omega \\ \omega &= \frac{-e - 1}{\kappa + 1} = \frac{-1}{\kappa + 1}(e + 1) = K(e + 1)\end{aligned}\quad (4.202)$$

Izokliny jsou přímky procházející bodem  $(-1; 0)$  a směrnici  $K = \frac{-1}{\kappa + 1}$ .

Na základě zjištěných izoklin a vztahů pro určení směrových vektorů tečen k trajektorii lze zakreslit fázový portrét zachycený na obr. 4.36.



Obrázek 4.36: Stavový portrét systému z příkladu 4.27

**Příklad 4.28** *Nelineární dynamický systém je popsáný stavovými rovnicemi*

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 - x_2 \operatorname{sign}(x_1^2 + x_2^2 - 1)\end{aligned}\quad (4.203)$$

Chceme zkonstruovat stavový portrét systému a načrtnout trajektorii pro  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0,25$

V tomto případě se jedná o neřízený systém a rovnice systému jsou již ve tvaru fázových rovnic. Proto není nutné zavádět žádné substituce. Systém má jediný rovnovážný stav, který určíme řešením rovnic

$$\begin{aligned}0 &= x_2 \\ 0 &= -x_1 - x_2 \operatorname{sign}(x_1^2 + x_2^2 - 1)\end{aligned}\quad (4.204)$$

přičemž dostaneme  $\mathbf{x}_0 = (0; 0)$ . V blízkém okolí rovnovážného stavu přejdou stavové rovnice do tvaru lineárního systému

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + x_2\end{aligned}\tag{4.205}$$

což odpovídá v maticovém zápisu

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\tag{4.206}$$

Charakteristický polynom systému je

$$\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} p & -1 \\ 1 & p-1 \end{bmatrix} = p^2 - p + 1\tag{4.207}$$

což znamená, že je systém nestabilní. Po malém vychýlení z rovnovážného stavu se tedy začne systém od něj vzdalovat a rovnovážný stav systému je tedy nestabilní.

Systém je po částech lineární. Stavovou rovinu si proto rozdělíme na jednotlivé oblasti, ve kterých bude systém odpovídat určitému lineárnímu systému.

$$I. x_1^2 + x_2^2 < 1$$

Tato oblast odpovídá kruhu o poloměru 1. Stavové rovnice mají tvar

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + x_2\end{aligned}\tag{4.208}$$

Směrnice tečny k trajektorii jsou

$$\kappa = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{-x_1 + x_2}{x_2}\tag{4.209}$$

Pro  $\kappa = \text{konst}$  dostaneme rovnici izoklin

$$\begin{aligned}\kappa x_2 &= -x_1 + x_2 \\ x_2 &= \frac{-1}{\kappa - 1} x_1\end{aligned}\tag{4.210}$$

Izokliny jsou tedy přímky procházející počátkem se směrnicí  $K = \frac{-1}{\kappa - 1}$

$$II. x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Tato oblast odpovídá kružnici o poloměru 1. Stavové rovnice mají tvar

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1\end{aligned}\tag{4.211}$$



Směrnice tečny k trajektorii jsou

$$\kappa = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{-x_1}{x_2} \quad (4.212)$$

a izokliny mají pak rovnici

$$x_2 = \frac{-1}{\kappa} x_1 \quad (4.213)$$

Izokliny jsou tedy přímky procházející počátkem se směrnicí  $K = \frac{-1}{\kappa}$ . Je zřejmé, že v tomto případě bude směrnice tečny k trajektorii kolmá na izoklinu a trajektorie bude odpovídat kružnici o poloměru 1.

III.  $x_1^2 + x_2^2 > 1$

Tato oblast odpovídá části stavové roviny vně kruhu o poloměru 1. Stavové rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 - x_2 \end{aligned} \quad (4.214)$$

V tomto případě je směrnice tečny k trajektorii

$$\kappa = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{-x_1 - x_2}{x_2} \quad (4.215)$$

a pro izokliny dostaneme

$$\begin{aligned} \kappa x_2 &= -x_1 - x_2 \\ x_2 &= \frac{-1}{\kappa + 1} x_1 \end{aligned} \quad (4.216)$$

Izokliny jsou tedy přímky procházející počátkem se směrnicí  $K = \frac{-1}{\kappa + 1}$

Na základě zjištěných izoklin a vztahů směrových vektorů můžeme zakreslit stavový portrét na obr. 4.37.

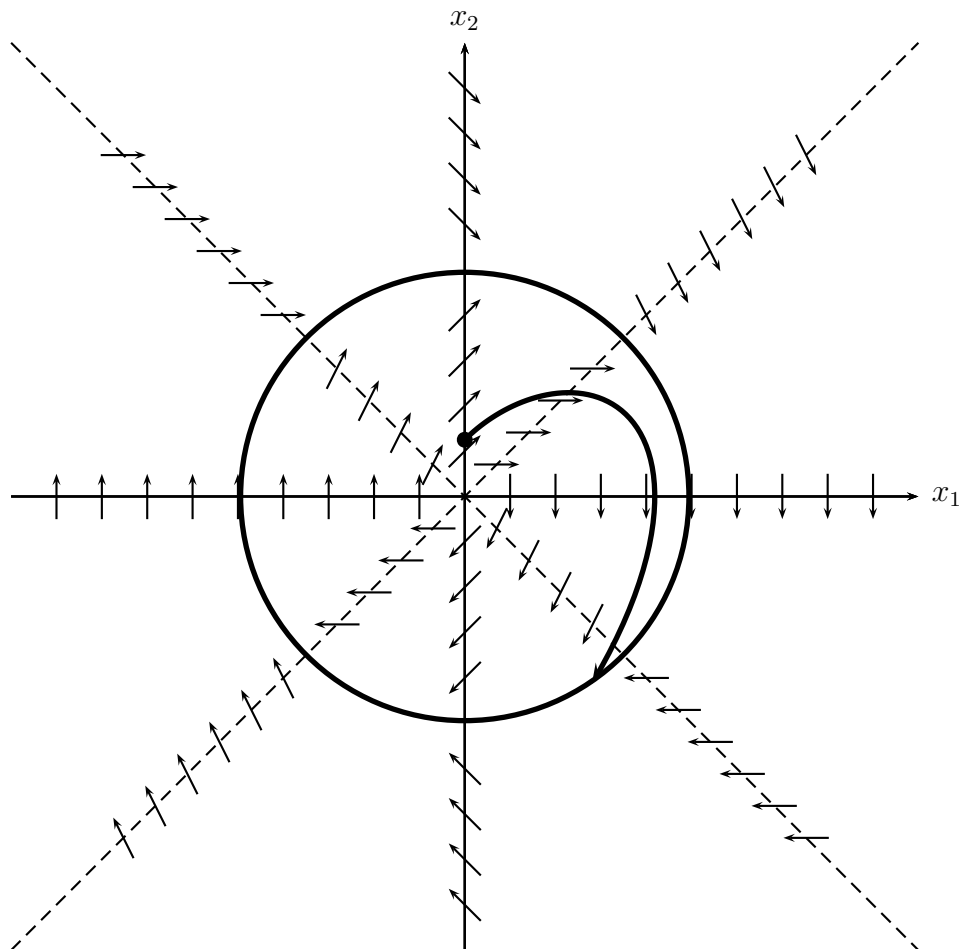
**Příklad 4.29** Nelineární dynamický systém je popsán stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -3x_2 - 4x_1^3 + x_1 \end{aligned} \quad (4.217)$$

Chceme určit přibližný tvar trajektorie v okolí jeho rovnovážných stavů a určit, zda se v oblastech vymezených kruhy se středem v bodě  $(0,25; 0)$  o poloměru 0,2 a se středem v bodě  $(-0,25; 0)$  o poloměru 0,2 nachází mezní cyklus.

Rovnovážné stavy vypočteme řešením rovnic

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 = 0 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -3x_2 - 4x_1^3 + x_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.218)$$



**Obrázek 4.37:** Stavový portrét systému z příkladu 4.28

Pro všechny rovnovážné stavy bude platit podle první z rovnic  $x_{20} = 0$ . Hodnotu  $x_1$  vypočteme řešením

$$-4x_1^3 + x_1 = x_1(-4x_1^2 + 1) = 0 \quad (4.219)$$

což vede na  $x_{10} = \{0; 0,5; -0,5\}$ . Rovnovážné stavy tedy jsou  $\mathbf{x}_0 = \{(0; 0), (0,5; 0), (-0,5; 0)\}$ .

Pro zjištění typu trajektorie provedeme linearizaci v okolí jednotlivých rovnovážných stavů a dostaneme

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} \quad (4.220)$$

kde  $\Delta x_1 = x_1 - x_{10}, \Delta x_2 = x_2 - x_{20}$  a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 12x_{10}^2 & -3 \end{bmatrix} \quad (4.221)$$

Charakteristická rovnice vypočtené lineární náhrady je

$$\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} p & -1 \\ -1 + 12x_{10}^2 & p + 3 \end{bmatrix} = p^2 + 3p - 1 + 12x_{10}^2 = 0 \quad (4.222)$$

Pro rovnovážné stavy  $x_{10} = 0$ ,  $x_{20} = \pm 0,5$  dostáváme rovnici  $p^2 + 3p + 2 = 0$  s řešením  $p_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \{-1; -2\}$ . Póly jsou v levé polorovině a jedná se o reálná čísla – rovnovážný stav je lokálně stabilní a trajektorie v jeho okolí bude mít charakter stabilního uzlu.

Pro rovnovážný stav  $x_{10} = 0$ ,  $x_{20} = 0$  dostáváme rovnici  $p^2 + 3p - 1 = 0$  s řešením  $p_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \{0,3028; -3,3028\}$ . Póly jsou reálná čísla a mají různá znaménka – rovnovážný stav není lokálně stabilní a trajektorie v jeho okolí bude mít charakter sedla.

Existenci mezního cyklu v tomto případě snadno ověříme pomocí indexových teorémů. Jakákoli křivka vedená uvnitř definovaných kruhů neobklopuje žádný singulární bod. Jordanův index takové křivky je pak 0. Každá křivka odpovídající meznímu cyklu má však podle indexových teorémů Jordanův index 1. V uvažovaných oblastech tedy nemůže existovat žádný mezní cyklus. Pomocí Bendixsonova teorému můžeme dokonce lehce ukázat, že uvažovaný systém nemá žádný mezní cyklus v celé stavové rovině. Pokud vypočteme divergenci pole směrových vektorů, dostaneme

$$\nabla(\dot{x}_1; \dot{x}_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -3 \quad (4.223)$$

Divergence pole směrových vektorů je tedy konstantní, nemění znaménko v celé stavové rovině a podle Bendixsonova teorému tedy nemůže existovat žádný mezní cyklus.

**Příklad 4.30** Uvažujme Van der Pol oscilátor popsany diferencíální rovnicí

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0,2(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (4.224)$$

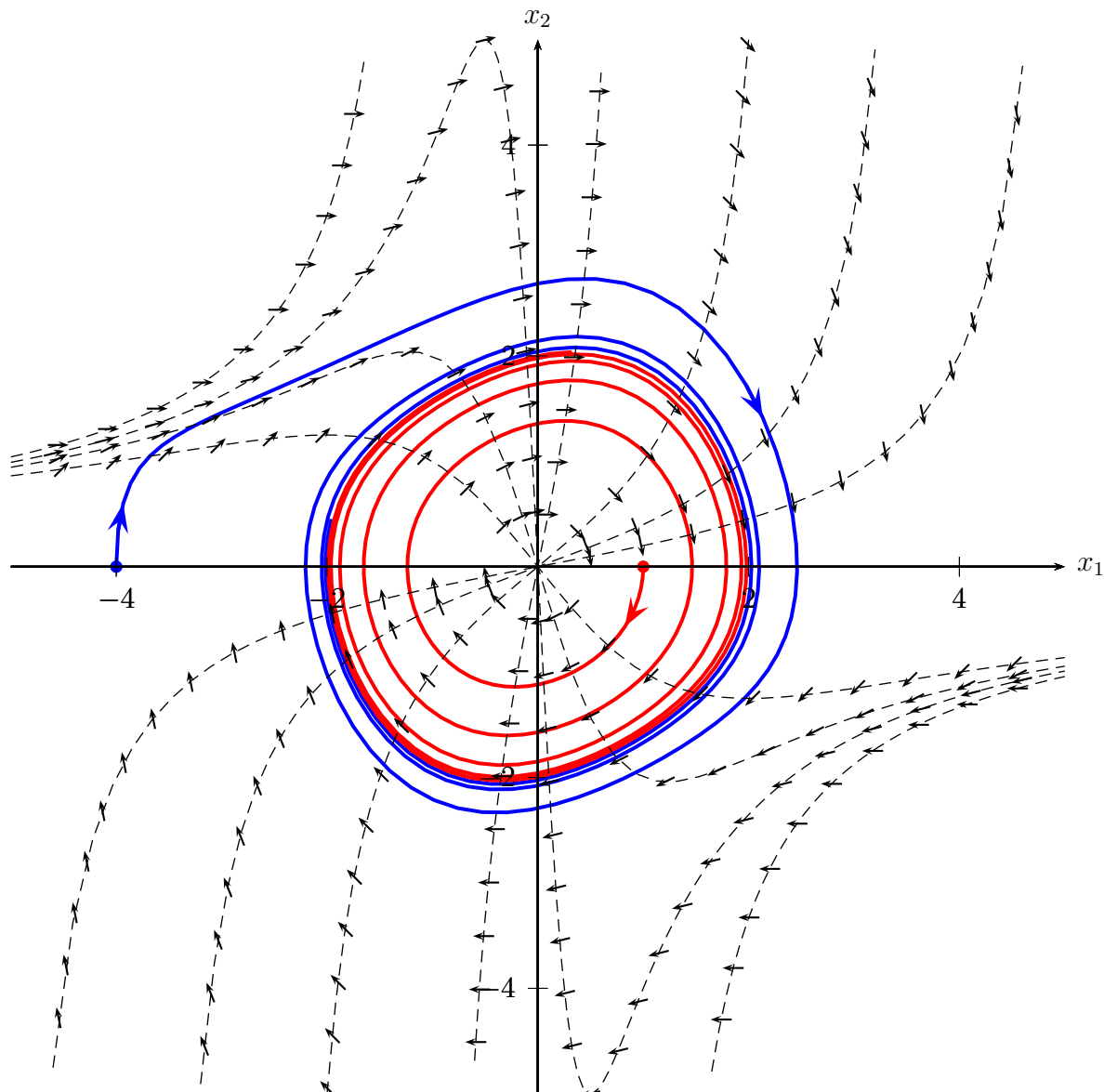
kterou můžeme rovněž zapsat ve tvaru stavových rovnic

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -0,2(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (4.225)$$

Pokusme se sestavit stavový portrét oscilátoru. Pro směrnici tečen k trajektorii platí

$$\kappa = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = -\frac{0,2(x_1^2 - 1)x_2 + x_1}{x_2} \quad (4.226)$$

Izokliny nebudou v tomto případě přímky, ale obecné křivky. Stavový portrét je zakreslen na obr. 4.38. Na stavovém portrétu si můžeme všimnout, že patrně existuje mezní cyklus. Zdá se rovněž, že trajektorie směřují vždy k meznímu cyklu a ten bude tedy stabilní.



Obrázek 4.38: Stavový portrét Van der Pol oscilátoru z příkladu 4.30

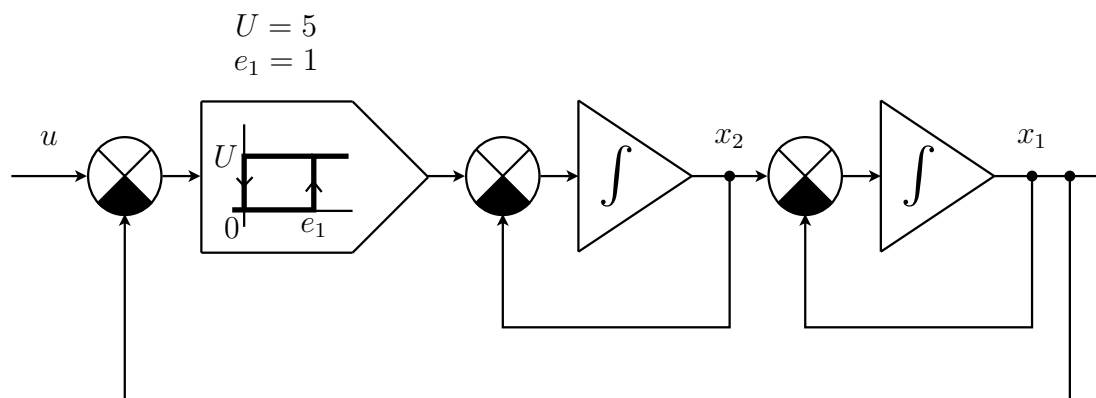
#### 4.3.9 Neřešené příklady pro kapitolu 4.3

**Příklad 4.31** Rozhodněte, zda trajektorie systému popsaného stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sin x_2 \\ \dot{x}_2 &= \cos x_1 - 4x_2 \\ y &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned} \tag{4.227}$$

může obsahovat mezní cyklus.

**Příklad 4.32** Sestavte fázový portrét systému, který je zakreslen na obr. 4.39, při  $u = 2$ , a zakreslete fázovou trajektorii pro  $x_1(0) = -1, x_2(0) = -5$ .



Obrázek 4.39: Blokové schéma systému z příkladu 4.32

## 4.4 Harmonická linearizace

### 4.4.1 Motivace

V předchozí kapitole jsme využili možnosti linearizace nelineárního systému rozvojem do Taylorovy řady v okolí singulárního bodu. Nyní se objevuje otázka, zda by nebylo možné najít lineární náhradu i v situaci, kdy se systém pohybuje po ustálené trajektorii - mezním cyklu. Následující kapitola se bude proto zabývat metodou harmonické linearizace, která umožňuje linearizaci nelineárního systému v případech, kdy se regulačním obvodem šíří harmonický signál.

### 4.4.2 Ekvivalentní přenos

Metoda harmonické linearizace (někdy také nazývaná metoda ekvivalentních přenosů) je dosti obecná, prakticky použitelná metoda, sloužící především k vyšetřování existence periodických řešení nelineárních systémů, resp. ke zjišťování existence a stability mezních cyklů nelineárních systémů vyšších řádů. Podstatou této metody je linearizace nelineárního systému za předpokladu existence harmonických kmitů tohoto systému (tzv. harmonická linearizace).

Základní myšlenku harmonické linearizace si vysvětlíme na nelineárním systému popsaném jednoduchou funkční závislostí  $y = f(u)$ . Vstupuje-li do tohoto systému signál  $u = A \sin \omega t$ , je výstupem signál  $y = f(A \sin \omega t)$ , který už nemá harmonický průběh. Pokusíme se nahradit tento nelineární člen lineárním systémem  $y = K_e u$  tak, aby rozdíl  $m(t) = f(u(t)) - K_e u(t)$  byl při  $u = A \sin \omega t$  v nějakém smyslu minimální. Jako kritérium dobré shody se obvykle volí minimum střední kvadratické odchylky  $J = \frac{1}{T} \int_0^T m^2(t) dt$ .

Lze dokázat, že minima je dosaženo tehdy, jestliže výstupní signál z lineární náhrady bude odpovídat první harmonické z rozvoje výstupního signálu z nelineárního systému do Fourierovy řady, t.j. jestliže bude platit

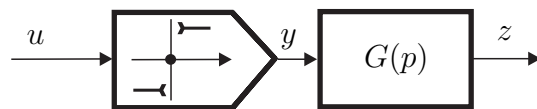
$$K_e A \sin \omega t = \left[ \frac{2}{T} \int_0^T f(A \sin \omega t) \sin \omega t dt \right] \sin \omega t \quad (4.228)$$

Odtud dostaneme

$$K_e = \frac{2}{AT} \int_0^T f(A \sin \omega t) \sin \omega t dt \quad (4.229)$$

$K_e$  nazýváme *ekvivalentní zisk* nebo také *ekvivalentní zesílení* nelineárního členu. Tento zisk zřejmě závisí na velikosti amplitudy vstupního harmonického signálu.

Vzhledem k tomu, že výstup nelineárního členu obvykle obsahuje významné vyšší harmonické frekvence, budou se výstupní signály z nelineárního členu a jeho ekvivalentní náhrady samozřejmě značně lišit. Ve většině reálných situací bude ale za nelineárním členem zařazen lineární systém s operátorovým přenosem



Obrázek 4.40: Ekvivalentní přenos

$$G(p) = \frac{M(p)}{N(p)} \quad (4.230)$$

který má charakter dolní propusti. V takovém případě bude celým zapojením obr. 4.40 procházet fakticky jen první harmonická frekvence. Za předpokladu, že vstupní signál je  $u(t) = A \sin \omega t$  pak můžeme celé spojení nahradit lineárním členem s přenosem  $K_e G(p)$ . Výstupní signály sériového zapojení obr. 4.40 a jeho náhrady  $K_e G(p)$  se budou při  $u(t) = A \sin \omega t$  lišit jen velmi málo. Člen  $K_e$  pak můžeme považovat za jakýsi *ekvivalentní přenos* nelineárního systému, který však platí jen pro harmonický vstupní signál.

Složitější nelineární systémy produkují při vstupním harmonickém signálu výstupní signál, jehož první harmonická má oproti vstupu nějaký fázový posun a parametry této složky výstupního signálu závisejí obecně jak na amplitudě tak na frekvenci vstupního signálu. Předpokládejme, že můžeme výstupní signál takového nelineárního systému při vstupním harmonickém signálu  $u(t) = A \sin \omega t$  rozvést do Fourierovy řady

$$y(t) = \frac{b_0}{2} + b_1 \cos \omega t + a_1 \sin \omega t + \sum_{k=2}^{\infty} (b_k \cos k\omega t + a_k \sin k\omega t)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos k\omega t dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin k\omega t dt$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (4.231)$$

Je známo, že k analýze ustálených stavů lineárních a linearizovaných systémů s harmonickými signály můžeme použít symbolickou komplexní metodu. Tato metoda nahrazuje signál  $A \sin(\omega t + \varphi)$  symbolickou náhradou  $A e^{j\varphi}$ . Vztah mezi signálem a náhradou označíme

$$A \sin(\omega t + \varphi) \leftrightarrow A e^{j\varphi} \quad (4.232)$$

Vstupuje-li do lineárního systému s operátorovým přenosem  $G(p)$  signál  $A \sin \omega t$ , získáme symbolickou náhradu výstupního signálu ve formě  $AG(j\omega)$ . Ustálený výstupní signál je tedy opět sinusový s amplitudou  $A|G(j\omega)|$  a fázovým posuvem  $\arg(G(j\omega))$ . Na základě těchto znalostí můžeme definovat ekvivalentní přenos jako

$$N_e(A, \omega) = \frac{a_1 + jb_1}{A} \quad (4.233)$$

kde  $A$  je amplituda vstupního signálu  $u(t) = A \sin \omega t$ ,  $a_1$  a  $b_1$  jsou amplitudy sinusové a kosinusové složky první harmonické výstupního signálu z nelinearity. Protože amplituda první harmonické výstupního signálu z nelinearity může záviset jak na amplitudě vstupního signálu, tak na jeho frekvenci, je ekvivalentní přenos obecně funkcí  $A$  i  $\omega$ .

**Příklad 4.33** Je třeba vypočítat ekvivalentní přenos nelineárního systému typu ideální relé se statickou převodní charakteristikou

$$y(t) = M \operatorname{sign} u(t) \quad (4.234)$$

V případě, že na vstup systému přivedeme signál  $u(t) = A \sin \omega t$  s periodou  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , bude výstup nelinearity

$$y(t) = \begin{cases} M & t \in (kT, \frac{T}{2} + kT) \\ -M & t \in (\frac{T}{2} + kT, T + kT) \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.235)$$

Pomocí (4.231) vypočteme velikost první harmonické složky

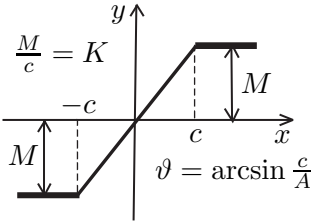
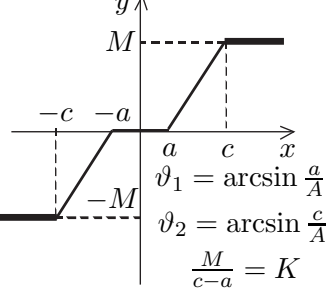
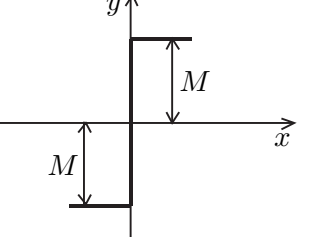
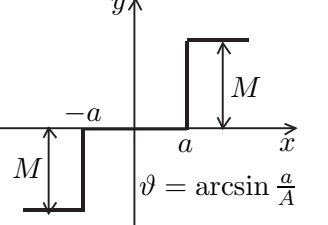
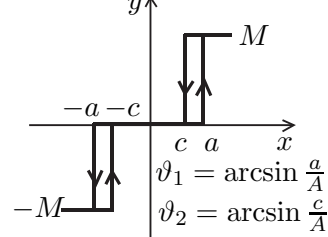
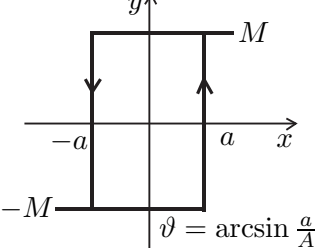
$$b_1 = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} M \cos \omega t \, dt - \int_{\frac{T}{2}}^T M \cos \omega t \, dt \right] = 0 \quad (4.236)$$

$$a_1 = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} M \sin \omega t \, dt - \int_{\frac{T}{2}}^T M \sin \omega t \, dt \right] = \frac{4M}{\pi}$$

Z (4.233) pak dostaneme ekvivalentní přenos ideálního relé

$$N_e(A, \omega) = \frac{4M}{\pi A} \quad (4.237)$$

V tabulce 4.2 jsou uvedeny ekvivalentní přenosy často se vyskytujících nelinearit. Všechny ekvivalentní přenosy příslušející nelinearitám z tabulky 4.2 jsou nezávislé na frekvenci vstupního signálu.

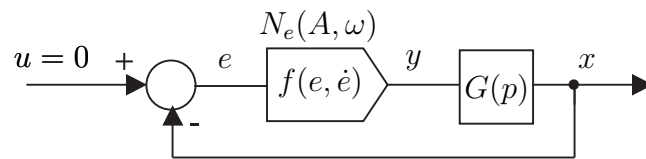
obráz.	Nelinearita	Složky ekvivalentního přenosu
a	 <p> <math>\frac{M}{c} = K</math>  <math>\vartheta = \arcsin \frac{c}{A}</math> </p>	$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{KA}{\pi} (2\vartheta - \sin 2\vartheta) + \frac{4M}{\pi} \cos \vartheta \\ b_1 &= 0 \end{aligned} \right\} A > c$ $\left. \begin{aligned} a_1 &= KA \\ b_1 &= 0 \end{aligned} \right\} A \leq c$
b	 <p> <math>\vartheta_1 = \arcsin \frac{a}{A}</math>  <math>\vartheta_2 = \arcsin \frac{c}{A}</math>  <math>\frac{M}{c-a} = K</math> </p>	$\left. \begin{aligned} a_1 &= 0 \quad b_1 = 0 \quad A \leq a \\ a_1 &= \frac{K}{\pi} [A(\pi - 2\vartheta_1) + A \sin 2\vartheta_1 - 4a \cos \vartheta_1] \\ b_1 &= 0 \end{aligned} \right\} a < A \leq c$ $\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{K}{\pi} [2A(\vartheta_2 - \vartheta_1) + A(\sin 2\vartheta_1 - \sin 2\vartheta_2) + \\ &+ 4a(\cos \vartheta_2 - \cos \vartheta_1)] + \frac{4M}{\pi} \cos \vartheta_2 \\ b_1 &= 0 \end{aligned} \right\} A > c$
c		$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{4M}{\pi} \\ b_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$
d	 <p> <math>\vartheta = \arcsin \frac{a}{A}</math> </p>	$\left. \begin{aligned} a_1 &= 0 \\ b_1 &= 0 \end{aligned} \right\} A \leq a$ $\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{4M}{\pi} \cos \vartheta \\ b_1 &= 0 \end{aligned} \right\} A > a$
e	 <p> <math>\vartheta_1 = \arcsin \frac{a}{A}</math>  <math>\vartheta_2 = \arcsin \frac{c}{A}</math> </p>	$\left. \begin{aligned} a_1 &= 0 \\ b_1 &= 0 \end{aligned} \right\} A \leq a$ $\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{2M}{\pi} (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2) \\ b_1 &= -\frac{2M}{\pi} (\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2) \end{aligned} \right\} A > a$
f	 <p> <math>\vartheta = \arcsin \frac{a}{A}</math> </p>	$\left. \begin{aligned} a_1 &= 0 \\ b_1 &= 0 \end{aligned} \right\} A \leq a$ $\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{4M}{\pi} \cos \vartheta \\ b_1 &= -\frac{4M}{\pi} \sin \vartheta \end{aligned} \right\} A > a$

**Tabulka 4.2:** Složky ekvivalentních přenosů typických nelinearit při symetrickém vstupním signálu  $e = A \sin \omega t$



### 4.4.3 Metoda harmonické rovnováhy

Metoda harmonické rovnováhy využívá ekvivalentní přenosy a metodu harmonické linearizace k zjištění existence mezních cyklů (periodických řešení) u neřízených systémů. Metoda se používá pro systémy v konfiguraci nakreslené na obr. 4.41, nebo pro systémy, které můžeme dovolenými úpravami do této konfigurace převést.



**Obrázek 4.41:** Konfigurace pro metodu harmonické rovnováhy

Základní podmínkou této metody je předpoklad, že při existenci mezního cyklu se obvodem šíří pouze první harmonická z periodických kmitů signálu  $y$ . Z tohoto základního předpokladu plynou následující podmínky použití

- nelineární část systému je takového charakteru, že při vstupním signálu do nelineárního systému  $e(t) = A \sin \omega t$  je výstupní signál  $y(t)$  rozvinutelný do Fourierovy řady a tato řada neobsahuje stejnosměrnou složku.
- lineární část systému  $G(p)$  má charakter dolnofrekvenční propusti potlačující vyšší harmonické signálu  $y(t)$  při ustálených periodických kmitěch systému.

První podmínce vyhovují kromě jiných i všechny nelinearity z tabulky 4.2. Druhé podmínce vyhovují dobře systémy, jejichž frekvenční charakteristika nemá rezonanční zvýšení amplitudy a dostatečně účinně potlačuje vyšší frekvence. Vzhledem k nedostatečně přesné formulaci a kontrolovatelnosti této podmínky je třeba výsledky metody vždy ověřit prakticky nebo simulací. Pokud jsou splněny uvedené předpoklady, platí při  $e(t) = A \sin \omega t$

$$X = N_e(A, \omega)G(j\omega)A \quad (4.238)$$

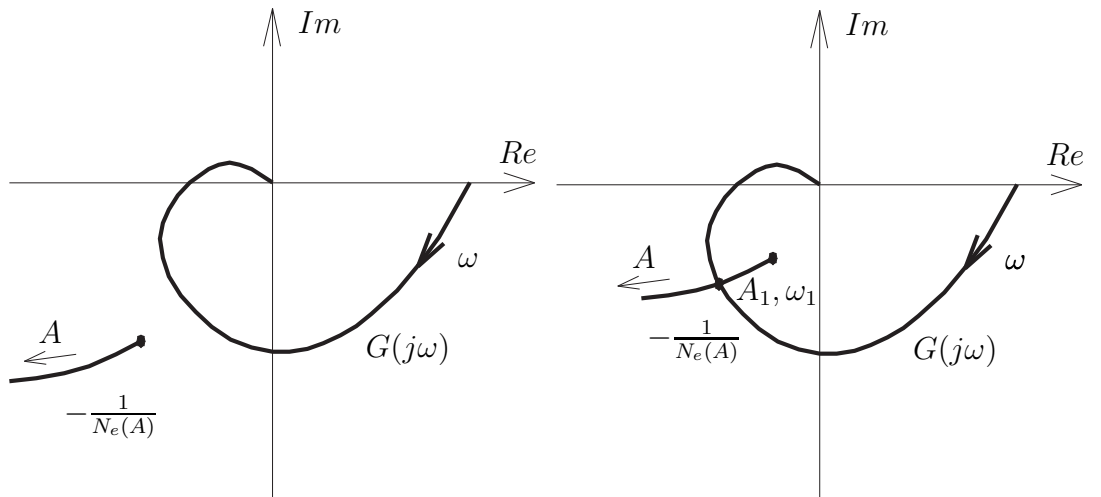
Rovnice určuje signál  $x$  v komplexním symbolickém tvaru. Existují-li v obvodu ustálené periodické kmity s  $e(t) = A \sin \omega t$ , musí zřejmě platit  $e(t) = -x(t) = A \sin \omega t$  a tedy v symbolickém tvaru

$$A = -N_e(A, \omega)G(j\omega)A \quad (4.239)$$

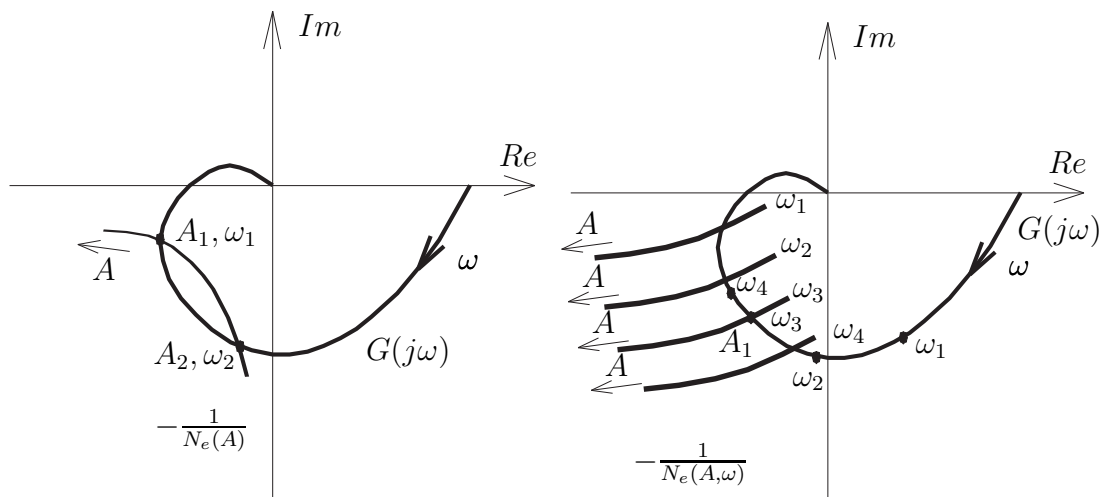
Vyloučením  $A$  pak dostáváme nutnou podmínku pro existenci mezních cyklů

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N_e(A, \omega)} \quad (4.240)$$

Protože jde o rovnici v komplexním oboru, rozbíjí se výraz (4.240) na dvě rovnice v reálném oboru, ze kterých pak dostaneme případné řešení amplitudy  $A$  a úhlové frekvence mezních cyklů  $\omega$ . Rovnici (4.240) musíme většinou řešit graficky s využitím znalosti frekvenční charakteristiky lineární části systému v komplexní rovině. Na obr. 4.42 jsou nakresleny některé možné případy grafického řešení rovnice (4.240) pro případ, že ekvivalentní přenos nezávisí na frekvenci  $\omega$ . Řešení v případě, že ekvivalentní přenos závisí na frekvenci  $\omega$ , je zachyceno na obr. 4.42(d) a je již podstatně obtížnější.



(a) Rovnice (4.240) nemá řešení, mezní cyklus neexistuje (b) Rovnice (4.240) má jedno řešení, mezní cyklus  $e = A_1 \sin \omega_1 t$



(c) Rovnice (4.240) má dvě řešení, mohou nastat mezní cykly  $e = A_1 \sin \omega_1 t, e = A_2 \sin \omega_2 t$  (d) Řešení rovnice (4.240) pro ekvivalentní přenos závislý na frekvenci, může nastat jen mezní cyklus  $e = A_1 \sin \omega_3 t$

**Obrázek 4.42:** Zjišťování existence mezních cyklů řešením rovnice (4.240) při ekvivalentním přenosu nezávislém (a,b,c) a závislém (d) na frekvenci

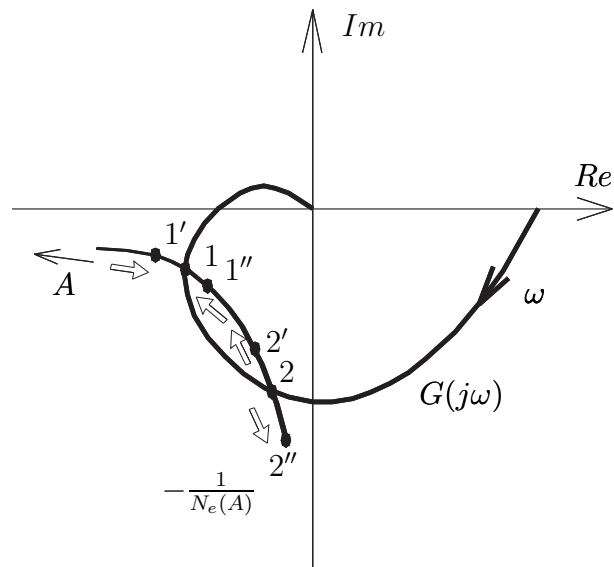
Jak již víme, nemusí být některé mezní cykly stabilní. Z praktického hlediska mají význam pouze stabilní mezní cykly. Proto může být užitečné zjištění stability nalezeného mezního cyklu analytickou cestou.

Ke zjištění stability mezního cyklu můžeme použít *Nyquistova kritéria*, známého z lineárních systémů. Pro mezní cyklus a jeho blízké okolí můžeme dopřednou větev systému z obr. 4.41 nahradit operátorovým přenosem  $N_e(A, \omega)G(p)$  a zakreslit průběh výrazu  $N_e(A, \omega)G(j\omega)$  v komplexní rovině. Pro parametry mezního cyklu např.  $A = A_1, \omega = \omega_1$  prochází tento graf právě kritickým bodem  $(-1, 0j)$ . Pro malé odchylky parametrů mezního cyklu od hodnot  $A_1, \omega_1$  nebude již  $N_e(A, \omega)G(j\omega)$  procházet kritickým bodem, ale

bude indikovat stabilní nebo nestabilní systém jak je běžné u Nyquistova kritéria. Jestliže při uvážení  $A > A_1$ , resp.  $A < A_1$  bude kritérium indikovat stabilní resp. nestabilní systém, dojde po náhodném zvýšení resp. snížení amplitudy kmitů mezního cyklu ke snižování resp. zvyšování této amplitudy a mezní cyklus bude stabilní. Naopak jestliže při uvážení  $A > A_1$  resp.  $A < A_1$  bude kritérium indikovat nestabilní resp. stabilní systém, bude mezní cyklus s parametry  $A_1, \omega_1$  nestabilní.

Z uvedeného je zřejmé, že pro aplikaci kritéria musíme nakreslit několik grafů  $N_e(A, \omega)G(j\omega)$ . Postup však jde zjednodušit, uvědomíme-li si, že při běžném použití Nyquistova kritéria sledujeme chování vektoru směřujícího z kritického bodu  $(-1, 0j)$  do hodografu  $G(j\omega)$ . Např. aby byl lineární systém s přenosem otevřené smyčky  $G(p)$  stabilní, nesmí při stabilní otevřené smyčce tento vektor vykonat celistvý počet otáček mění-li se  $p$  po imaginární od  $-j$  do  $+j$ . V našem případě musíme tedy sledovat chování vektoru směřujícího z kritického bodu  $(-1, 0j)$  do hodografu  $N_e(A, \omega)G(j\omega)$ . Lze dokázat, že chování tohoto vektoru je stejné jako chování vektoru směřujícího z bodu  $-\frac{1}{N_e(A, \omega)}$  do hodografu  $G(j\omega)$ . Při sledování stability mezního cyklu prostě zaměníme kritický bod  $(-1, 0j)$

kritickým bodem  $-\frac{1}{N_e(A, \omega)}$ . Situaci si objasníme pomocí obr. 4.43. Obvod, jehož konfigurace je na obr. 4.41 má průběhy  $G(j\omega)$  a  $N_e(A, \omega)$  takové, jak je nakresleno na obr. 4.43. V obvodu mohou tedy existovat dva mezní cykly odpovídající bodům 1 a 2 na obr. 4.43. Pokud se u mezního cyklu 1 sníží amplituda kmitů tak, že na charakteristice ekvivalentního přenosu přejdeme do bodu  $1''$ , pak můžeme tento bod považovat za ekvivalent kritického bodu  $(-1, 0j)$  a Nyquistovo kritérium indikuje nestabilitu odpovídajícího lineárního systému. Amplituda kmitů tedy začne narůstat. Stejnou úvahou dojdeme k závěru, že při zvýšení amplitudy kmitů a přechodu do bodu  $1'$  bude ekvivalentní lineární systém stabilní a amplituda kmitů začne klesat. Bod 1 bude tedy bodem stabilních oscilací - stabilního mezního cyklu. Stejným rozбором dojdeme k závěru, že bod 2 je bodem, pro který je mezní cyklus nestabilní.



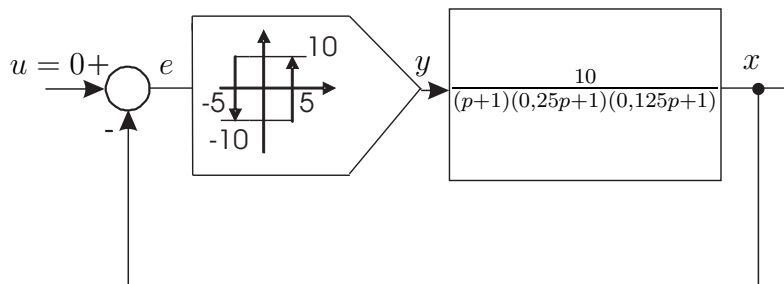
Obrázek 4.43: Stabilita mezních cyklů

**Příklad 4.34** Na obr. 4.44 je nakreslen regulační systém u kterého je zapotřebí vyšetřit existenci a parametry mezních cyklů. Pro použitý regulátor nalezneme ekvivalentní přenos s pomocí tabulky 4.2. Platí

$$N_e(A) = \frac{4M \cos \vartheta - j4M \sin \vartheta}{\pi A} = \frac{4M}{\pi A} e^{-j\vartheta} \quad A > a \quad (4.241)$$

kde  $M = 10, a = 5, \vartheta = \arcsin \frac{a}{A}$ . Dále lze psát

$$\begin{aligned} -\frac{1}{N_e(A)} &= -\frac{\pi A}{4M} e^{j\vartheta} = -\frac{\pi A}{4M} (\cos \vartheta + j \sin \vartheta) = \\ &= -\frac{\pi}{4M} \sqrt{A^2 - a^2} - j \frac{\pi a}{4M} \end{aligned} \quad (4.242)$$



**Obrázek 4.44:** Regulační soustava s reléovým regulátorem

Imaginární část grafu  $-\frac{1}{N_e(A)}$  nezáleží tedy na amplitudě  $A$ , takže graf  $-\frac{1}{N_e(A)}$  je přímka rovnoběžná s reálnou osou ležící ve 3. kvadrantu. Náčrt grafu  $-\frac{1}{N_e(A)}$  i  $G(j\omega)$  je na obr. 4.45. Jak grafickým, tak numerickým řešením získáme parametry mezního cyklu  $A = 14,3; \omega = 4,8$ . Použitím výše uvedené modifikace Nyquistova kritéria stability zjistíme, že nalezený mezní cyklus je stabilní. Při řešení jsme předpokládali  $u = 0$ . Jestliže bude ale do systému vstupovat konstantní vstupní signál  $u = 200$ , pak je z fyzikálního názoru zřejmé, že kmity systému nenastanou (výstup ze systému se ustálí na hodnotě  $x = 100$ , vznikne ustálená regulační odchylka  $e = 100$ , která způsobí, že relé bude ve stavu sepnuto s  $y = 10$ ).

Metodu harmonické rovnováhy můžeme snadno zobecnit na obecnější konfiguraci systému tak, jak je naznačeno na obr. 4.46. Předpoklady použití metody zůstávají stejné jako pro základní případ, ovšem obě lineární části musí mít charakter dolnofrekvenční propusti. Existují-li v obvodu ustálené harmonické kmity, pro které platí  $x_1 = A_1 \sin \omega t$ ,  $x_3 = A_3 \sin(\omega t + \varphi_3)$ ,  $x_4 = A_4 \sin(\omega t + \varphi_4)$  a mají-li nelinearity  $N_1, N_2$  ekvivalentní přenosy  $N_{e1}(A_1, \omega)$ ,  $N_{e2}(A_3, \omega)$ , pak v symbolickém komplexním tvaru platí

$$X_1 = -G_2(j\omega)N_{e2}(A_3, \omega)G_1(j\omega)N_{e1}(A_1, \omega)X_1 \quad (4.243)$$

Pro amplitudu  $A_3$  platí

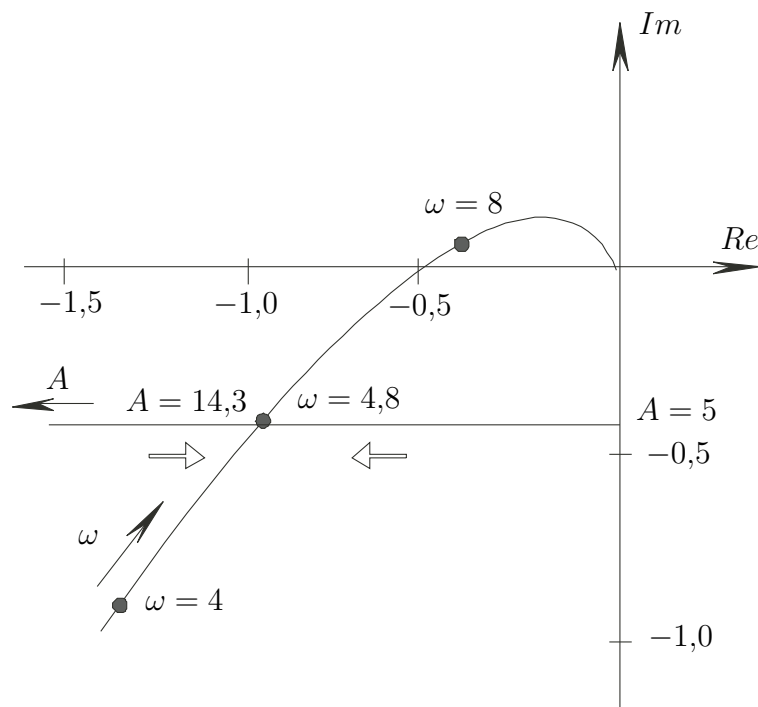
$$A_3 = |G_1(j\omega)| |N_{e1}(A_1, \omega)| A_1 \quad (4.244)$$

Můžeme tedy psát

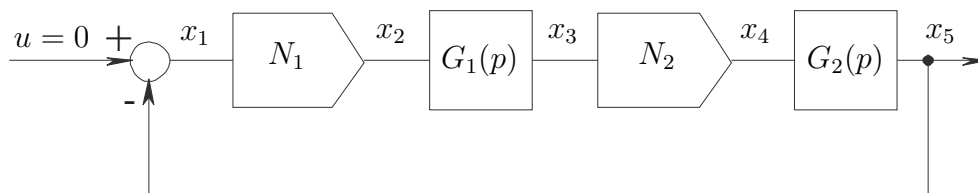
$$N_{e2}(A_3, \omega) = N_{e2}(|G_1(j\omega)| |N_{e1}(A_1, \omega)| A_1, \omega) = N_{e2}^*(A_1, \omega) \quad (4.245)$$

Označíme-li  $G_1(j\omega)G_2(j\omega) = G(j\omega)$  a dosadíme-li (4.245) do (4.243), dostaneme podmínku existence mezních cyklů ve tvaru

$$N_{e2}^*(A_1, \omega)N_{e1}(A_1, \omega)G(j\omega) = -1 \quad (4.246)$$



Obrázek 4.45: Řešení mezního cyklu systému z obr. 4.44



Obrázek 4.46: Obecnější konfigurace pro použití metody harmonické rovnováhy

Dále můžeme označit  $N_{e2}^*(A_1, \omega)N_{e1}(A_1, \omega) = N_e(A_1, \omega)$  a podmínka existence mezních cyklů bude stejná jako v základní verzi

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N_e(A_1, \omega)} \quad (4.247)$$

Oproti základní verzi bude  $N_e(A_1, \omega)$  explicitně záviset na  $\omega$  i když ekvivalentní přenosy jednotlivých nelinearit nebudou na  $\omega$  závislé. Tento fakt vyplývá z přítomnosti  $G_1(j\omega)$  v rovnici (4.245). Praktické vyčíslení ekvivalentního přenosu  $N_e(A_1, \omega)$  je pak značně náročné.

Metodu harmonické rovnováhy můžeme použít i při návrhu systému. Vhodnou úpravou frekvenční charakteristiky lineární části nebo ekvivalentního přenosu nelineární části můžeme měnit parametry mezního cyklu nebo dokonce mezní cykly odstranit. Je však třeba si uvědomit, že existence mezního cyklu někdy zaručuje, že regulační děj probíhá, jako v příkladu 4.34, u kterého regulační proces probíhá právě když existuje mezní cyklus.

#### 4.4.4 Mezní cykly řízených systémů

V předcházející kapitole jsme se zabývali problematikou zjišťování mezních cyklů u neřízených systémů. Přítomnost řídicího signálu (nebo poruchového signálu) většinou způsobí, že systémem se nešíří pouze první harmonická z periodického signálu na výstupu nelineárního systému, ale i stejnosměrná složka, eventuálně další signály. V této kapitole budeme předpokládat, že regulační systém má konfiguraci podle obr. 4.41, nebo je možno jej na tuto konfiguraci upravit. Oproti předchozí kapitole budeme předpokládat, že  $u = konst$ , resp.  $u = kt$ , bude-li lineární část obvodu statická resp. astatická. Dalším předpokladem je, že při vstupním signálu do nelineárního systému ve tvaru  $e = e_0 + A \sin \omega t$  lze jeho výstupní signál  $y$  rozložit do Fourierovy řady a obvodem se šíří pouze stejnosměrná složka a první harmonická tohoto rozvoje. Kmity systému jsou tedy nesymetrické. Tyto předpoklady opět vyžadují, aby lineární část obvodu měla charakter dolnofrekvenční propusti, ale oproti předchozí kapitole dovolují, aby nelinearita byla takového charakteru, aby při vstupním signálu  $e = A \sin \omega t$  obsahuje její výstupní signál stejnosměrnou složku.

Předpokládejme, že lineární část systému je popsána operátorovým přenosem

$$G(p) = \frac{M(p)}{N(p)} \quad (4.248)$$

Obvod z obr. 4.41 pak můžeme popsat diferenciální rovnicí

$$N(p)e + M(p)f(e, pe) = N(p)u \quad (4.249)$$

kde  $p$  je operátor derivace  $p = \frac{d}{dt}$ . Řešení této rovnice budeme hledat ve tvaru

$$e = e_0 + e^* \quad e^* = A \sin \omega t \quad (4.250)$$

Podle dříve uvedených předpokladů můžeme výstup z nelinearity zapsat ve formě prvních tří členů Fourierovy řady

$$y = f(e, \dot{e}) \doteq y_0 + a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t \quad (4.251)$$

Veličiny  $y_0, a_1, b_1$  jsou v tomto případě obecně funkce proměnných  $e_0, A, \omega$ . Koeficienty Fourierovy řady pro základní nelinearity jsou uvedeny v tab. 4.3. Pro předpokládané řešení a jeho blízké okolí můžeme rovnici (4.251) vyjádřit jako

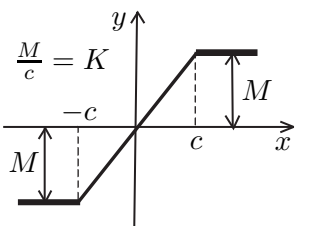
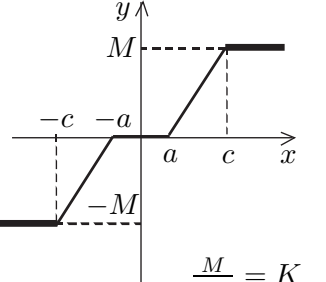
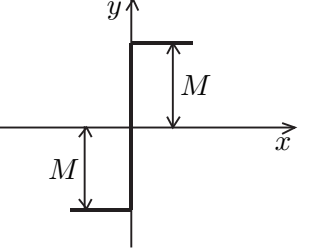
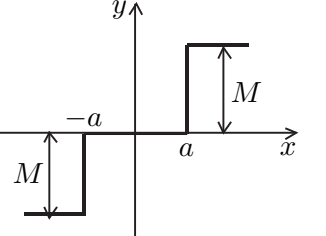
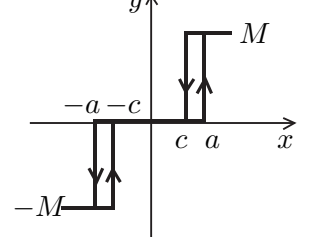
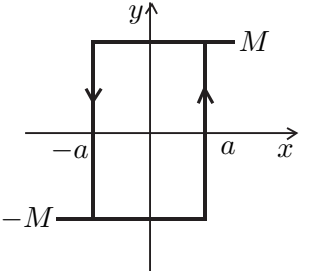
$$y = y_0 + \frac{a_1}{A}e^* + \frac{b_1}{A\omega}pe^* \quad (4.252)$$

Dosazením do (4.249) dostaneme

$$N(p)(e_0 + e^*) + M(p) \left( y_0 + \frac{a_1}{A}e^* + \frac{b_1}{A\omega}pe^* \right) = N(p)u \quad (4.253)$$

což představuje linearizaci rovnice (4.249) v okolí předpokládaného mezního cyklu. Rovnici (4.253) můžeme zjednodušit, pokud uvažujeme následující případy

a)  $u = konst$  a statický systém  $\Rightarrow N(p)u = N(0)u$

obr.	Nelinearita	Složky ekvivalentního přenosu
a		$\left. \begin{aligned} b_0 &= \frac{KA}{2} \left[ f\left(\frac{c+e_0}{A}\right) - f\left(\frac{c-e_0}{A}\right) \right] \\ a_1 &= \frac{KA}{2} \left[ f\left(\frac{c+e_0}{A}\right) + f\left(\frac{c-e_0}{A}\right) \right] \\ b_1 &= 0 \end{aligned} \right\}  e_0  + A > c$
b		$\left. \begin{aligned} b_0 &= \frac{KA}{2} \left[ f\left(\frac{c+e_0}{A}\right) - f\left(\frac{c-e_0}{A}\right) - f\left(\frac{a+e_0}{A}\right) + f\left(\frac{a-e_0}{A}\right) \right] \\ a_1 &= \frac{KA}{2} \left[ f\left(\frac{c+e_0}{A}\right) + f\left(\frac{c-e_0}{A}\right) - f\left(\frac{a+e_0}{A}\right) - f\left(\frac{a-e_0}{A}\right) \right] \\ b_1 &= 0 \end{aligned} \right\}  e_0  + A > c$
c		$\left. \begin{aligned} b_0 &= 2Mg\left(\frac{e_0}{A}\right) \\ a_1 &= \frac{4M}{\pi} D\left(\frac{e_0}{A}\right) \\ b_1 &= 0 \end{aligned} \right\} A >  e_0 $
d		$\left. \begin{aligned} b_0 &= M \left[ g\left(\frac{a+e_0}{A}\right) - g\left(\frac{a-e_0}{A}\right) \right] \\ a_1 &= \frac{2M}{\pi} \left[ D\left(\frac{a+e_0}{A}\right) + D\left(\frac{a-e_0}{A}\right) \right] \\ b_1 &= 0 \end{aligned} \right\} A -  e_0  > a$
e		$\left. \begin{aligned} b_0 &= \frac{M}{2} \left[ g\left(\frac{c+e_0}{A}\right) - g\left(\frac{c-e_0}{A}\right) + g\left(\frac{a+e_0}{A}\right) - g\left(\frac{a-e_0}{A}\right) \right] \\ a_1 &= \frac{M}{\pi} \left[ D\left(\frac{c+e_0}{A}\right) + D\left(\frac{c-e_0}{A}\right) + D\left(\frac{a+e_0}{A}\right) + D\left(\frac{a-e_0}{A}\right) \right] \\ b_1 &= -\frac{2M}{A\pi}(a-c) \end{aligned} \right\} A -  e_0  > a$
f		$\left. \begin{aligned} b_0 &= \frac{M}{2} \left[ g\left(\frac{-a+e_0}{A}\right) + g\left(\frac{a+e_0}{A}\right) \right] \\ a_1 &= \frac{2M}{\pi} \left[ D\left(\frac{-a+e_0}{A}\right) + D\left(\frac{a+e_0}{A}\right) \right] \\ b_1 &= -\frac{4Ma}{\pi A} \end{aligned} \right\} A -  e_0  > a$

**Tabulka 4.3:** Složky ekvivalentních přenosů typických nelinearit při nesymetrickém vstupním signálu  $e = e_0 + A \sin \omega t$

$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x < -1 \\ \frac{1}{\pi} \arcsin x &  x  \leq 1 \\ \frac{1}{2} & x > 1 \end{cases}$
$f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ \frac{2}{\pi} (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) &  x  \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$
$D(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} &  x  \leq 1 \\ 0 &  x  > 1 \end{cases}$

**Tabulka 4.4:** Význam funkcí v tabulce 4.3

b)  $u = konst$  a astatický systém  $\Rightarrow N(p)u = 0$

c)  $u = kt$  a astatický systém 1. řádu  $\Rightarrow N(p)u = k \lim_{p \rightarrow 0} \frac{N(p)}{p}$

d)  $u = kt$  a astatický systém 2. řádu  $\Rightarrow N(p)u = 0$

V každém případě tedy můžeme psát pravou stranu rovnice (4.253) ve tvaru  $N(p)u = konst = N_0$  a tedy

$$N(p)(e_0 + e^*) + M(p) \left( y_0 + \frac{a_1}{A} e^* + \frac{b_1}{A\omega} p e^* \right) = N_0 \quad (4.254)$$

Tato rovnice bude splněna pro

$$N(0)e_0 + M(0)y_0 = N_0 \quad (4.255)$$

$$N(p)e^* + M(p) \left( \frac{a_1}{A} e^* + \frac{b_1}{A\omega} p e^* \right) = 0 \quad (4.256)$$

Rovnice (4.255) se nazývá podmínka stejnosměrné rovnováhy, rovnice (4.256) se nazývá podmínka střídavé rovnováhy. Dosadíme-li do rovnice (4.256)  $p = j\omega$ , dostaneme

$$N(j\omega) + M(j\omega) \frac{a_1 + jb_1}{A} = 0 \quad (4.257)$$

Označíme-li

$$\frac{a_1 + jb_1}{A} = N_e(e_0, A, \omega) \quad (4.258)$$

můžeme zapsat podmínku střídavé rovnováhy ve tvaru

$$\frac{M(j\omega)}{N(j\omega)} = -\frac{1}{N_e(e_0, A, \omega)} \quad (4.259)$$



Tato podmínka je podobná jako (4.240), a proto se někdy také  $N_e(e_0, A, \omega)$  nazývá ekvivalentní přenos, i když tento termín není v daném případě nejvýstižnější.

Vyšetřování existence periodického řešení - mezních cyklů - můžeme provádět následujícím způsobem. Podmínka střídavé rovnováhy (4.259) je rovnice v oboru komplexní proměnné a může být převedena na dvě rovnice v oboru reálné proměnné

$$\begin{aligned} X(e_0, A, \omega) &= 0 \\ Y(e_0, A, \omega) &= 0 \end{aligned} \tag{4.260}$$

Z této soustavy rovnic můžeme vyšetřit závislost parametrů mezního cyklu  $A, \omega$  na  $e_0$ . Ze závislosti  $y_0 = y_0(e_0, A, \omega)$  a znalosti  $A(e_0), \omega(e_0)$  získáme funkci  $y_0 = \phi(e_0)$ . Dosazením této funkce do rovnice stejnosměrné rovnováhy dostaneme rovnici o jedné neznámé

$$N(0)e_0 + M(0)\phi(e_0) = N_0 \tag{4.261}$$

ze které můžeme určit hodnotu  $e_0$  a pak i  $A(e_0), \omega(e_0)$ . Řešení úlohy je podstatně komplikovanější, než příklady z minulé kapitoly. Postup si ukážeme na následujících příkladech.

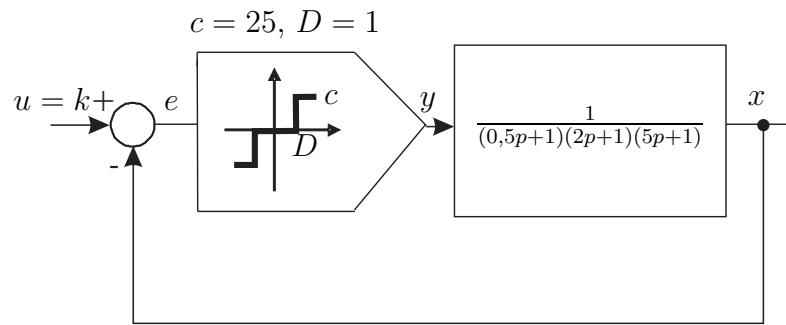
**Příklad 4.35** Mějme systém s konfigurací podle obr. 4.41, u kterého  $u = \text{konst}$ . Nelineární část obvodu je některá z nelinearit z tabulky 4.2. Lineární část obvodu nechť je s astaticem 1. řádu s charakterem dolnofrekvenční propusti. Je třeba zjistit, zda se bude lišit chování systému pro  $u = \text{konst} \neq 0$  od chování neřízeného systému při  $u = 0$  pokud jde o mezní cykly.

Protože jde o astatický systém, platí pro charakteristický polynom lineární části  $N(0) = 0$ . Rovnice stejnosměrné rovnováhy (4.255) má tvar

$$M(0)y_0 = 0 \tag{4.262}$$

Vzhledem k tomu, že  $M(0) \neq 0$ , je zřejmé, že  $y_0 = 0$ . Vzhledem k tomu, že všechny nelinearity z 4.2 produkují nulovou stejnosměrnou složku pouze při symetrickém vstupu  $e = A \sin \omega t$ , musí být i  $e_0 = 0$ . Ekvivalentní přenos v rovnici střídavé rovnováhy (4.259) bude tedy určen za předpokladu  $e_0 = 0$ . Podmínka střídavé rovnováhy bude tedy shodná s případem  $u = 0$ . Chování řízeného a neřízeného systému bude v uvažovaném případě, pokud jde o mezní cykly, shodné.

**Příklad 4.36** Mějme regulační obvod podle obr. 4.47. Úkolem je provést analýzu jeho chování z hlediska mezních cyklů při  $u = \text{konst}$ . Vzhledem k typu nelinearity mohou v obvodu nastat kmity, při kterých signál  $y$  nabývá jak kladných, tak záporných hodnot (typ 1), nebo kmity, při kterých signál  $y$  nabývá pouze nezáporných nebo nekladných hodnot (typ 2). Pro kmity typu 1 platí pro složku  $y_0, a_1, b_1$  vztah (4.251). Složky  $y_0, a_1, b_1$  určíme rozkladem výstupu nelinearity do Fourierovy řady při vstupním signálu  $e = e_0 + A \sin \omega t$ , nebo s využitím tabulek ekvivalentních přenosů.



Obrázek 4.47: Regulační obvod s reléovým regulátorem

Pro kmity typu 1 platí podle řádku d tabulky 4.3

$$\frac{D a_1}{c A} = \frac{2}{\pi b} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{1+a}{b}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{1-a}{b}\right)^2} \right\} \quad (4.263)$$

$$b_1 = 0$$

$$\frac{y_0}{c} = \frac{1}{\pi} \left( \arcsin \frac{1+a}{b} - \arcsin \frac{1-a}{b} \right)$$

kde

$$a = \frac{e_0}{D}, \quad b = \frac{A}{D}, \quad b > |a| + 1 \quad (4.264)$$

Pro kmity typu 2 platí

$$\frac{D a_1}{c A} = \frac{2}{\pi b} \sqrt{1 - \left(\frac{1-|a|}{b}\right)^2} \quad (4.265)$$

$$b_1 = 0$$

$$\frac{y_0}{c} = \frac{1}{2\pi} \left( \pi - 2 \arcsin \frac{1-|a|}{b} \right) \text{sign } a$$

kde

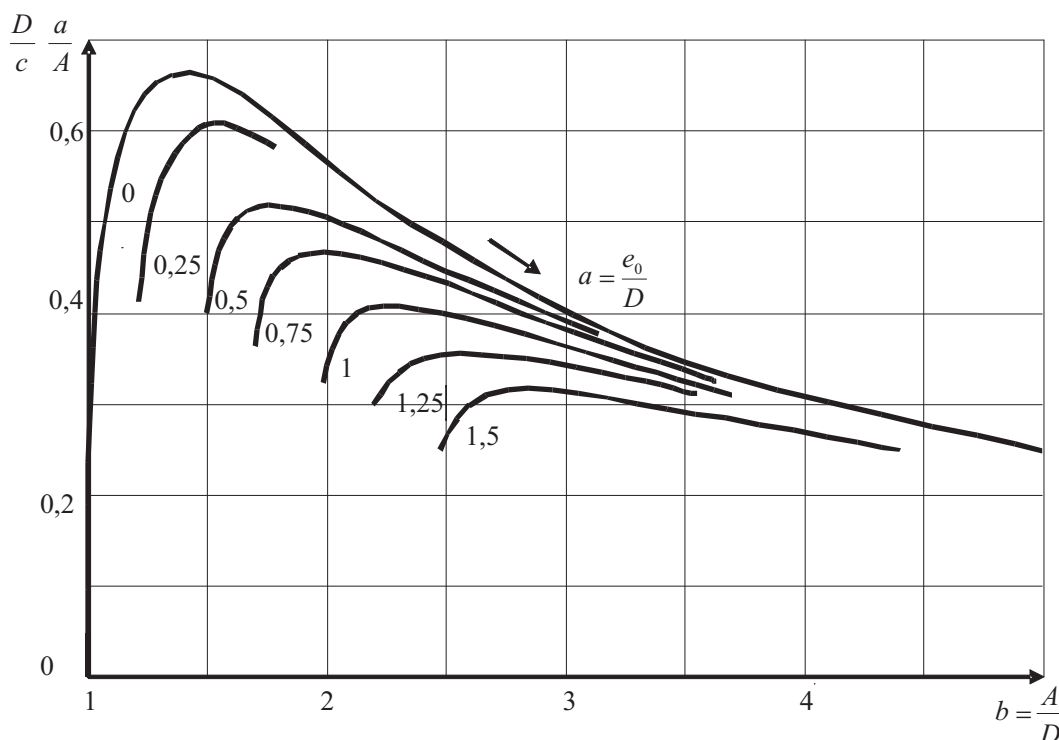
$$a = \frac{e_0}{D}, \quad b = \frac{A}{D}, \quad ||a| - 1| < b < |a| + 1 \quad (4.266)$$

Uvažujme nejdříve kmity typu 1. Rovnici střídavé rovnováhy (4.257) dostaneme ve tvaru

$$(0,5j\omega + 1)(2j\omega + 1)(5j\omega + 1) + \frac{a_1}{A} = 0 \quad (4.267)$$

Po rozkladu na reálnou a imaginární část dostaneme řešení  $\omega = 1,22 \text{ s}^{-1}$  a  $\frac{a_1}{A} = 19$ . Pokud tedy v obvodu vznikne mezní cyklus, jeho perioda bude  $T = \frac{2\pi}{\omega} \doteq 5 \text{ s}$ . Na obr. 4.49 je zobrazena závislost (4.263). Z podmínky střídavé rovnováhy zjistíme, že musí platit

$$\frac{D a_1}{c A} = \frac{1}{25} 19 = 0,76 \quad (4.268)$$



**Obrázek 4.48:** Závislost amplitudy první harmonické na parametrech nesymetrického vstupního signálu při kmitěch 1. typu z příkladu 4.36

Z obr. 4.48 je zřejmé, že tento požadavek nelze splnit žádnou kombinací hodnot  $a, b$  resp.  $e_0, A$ . V obvodu tedy nemohou vzniknout kmitů typu 1.

Na obr. 4.49 je zobrazena závislost amplitudy kmitů na parametrech kmitů 2. typu. Pro požadovanou hodnotu  $\frac{D}{c} \frac{a}{A} = \frac{1}{25} 19 = 0,76$  můžeme z tohoto grafu zjistit závislost  $b(a)$  a tím i  $y_0(a)$ , kterou pak zakreslíme do grafu stejnosměrné složky (na obr. 4.50 čárkovaná křivka). Kmitů obvodu mohou mít jen takové parametry, které odpovídají průsečíkům čárkované křivky s ostatními křivkami grafu na obr. 4.50. To, zda kmitů vzniknou, závisí ještě na podmínce stejnosměrné rovnováhy, která je v našem případě

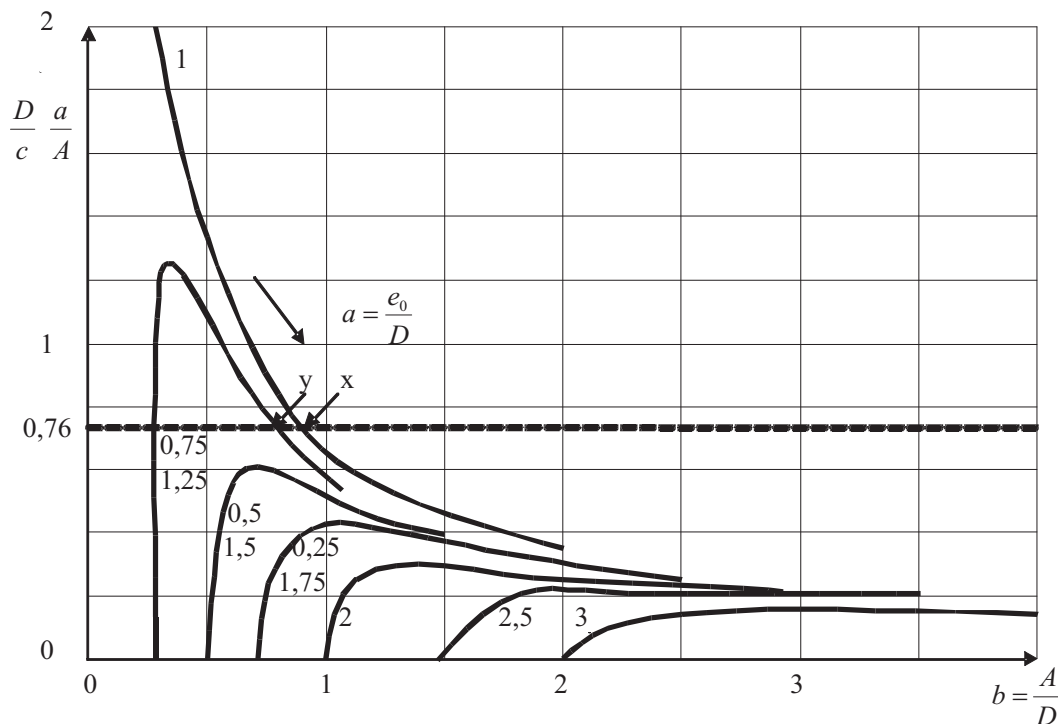
$$e_0 + y_0 = u \quad (4.269)$$

Tuto podmínku vyneseme do grafu obr. 4.50 jako přímku

$$\frac{y_0}{c} = \frac{u}{c} - \frac{D}{c} a = 0,04u - 0,04a \quad (4.270)$$

Mezní cyklus může vzniknout, pokud tato přímka protne čárkovanou křivku.

Z uvedeného rozboru plynou následující závěry. Pro malé hodnoty vstupního signálu nedojde ke stabilním oscilacím systému. Od určité hodnoty vstupního signálu bude systém kmitat s kmitů typu 2. S růstem vstupního signálu se bude stejnosměrná složka oscilací  $e_0$  ze začátku zvětšovat přibližně na hodnotu  $e_0 \doteq 1,5$ . S růstem vstupního signálu kmitů zaniknou při  $u = 26$ . Pro vyšší hodnoty  $u$  nebude už systém regulovat.



**Obrázek 4.49:** Závislost amplitudy první harmonické na parametrech nesymetrického vstupního signálu při kmitech 2. typu z příkladu 4.36

#### 4.4.5 Určení frekvenční charakteristiky

Má-li obvod konfiguraci podle obr. 4.41, splňuje-li všechny předpoklady pro použití metody harmonické rovnováhy a navíc pro nelineární část platí pouze  $y = f(e)$  (tedy nelinearita je určena funkcí - systém bez paměti), můžeme s pomocí ekvivalentního přenosu zjistit amplitudovou frekvenční charakteristiku uzavřené smyčky při  $u = U \sin \omega t$ .

Předpokládejme, že se obvodem šíří pouze základní harmonický signál s úhlovou frekvencí  $\omega$ , pak můžeme psát

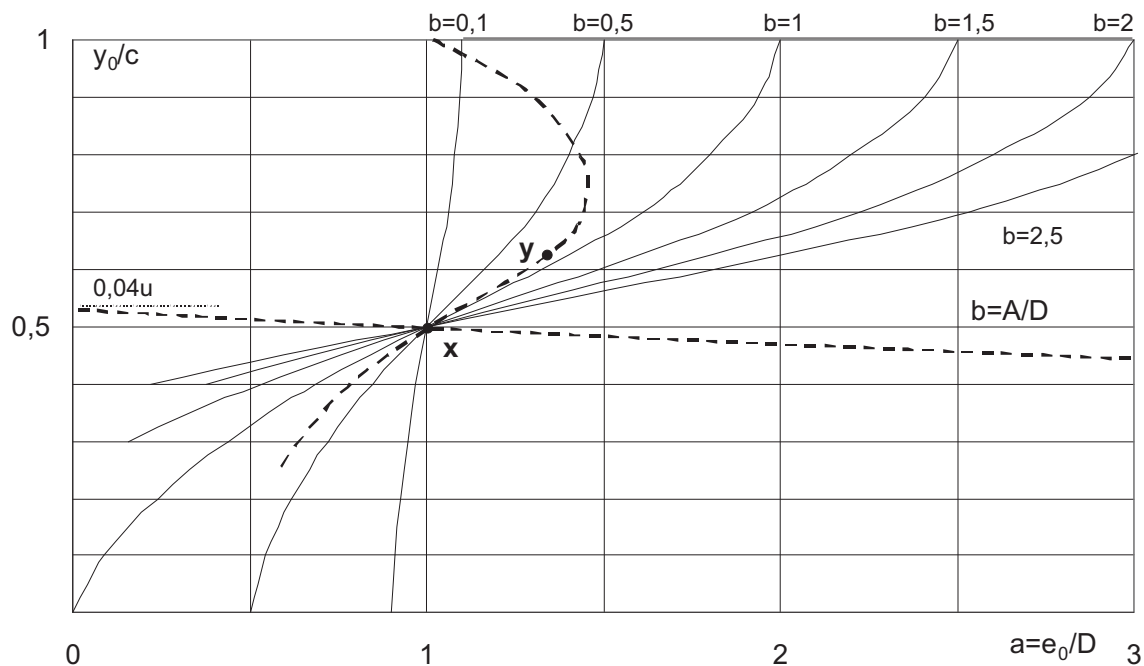
$$\frac{E}{U} = \frac{1}{|1 + N_e(E)G(j\omega)|} \quad (4.271)$$

Kde  $E$  a  $U$  jsou amplitudy odchylkového a vstupního harmonického signálu. V rovnici můžeme volit  $\omega$  a pro známé  $U$  vyšetřit  $E(\omega)$ . Amplitudu  $X$  výstupního signálu získáme pro danou hodnotu  $E$  a  $\omega$  z rovnice

$$X = N_e(E)G(j\omega)E(\omega) \quad (4.272)$$

Při výpočtu frekvenční charakteristiky je však třeba si uvědomit, že platí pouze pro konkrétní hodnotu amplitudy vstupního signálu.

**Příklad 4.37** Na obr. 4.51 je nakreslen nelineární systém. Je třeba určit jeho charakteristiku  $G(\omega)$  pro  $U = 5$ .



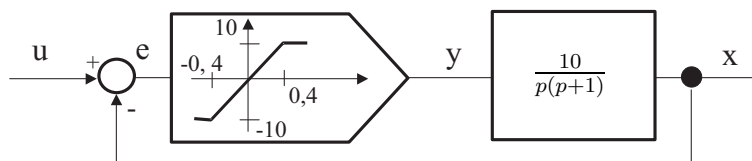
**Obrázek 4.50:** Závislost stejnosměrné složky na parametrech nesymetrických kmitů z příkladu 4.36

Vztah (4.271) můžeme po úpravách zapsat ve tvaru

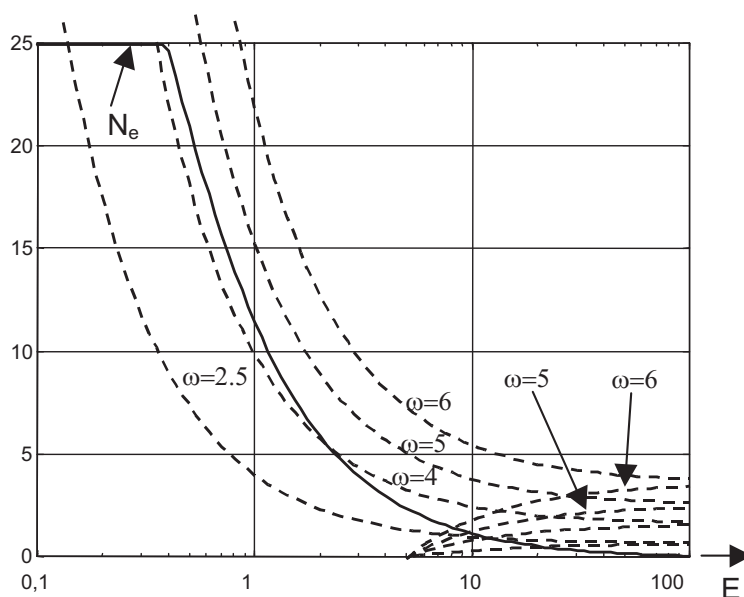
$$N_e(E) = \frac{\omega^2}{10} \pm \frac{\omega}{10E} \sqrt{(1 + \omega^2)U^2 - 1} \quad (4.273)$$

Jak pravou tak levou stranu rovnice můžeme vynést do grafu, obr. 4.52, pro  $U = 5$ . Řešení najdeme v průsečíku křivky ekvivalentního přenosu a pravé strany. Tak např. pro  $\omega = 4$  dostáváme 4 řešení této rovnice (ale pouze 2 z nich jsou stabilní). Dalším výpočtem podle vztahu (4.272) získáme frekvenční charakteristiku  $X(\omega)$ , jak je zobrazena na obr. 4.53. Na frekvenční charakteristice se objevuje tzv. skoková rezonance. Frekvenční charakteristika vykazuje hysteretzní část. Při snižování frekvence dojde ke skokovému poklesu amplitudy výstupního signálu.

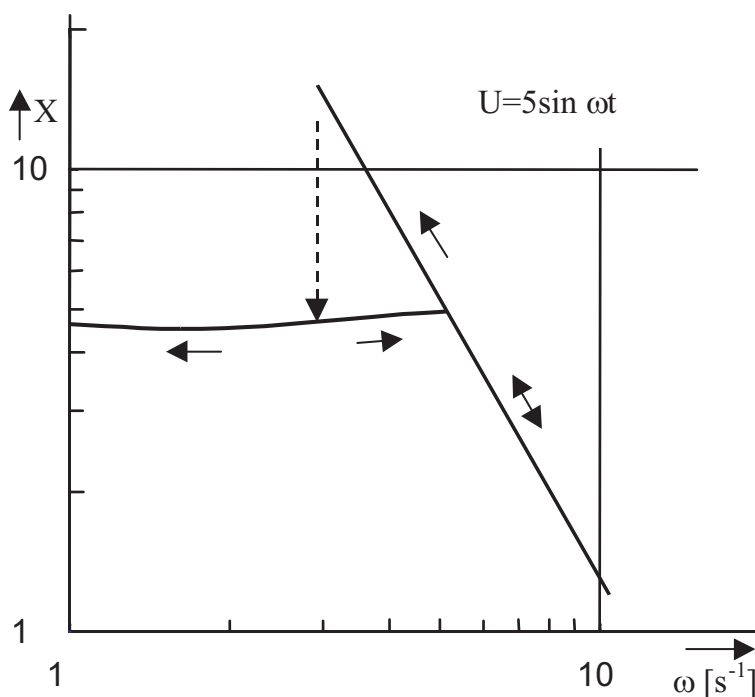
Uváděná metoda však často nevede k prakticky použitelným výsledkům. Přesnější výsledky dává při analytickém vyšetřování harmonicky řízených nelineárních systémů metoda, která používá ekvivalentní přenos definovaný pro vstupní signál do nelinearity ve formě součtu dvou harmonických signálů, tzv. Dual Input Describing Function.



**Obrázek 4.51:** Nelineární regulační obvod



Obrázek 4.52: Grafické řešení příkladu 4.37



Obrázek 4.53: Frekvenční charakteristika systému z příkladu 4.37

Řízené nelineární systémy mají obecně velmi složité chování, které se analyticky obtížně vyšetřuje. V tomto směru působí dosti depresivně fakt, že i tak jednoduchý systém jako je na obr. 4.51 může při harmonickém řízení vykazovat kromě skokové rezonance další nepříjemné chování. Za určitých podmínek může totiž při řízení periodickým signálem

s frekvencí 6 Hz vykazovat periodický výstup s frekvencí 2 Hz, tzv. subharmonickou odezvu. Těmito komplikovanými případy se nebudeme dále zabývat, přičemž jsou popsány v dostupné odborné literatuře.

#### 4.4.6 *Shrnutí kapitoly 4.4*

V řadě případů lze regulační obvod rozdělit na nelineární část a lineární část s charakterem dolní propusti. Můžeme pak předpokládat, že v případě ustálených kmitů se obvodem šíří jen první harmonická frekvence. Nelineární systém můžeme nahradit systémem lineárním, který způsobuje stejné zesílení a fázový posun první harmonické jako původní nelinearita. Tento ekvivalentní přenos zjistíme pomocí rozkladu výstupu nelinearity do Fourierovy řady za podmínky, že na vstupu nelinearity působí harmonický signál. Ekvivalentní přenos je obecně závislý na amplitudě, frekvenci a stejnosměrné složce signálu vstupujícího do nelinearity. Řešení většinou provádíme graficky, přičemž stabilitu mezního cyklu lze vyšetřit modifikovaným Nyquistovým kritériem.

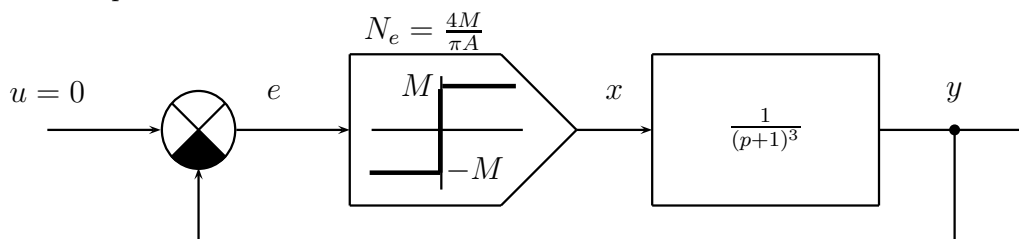
#### 4.4.7 *Kontrolní otázky pro kapitolu 4.4*

1. Jaké jsou podmínky použití metody harmonické linearizace?
2. Jak určíme ekvivalentní přenos nelineární části obvodu?
3. Na jakých veličinách závisí ekvivalentní přenos?
4. Jak určíme stabilitu mezního cyklu?

Správné odpovědi jsou uvedeny v dodatku A.

#### 4.4.8 *Řešené příklady pro kapitolu 4.4*

**Příklad 4.38** Pro systém zakreslený na blokovém schématu obr. 4.54 určete, zda v obvodu vzniknou periodické kmity (mezní cyklus). Pokud mezní cyklus vznikne, určete jeho amplitudu a periodu kmitů.



**Obrázek 4.54:** Blokové schéma systému z příkladu 4.38

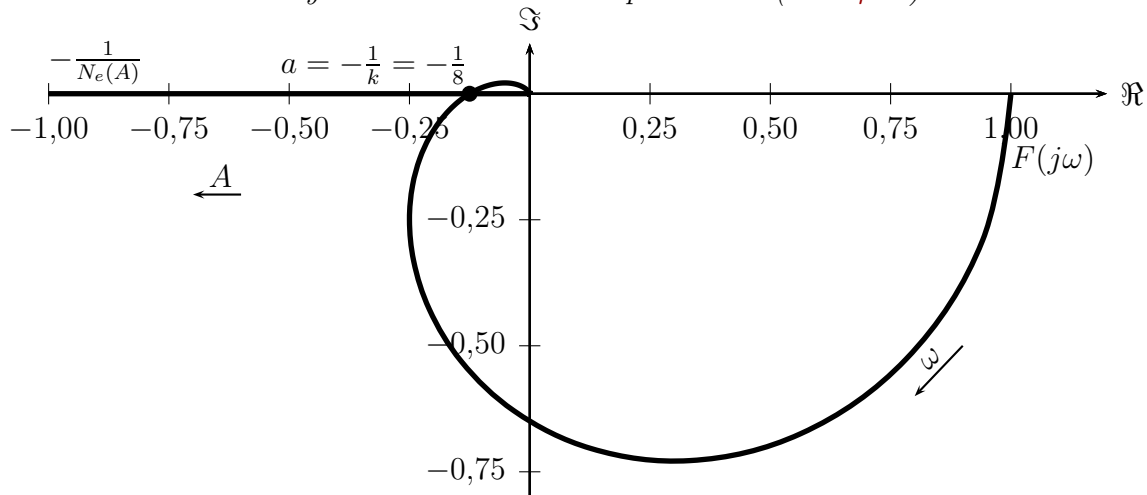
Vzhledem k tomu, že lineární část obvodu má charakter dolní propusti, můžeme použít pro vyšetření mezního cyklu metodu harmonické rovnováhy. Podmínkou vzniku oscilací je splnění rovnosti

$$F(j\omega) = -\frac{1}{N_e(A, \omega)} \quad (4.274)$$

Lineární část obvodu má přenos  $F(p) = \frac{1}{(p+1)^3}$ . Frekvenční přenos tedy je

$$F(j\omega) = \frac{1}{-3\omega^2 + 1 - j(\omega^3 - 3\omega)} = \frac{-3\omega^2 + 1 + j(\omega^3 - 3\omega)}{(-3\omega^2 + 1)^2 + (\omega^3 - 3\omega)^2} \quad (4.275)$$

Ekvivalentní přenos ideálního relé je  $N_e(A) = \frac{4M}{\pi A}$ , kde  $A$  je amplituda první harmonické složky šířící se obvodem. Je zřejmé, že v našem případě je tedy hledaným řešením průsečík frekvenční charakteristiky s reálnou osou v levé polorovině (obr. 4.55).



Obrázek 4.55: Grafické řešení příkladu 4.38

Tento průsečík snadno určíme řešením

$$\begin{aligned} \Im F(j\omega) &= 0 \\ \omega^3 - 3\omega &= \omega(\omega^2 - 3) = 0 \end{aligned} \quad (4.276)$$

Řešením je  $\omega_1 = 0; \omega_2 = -\sqrt{3}; \omega_3 = \sqrt{3}$ . Uvažovat můžeme jen  $\omega_3$ , protože pouze toto řešení odpovídá průsečíku v levé polorovině při kladné frekvenci (záporná frekvence kmitů nemá z fyzikálního hlediska smysl). Polohu průsečíku určíme z

$$a = \Re F(j\omega_3) = \frac{-3\omega_3^2 + 1}{(-3\omega_3^2 + 1)^2 + (\omega_3^3 - 3\omega_3)^2} = \frac{-9 + 1}{(-9 + 1)^2} = -\frac{1}{8} \quad (4.277)$$

V obvodu tedy vzniknou periodické kmity s amplitudou

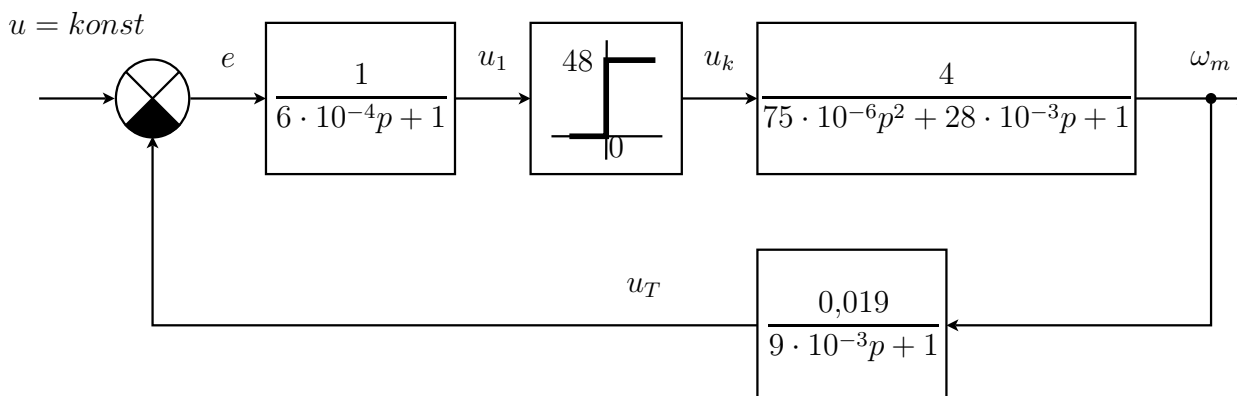
$$-\frac{\pi A}{4M} = a = -\frac{1}{8} \quad (4.278)$$

$$A = \frac{M}{2\pi} \quad (4.279)$$

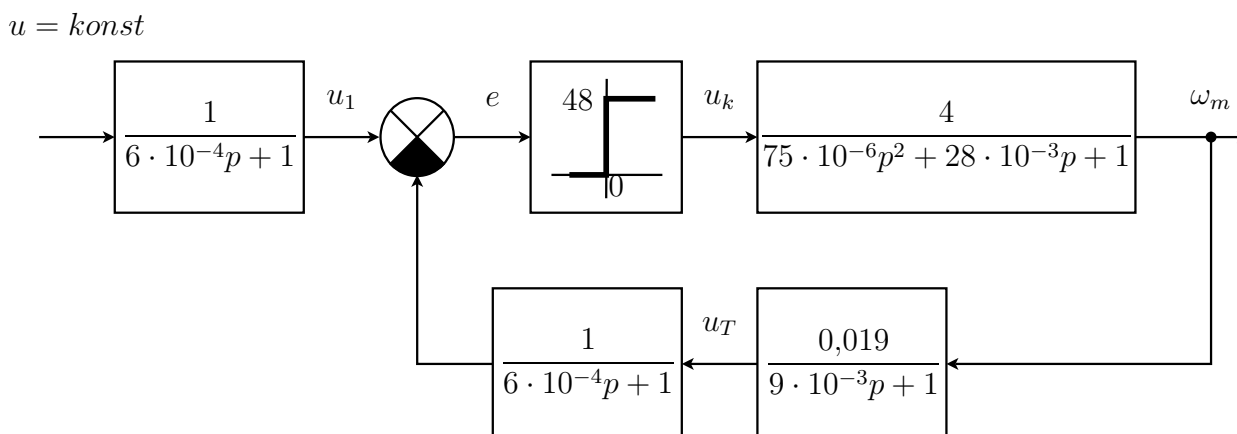
a periodou

$$T = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad (4.280)$$





Obrázek 4.56: Blokové schéma systému z příkladu 4.39



Obrázek 4.57: Modifikované blokové schéma systému z příkladu 4.39

Při pozorné interpretaci získaných výsledků si můžeme všimnout, že sledovaný průsečík představuje bod na frekvenční charakteristice odpovídá stavu, kdy je regulační obvod přiveden na mez stability. Zjištěná frekvence mezního cyklu pak odpovídá frekvenci kmitů regulačního obvodu na mezi stability a ekvivalentní zesílení relé  $N_e(A) = \frac{4M}{\pi A}$  je rovno kritickému zesílení. Pomocí reléové zpětné vazby tedy dokážeme získat údaje potřebné k návrhu regulátoru metodou Ziegler–Nichols. Velkou výhodou ve srovnání se základní metodou, která je založena na zvyšování zesílení vedoucí k dosažení meze stability, je fakt, že můžeme omezit amplitudu kmitů na přijatelnou velikost vhodnou volbou výstupní úrovně relé.

**Příklad 4.39** Uvažujme regulační obvod pro řízení otáček s reléovým regulátorem, jehož blokové schéma je zakresleno na obr. 4.56. Regulační obvod sestává ze stejnosměrného motoru s cizím buzením, tachodynamu s filtrem a reléového regulátoru. Chceme provést analýzu chování systému a ověřit, zda v obvodu vzniknou ustálené kmity. Budeme uvažovat, že hodnota vstupního signálu  $u$  je konstantní. Je zřejmé, že regulace může probíhat jen

pro  $u \in \langle 0; 3,648 \rangle$  pro menší hodnoty  $u$  dojde k zastavení motoru, pro  $u > 3,648$  dosáhne motor maximálních otáček  $\omega_{m_{max}} = 48 \cdot 4 = 192 \text{ rad/s}$ .

K analýze chování použijeme metodu harmonické rovnováhy. Blokové schema lze upravit do tvaru obr. 4.57, který odpovídá požadavkům metody harmonické rovnováhy. Pro nelinearitu, která se nachází v obvodu, nejsou v tabulce 4.3 uvedeny jednotlivé harmonické složky výstupního signálu. Musíme proto nejdříve tyto složky odvodit.

Předpokládejme, že na vstupu nelinearity působí signál

$$e = e_0 + A \sin \omega t \quad (4.281)$$

V případě, že  $|e_0| > A$ , nebude veličina  $e$  vůbec měnit znaménko a relé bude trvale v jednom z možných stavů. V tomto případě lehce zjistíme, že platí

$$b_0 = \begin{cases} 0 & \frac{e_0}{A} < -1 \\ 48 & \frac{e_0}{A} > 1 \end{cases} \quad (4.282)$$

$$a_1 = 0 \quad (4.283)$$

$$b_1 = 0 \quad (4.284)$$

Pokud bude platit  $|e_0| \leq A$ , dostaneme na výstupu z nelinearity signál, jehož průběh je zobrazen na obr. 4.58. Pro časový úsek  $t_1$  platí

$$t_1 = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{e_0}{A} \quad (4.285)$$

Střední hodnota signálu na výstupu z nelinearity pak je

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u_K(t) dt = \frac{1}{T} \left( 48 \frac{T}{2} + 48 \cdot 2t_1 \right) = 24 + \frac{48}{\pi} \arcsin \frac{e_0}{A} \quad (4.286)$$

Pro sinusovou složku první harmonické frekvence  $a_1$  dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T u_K(t) \sin \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{2 \cdot 48}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi t}{T} dt + 2 \frac{2 \cdot 48}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+t_1} \sin \frac{2\pi t}{T} dt = \\ &= \frac{2 \cdot 48}{T} \frac{T}{2\pi} \left[ -\cos \frac{2\pi t}{T} \right]_0^{\frac{T}{2}} + 2 \frac{2 \cdot 48}{T} \frac{T}{2\pi} \left[ -\cos \frac{2\pi t}{T} \right]_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+t_1} = \\ &= \frac{2 \cdot 48}{\pi} + \frac{2 \cdot 48}{\pi} \cos \frac{2\pi t_1}{T} - \frac{2 \cdot 48}{\pi} = \frac{96}{\pi} \cos \arcsin \frac{e_0}{A} = \\ &= \frac{96}{\pi} \sqrt{1 - \left( \frac{e_0}{A} \right)^2} \end{aligned} \quad (4.287)$$

Obdobným postupem snadno odvodíme, že pro kosinovou složku platí

$$b_1 = 0 \quad (4.288)$$

Lineární část upraveného blokového schématu je možné popsat operátorovým přenosem

$$G(p) = \frac{0,076}{(0,025p + 1)(0,009p + 1)(0,003p + 1)(0,0006p + 1)} \quad (4.289)$$

Pro střídavou rovnováhu musí podle vztahu (4.259) platit

$$\frac{a_1(e_0, A)}{A} G(j\omega) = -1 \quad (4.290)$$

Vzhledem k tomu, že koeficient  $a_1$  je reálné číslo, musí pro dosažení této rovnosti platit

$$\Im\{G(j\omega)\} = 0 \quad (4.291)$$

odkud dostaneme

$$\omega = 208 \text{ rad/s} \quad (4.292)$$

$$G(j\omega) = -0,0057 \quad (4.293)$$

Mezní cyklus tedy bude mít frekvenci přibližně 33Hz bez ohledu na velikost vstupního signálu. Dosazením do (4.290) obdržíme

$$\frac{96}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{e_0}{A}\right)^2} = \frac{A}{0,0057} \quad (4.294)$$

Vyřešením této rovnice odvodíme závislost mezi stejnosměrnou složkou  $e_0$  a amplitudou  $A$  při periodickém řešení

$$e_0 = \pm A \sqrt{1 - 32,93A^2} \quad (4.295)$$

Podmínka stejnosměrné rovnováhy je daná vztahem (4.255)

$$u - 0,076b_0(e_0, A) = e_0 \quad (4.296)$$

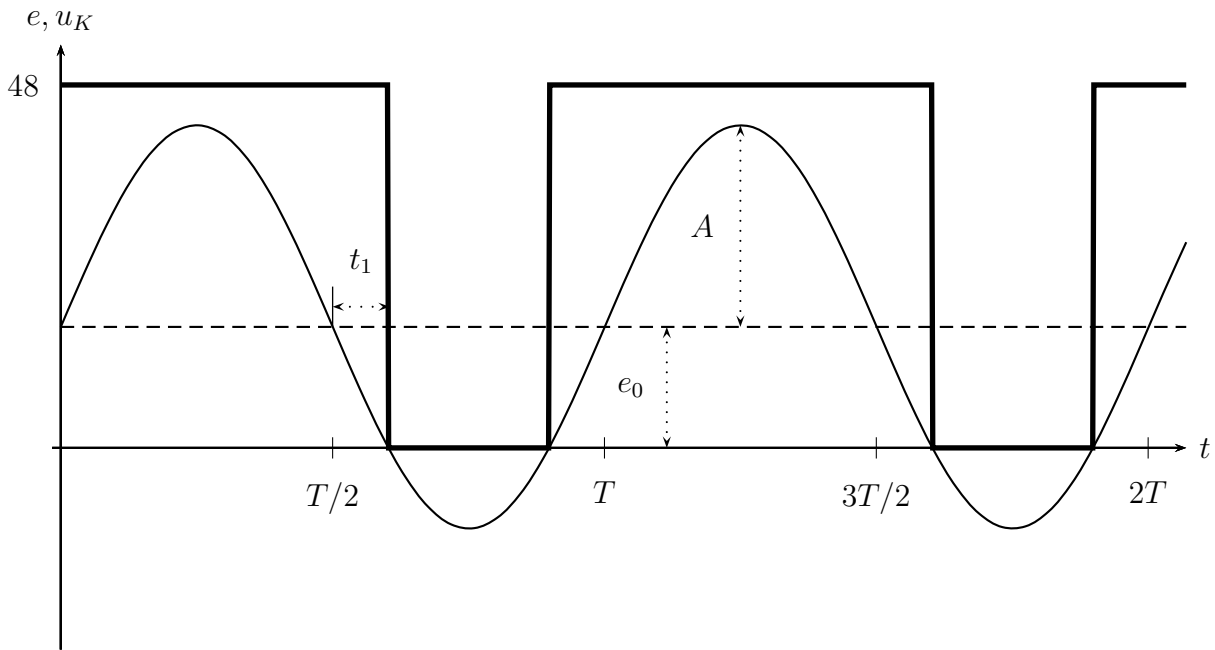
Po dosazení závislosti (4.295) dostaneme závislost mezi amplitudou kmitů  $A$  a vstupním signálem  $u$

$$u - 0,076 \cdot 24 \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\pm A \sqrt{1 - 32,93A^2}}{A} \right] = \pm A \sqrt{1 - 32,93A^2} \quad (4.297)$$

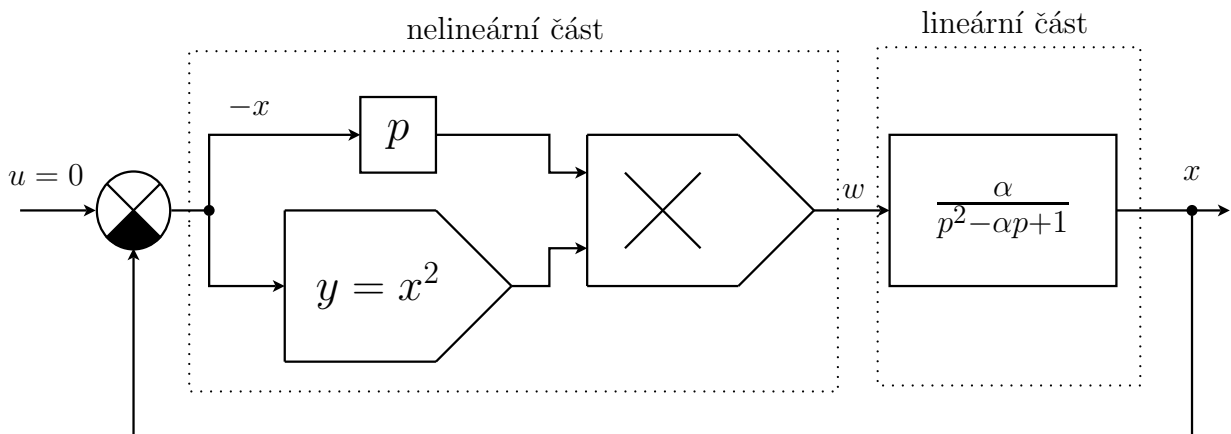
a tedy

$$u = \pm A \sqrt{1 - 32,93A^2} + 0,076 \cdot 24 \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\pm A \sqrt{1 - 32,93A^2}}{A} \right] \quad (4.298)$$

Výslednou závislost  $u = f(A)$  snadno vykreslíme do grafu a sestojíme závislost  $A = f^{-1}(u)$



Obrázek 4.58: Časový průběh výstupu z nelinearity z příkladu 4.39



Obrázek 4.59: Blokové schéma Van der Polova oscilátoru z příkladu 4.40

**Příklad 4.40** V příkladě 4.30 jsme se zabývali konstrukcí stavového portréту Van der Polova oscilátoru. Nyní se pokusíme dokázat, že trajektorie systému skutečně obsahuje mezní cyklus. Uvažovaný oscilátor je v obecném případě popsán diferenciální rovnicí

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (4.299)$$

kde  $\alpha > 0$ . Této diferenciální rovnici odpovídá blokové schéma zachycené na obr. 4.59. Vidíme, že systém můžeme rozložit na nelineární a lineární část, přičemž lineární část má charakter dolní propusti. Pro zjištění mezního cyklu lze tedy použít metodu harmonické rovnováhy.

Pokud do nelineárního bloku přivedeme harmonický signál

$$e(t) = A \sin(\omega t) \quad (4.300)$$

dostaneme na jeho výstupu

$$\begin{aligned} w(t) &= A^2 \sin^2(\omega t) A \omega \cos(\omega t) \stackrel{(C.11)}{=} = \frac{A^3 \omega}{2} [1 - \cos(2\omega t)] \cos(\omega t) \stackrel{(C.12)}{=} \\ &= \frac{A^3 \omega}{4} [\cos(\omega t) - \cos(3\omega t)] \end{aligned} \quad (4.301)$$

Je zřejmé, že výsledný signál obsahuje pouze první a třetí kosinovou harmonickou složku a tedy

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ b_0 &= 0 \\ b_1 &= \frac{A^3 \omega}{4} \end{aligned} \quad (4.302)$$

Ekvivalentní přenos nelineární části tedy je

$$N_e(A, \omega) = \frac{a_1 + j b_1}{A} = \frac{A^2 j \omega}{4} \quad (4.303)$$

Frekvenční přenos lineární části je

$$G(j\omega) = \frac{\alpha}{(j\omega)^2 - \alpha j\omega + 1} \quad (4.304)$$

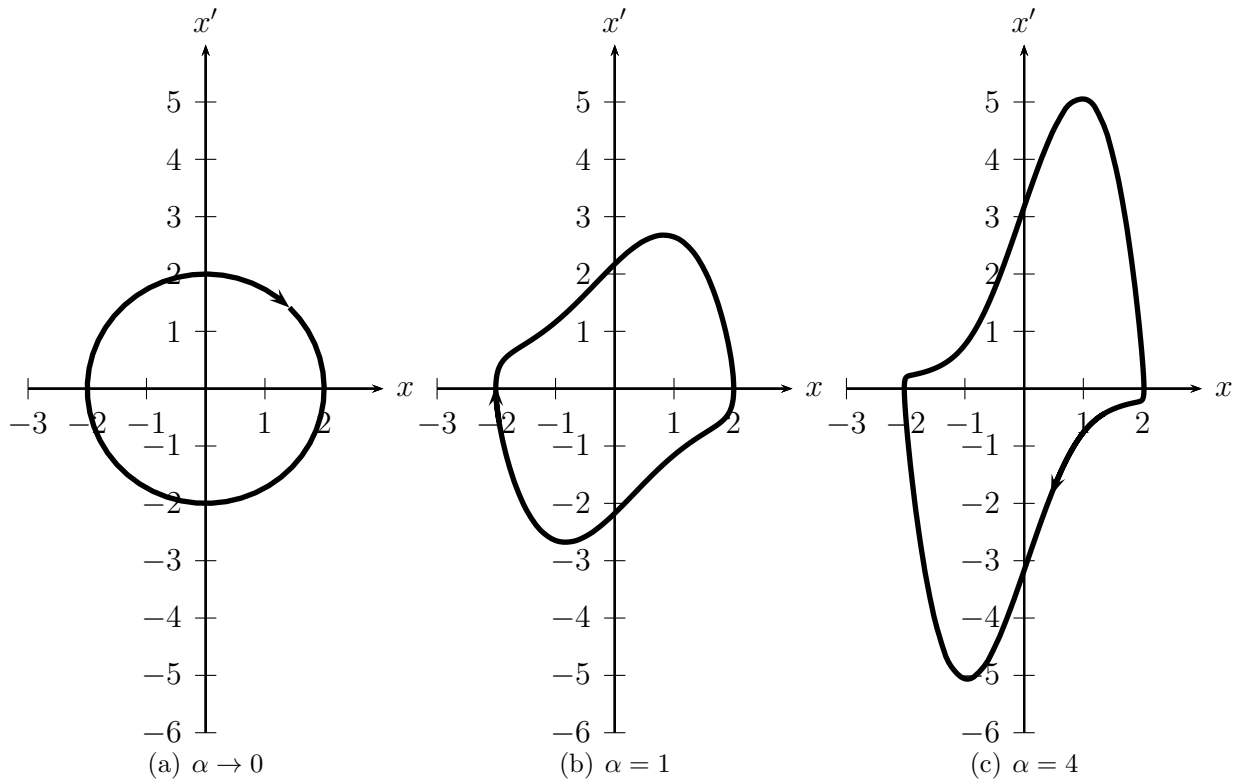
Nyní musíme vyřešit podmínku harmonické rovnováhy (4.240). Po dosazení do podmínky dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{(j\omega)^2 - \alpha j\omega + 1} &= -\frac{4}{A^2 j\omega} \\ \frac{\alpha}{-j\omega^2 + \alpha\omega + j} &= \frac{4}{A^2 \omega} \end{aligned} \quad (4.305)$$

Vzhledem k tomu, že výraz na pravé straně rovnice neobsahuje imaginární složku, je možné rovnosti dosáhnout jen pro  $\omega = 1$  a po dosazení této hodnoty do (4.305) dostáváme rovnici pro amplitudu

$$1 = \frac{4}{A^2} \quad (4.306)$$

a tedy  $A = 2$ . Tím jsme dokázali, že trajektorie uvažovaného systému obsahuje mezní cyklus s úhlovou frekvencí  $\omega = 1$  a amplitudou  $A = 2$ . Pomocí Nyquistova kritéria (obr. 4.43) lze rovněž snadno určit, že vypočtený mezní cyklus bude stabilní. Zajímavým výsledkem řešení je skutečnost, že amplituda a frekvence mezního cyklu nezávisí na parametru  $\alpha$ . Tento parametr bude ovlivňovat pouze tvar mezního cyklu, který můžeme vyšetřit např. metodou izoklin. Podoba mezního cyklu pro různé hodnoty  $\alpha$  je zachycena na obr. 4.60. Pro  $\alpha \rightarrow 0$  se přestává uplatňovat nelinearita systému a mezní cyklus se blíží kružnici.

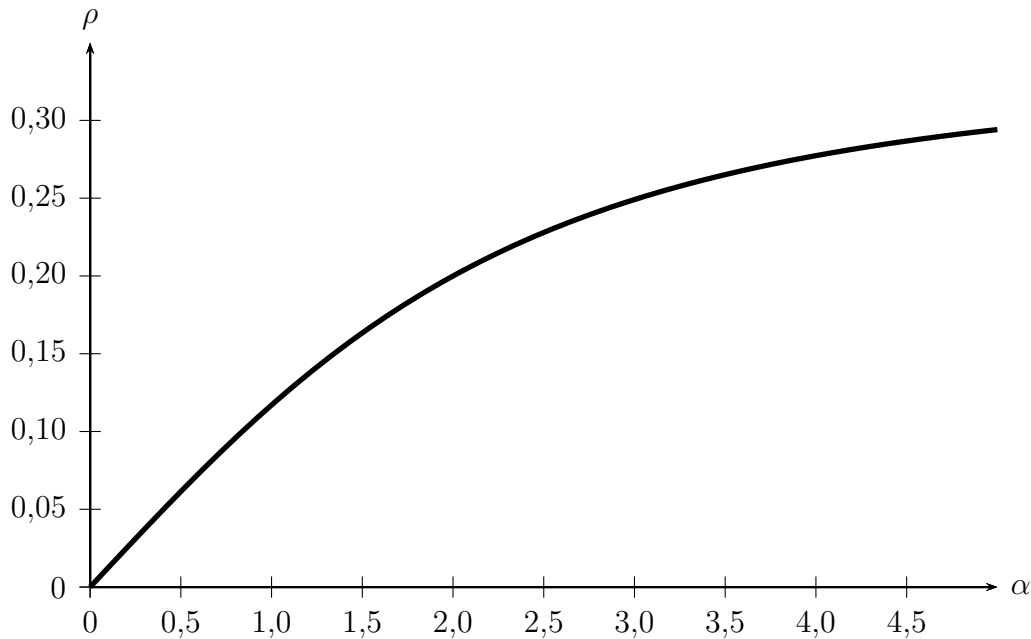


**Obrázek 4.60:** Závislost podoby mezního cykly Van der Polova oscilátoru z příkladu 4.40 na parametru  $\alpha$

Pokud provedeme simulační ověření, zjistíme, že v případě  $\alpha \rightarrow 0$  je úhlová rychlost mezního cyklu skutečně  $\omega = 1$ . S rostoucím  $\alpha$  však tato rychlost klesá a v případě  $\alpha = 3$  dosahuje jen hodnoty  $\omega = 0,7$ . Skutečné chování tedy neodpovídá našim předpokladům. Příčinu tohoto nesouladu lze pochopit na základě tvaru trajektorie. Pokud se podíváme na obr. 4.60(c) vidíme, že chování systému je silně nelineární na rozdíl od průběhů při nižších hodnotách  $\alpha$ . Ze vztahu (4.301) je patrné, že nelinearita vytváří třetí harmonickou frekvenci. Pokud má být metoda harmonické linearizace použitelná, musí lineární část tuto třetí harmonickou frekvenci účinně filtrovat. Jestliže porovnáme zesílení lineární části pro první a třetí harmonickou frekvenci při frekvenci odpovídající meznímu cyklu  $\omega = 1$ , dostaneme

$$\begin{aligned} \rho(\alpha) &= \left( \frac{|F(3j\omega)|}{|F(j\omega)|} \right)_{\omega=1} = \left( \frac{|-\omega^2 + 1 - \alpha j\omega|}{|-9\omega^2 + 1 - 3\alpha j\omega|} \right)_{\omega=1} = \frac{\alpha}{|-8 - 3j\alpha|} = \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{64 + 9\alpha^2}} \end{aligned} \quad (4.307)$$

Průběh poměru  $\rho(\alpha)$  je zakreslen na obr. 4.61. Vidíme, že pro malé hodnoty  $\alpha$  je velikost třetí harmonické zanedbatelná vůči první harmonické frekvenci. S rostoucím  $\alpha$  pak zastoupení třetí harmonické frekvence výrazně roste a při  $\alpha = 4$  je dosahuje amplituda třetí harmonické přibližně 28% amplitudy první harmonické frekvence. Obvodem se tedy nešíří zdaleka jen první harmonická a podmínky použití metody harmonické rovnováhy nejsou splněny. Tím je vysvětlen rozdíl mezi skutečnou a vypočtenou periodou mezního



**Obrázek 4.61:** Poměr zesílení první a třetí harmonické lineární částí Van der Polova oscilátoru

cyklu. Uvedený příklad demonstruje, že při použití metody harmonické rovnováhy musíme pečlivě posoudit filtrační schopnosti lineární části systému.

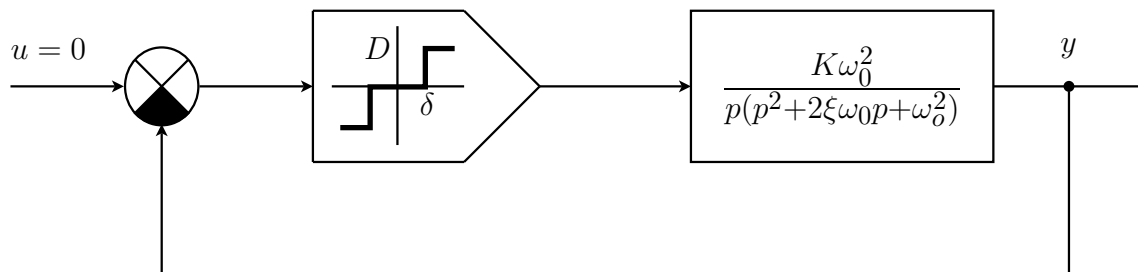
#### 4.4.9 Neřešené příklady pro kapitolu 4.4

**Příklad 4.41** Statická charakteristika nelineární pružiny je popsána závislostí

$$y = x + \frac{1}{2}x^3 \quad (4.308)$$

Vypočtete ekvivalentní přenos této nelinearity.

**Příklad 4.42** Na obr. 4.62 je zakresleno blokové schéma nelineárního dynamického systému. Rozhodněte, zda v obvodu vzniknou periodické kmity a určete jejich periodu a amplitudu.



**Obrázek 4.62:** Blokové schéma systému z příkladu 4.41

## 4.5 Stabilita nelineárních systémů

### 4.5.1 Motivace

Přesná definice stability v případě nelineárních systémů není tak jednoduchá. Snaha o rozšíření pojmu „stabilita“ na nelineární systémy, tak jak byl tento pojem chápán u lineárních systémů, nevede k rozumným závěrům. Stabilita lineárních časově invariantních systémů je určena rozložením kořenů charakteristické rovnice systému. Stabilita takového systému nezávisí na jeho počátečním stavu (počátečních podmínkách), ani na vstupních signálech. Pro nelineární systémy tato tvrzení již neplatí. To, zda reakce nelineárního systému na ohraničený vstupní signál je ohraničená nebo neohraničená, může nyní záviset na počátečním stavu systému nebo na tvaru vstupního signálu. Navíc u nelineárního systému mohou existovat ustálené kmity (limitní cykly), které v podstatě nemohou existovat u lineárních systémů. (Případ, kdy u lineárního systému existují nějaké kořeny charakteristické rovnice právě na imaginární ose, můžeme považovat za „strukturálně nestabilní“, protože téměř jistě se změnou parametrů systému, přejdou tyto kořeny do nestabilní nebo stabilní oblasti.)

Vychýlíme-li stabilní lineární systém z rovnovážné polohy a pak vzruch odstraníme, vrátí se do této původní rovnovážné polohy. Provedeme-li totéž u nelineárního systému, může se vrátit do původní rovnovážné polohy, nebo může přejít do jiné rovnovážné polohy, může začít kmitat v ustáleném mezním cyklu, nebo mohou jeho stavové proměnné neohraničeně růst. Je tedy potřeba definovat stabilitu nelineárního systému odlišně, než u lineárních systémů. Existuje celá řada definic stability nelineárních systémů. V podstatě je nelineární systém považován za stabilní, jestliže trajektorie počínající v dané oblasti  $R_1$  stavového prostoru zůstanou uvnitř nějaké oblasti  $R_2$  tohoto prostoru. Volba oblastí  $R_1$  a  $R_2$  závisí na konkrétní úloze. Z uvedeného je zřejmé, že je výhodnější nehovořit o stabilitě nelineárního systému, ale spíše o stabilitě pohybu, resp. stabilitě trajektorií. Definice stability se tedy vztahují k odchýlkám stavu od některých trajektorií.

V následující kapitole se seznámíme se základními metodami pro posouzení stability trajektorie nelineárních dynamických systémů.

### 4.5.2 Ljapunovova definice stability

Uvažujme nelineární dynamický systém popsany stavovými rovnicemi ve tvaru

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (4.309)$$

který má rovnovážný stav  $\mathbf{x}_0$ . Stav v čase  $t_0$  označíme  $\mathbf{x}_{t_0}$ . Systém (4.309) je neřízený. Tato podmínka není výrazně limitující, protože většinu řízených systémů lze převést vhodnými úpravami na systémy neřízené, jak již bylo ukázáno dříve. Neřízený systém je také nazýván jako volný.

#### **Definice 4.3 Lokální stabilita rovnovážného stavu (stabilita v malém)**

Rovnovážný stav  $\mathbf{x}_0$  volného dynamického systému (4.309) je lokálně stabilní, jestliže pro libovolné reálné číslo  $\varepsilon > 0$  a  $t_0 \in \langle \tau; \infty \rangle$  existuje takové reálné číslo  $\delta(\varepsilon, t_0)$ , že při  $\|\mathbf{x}_{t_0} - \mathbf{x}_0\| \leq \delta$  je  $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_{t_0}, t_0) - \mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon$  pro všechna  $t > t_0$ .



Lokální stabilita se týká nekonečně malého okolí rovnovážného stavu singulárního bodu. Definice v podstatě říká, že zvolíme-li si libovolně malé  $\varepsilon$  okolí rovnovážného stavu, pak vždy můžeme nalézt nějaké  $\delta$  okolí tohoto stavu, že všechny trajektorie, vycházející z tohoto  $\delta$  okolí zůstanou v časovém intervalu pozorování  $\langle \tau, \infty \rangle$  uvnitř  $\varepsilon$  okolí.

**Příklad 4.43** *Systém je popsán diferenciální rovnicí*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0 \quad (4.310)$$

Zvolíme stavové proměnné  $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$  a dostaneme stavové rovnice

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 \end{aligned} \quad (4.311)$$

Singulární bod je  $x_1 = x_2 = 0$  a trajektorie systému odpovídají obr. 4.19. Je zřejmé, že trajektorie vycházející z oblasti vymezené vzdáleností  $\delta$  od singulárního bodu zůstávají uvnitř oblasti  $\varepsilon$  pro

$$\delta(\varepsilon, t_0) \leq \varepsilon \quad (4.312)$$

Věta 4.3 je tedy splněna a singulární bod je lokálně stabilní.

**Příklad 4.44** *Systém je popsán diferenciální rovnicí*

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2a\frac{di}{dt} - \frac{b^2}{2}i + c^2i^3 = 0 \quad (4.313)$$

Zvolíme stavové proměnné  $i = x_1, \dot{i} = x_2$  a dostaneme stavové rovnice

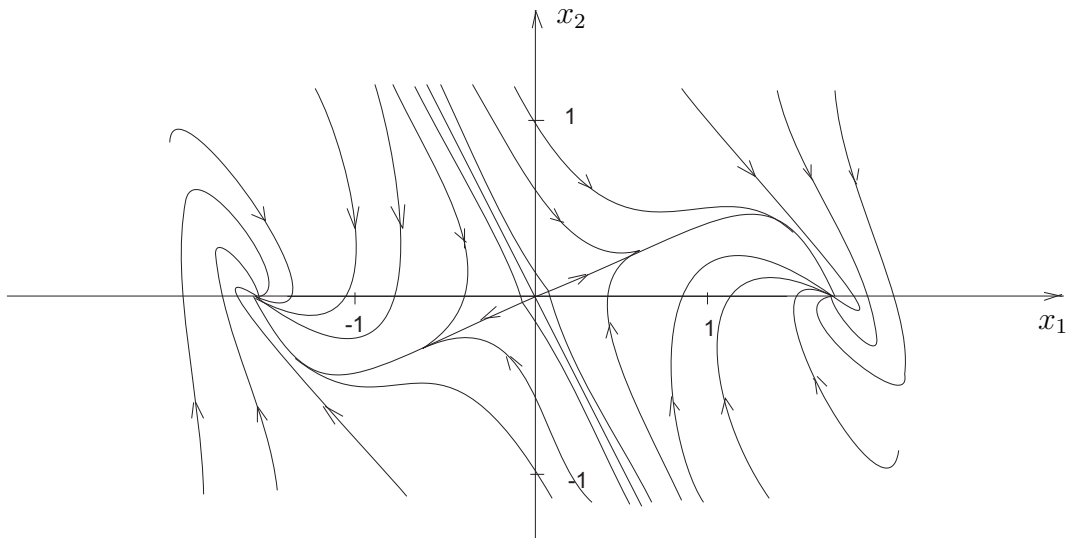
$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{b^2}{2}x_1 - c^2x_1^3 - 2ax_2 \end{aligned} \quad (4.314)$$

Singulární body jsou  $(x_1, x_2) \in \left\{ (0; 0), \left( \frac{b}{c\sqrt{2}}; 0 \right), \left( -\frac{b}{c\sqrt{2}}; 0 \right) \right\}$ . Metodou izoklin můžeme načrtnout stavové trajektorie, které jsou např. pro  $a = c = 1, b = 2$  zakresleny na obr. 4.63. Zkoumáním platnosti definice 4.3 zjistíme, že rovnovážné stavy  $(x_1, x_2) = \left( \pm \frac{b}{c\sqrt{2}}; 0 \right)$  jsou lokálně stabilní, stav  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  není lokálně stabilní.

Nevýhodou výše uvedené definice stability je, jak patrné z příkladu 4.43, že prohlásí za stabilní i systém, u kterého se trajektorie po vychýlení z rovnovážného stavu nemusí do rovnovážného stavu vůbec vrátit. Tuto nevýhodu odstraňuje následující definice stability:

**Definice 4.4 Lokální asymptotická stabilita**

Rovnovážený stav  $\mathbf{x}_0$  volného dynamického systému (4.309) je lokálně asymptoticky stabilní tehdy, když platí



**Obrázek 4.63:** Trajektorie systému z příkladu 4.44

- a) je lokálně stabilní podle definice lokální stability 4.3
- b) existuje reálné číslo  $\Delta(\varepsilon, t_0)$  takové, že pro každé  $\|\mathbf{x}_{t_0} - \mathbf{x}_0\| \leq \Delta$  a  $t_0 \in \langle \tau; \infty \rangle$  platí
- $$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_{t_0}, t_0) - \mathbf{x}_0\| = 0$$

Podmínka b) neříká nic jiného, než že existuje libovolně malé okolí rovnovážného bodu, ze kterého všechny trajektorie s rostoucím časem konvergují k rovnovážnému stavu v daném intervalu pozorování  $\langle \tau; \infty \rangle$ . Podle této definice už není rovnovážný bod z příkladu 4.43 stabilní. Lokální asymptotická stabilita se zpravidla zjišťuje na lineárním modelu, který získáme (je-li to možné) linearizací rovnic systému v okolí příslušného rovnovážného stavu. Nevýhodou definic lokální stability je, že nedefinují dostatečně přesně velikost okolí rovnovážného stavu, ze kterého všechny trajektorie budou směřovat k tomuto stavu. Říkají jen, že takové okolí existuje. Pro praktické použití jsou tedy nevýhodné. Podstatně silnější je následující definice stability:

**Definice 4.5 Globální stabilita (stabilita ve velkém)**

Nechť rovnovážný stav  $\mathbf{x}_0$  systému (4.309) je lokálně asymptoticky stabilní. Množina všech bodů  $\mathbf{x}_{t_0}$  ze stavového prostoru  $\mathbb{R}^n$ , pro které platí  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_{t_0}, t_0) - \mathbf{x}_0\| = 0$  při  $t_0 \in \langle \tau; \infty \rangle$  se nazývá oblast přitažlivosti řešení. Je-li oblastí přitažlivosti celý stavový prostor, pak je rovnovážný stav volného dynamického systému globálně asymptoticky stabilní.

Tato definice je tak silná, že jí vyhovuje jen málo praktických systémů. Všechny lineární systémy, které jsou stabilní podle známých kritérií stability lineárních systémů, jsou globálně asymptoticky stabilní. Žádný z rovnovážných stavů systémů z příkladu 4.43 a 4.44 není globálně asymptoticky stabilní.

**Definice 4.6 Praktická stabilita**

Nechť je rovnovážný stav  $\mathbf{x}_0$  systému (4.309) lokálně asymptoticky stabilní a existuje oblast přitažlivosti  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Pak je rovnovážný stav volného dynamického systému prakticky stabilní v oblasti  $\Omega$ .

Je zřejmé, že v příkladě 4.44 lze nalézt dvě oblasti, ve kterých budou příslušné rovnovážné stavy prakticky stabilní.

Pokud bychom chtěli studovat stabilitu nějakého obecnějšího řešení (trajektorie) než je singulární bod, lze problém převést na problematiku stability singulárního bodu následujícím způsobem. Předpokládejme, že známe řešení  $\mathbf{x}_S(t)$  stavové rovnice (4.309), takže když toto řešení do rovnice dosadíme, bude splněna, t.j.

$$\frac{d\mathbf{x}_S}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_S, t) \quad (4.315)$$

Chceme zjistit, jak se bude chovat řešení stavové rovnice (4.309), které v určitém časovém okamžiku bude nějak vzdáleno od řešení  $\mathbf{x}_S(t)$ . Můžeme vyjádřit rozdíl mezi oběma řešeními  $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_S$  a tedy  $\mathbf{x} = \Delta\mathbf{x} + \mathbf{x}_S$ . Dosadíme-li do (4.309), dostaneme

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}_S}{dt} + \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_S + \Delta\mathbf{x}, t) \quad (4.316)$$

a odtud

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_S + \Delta\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_S, t) \quad (4.317)$$

Protože průběh  $\mathbf{x}_S(t)$  je již znám, je systém (4.317) systémem diferenciálních rovnic vzhledem k  $\Delta\mathbf{x}(t)$  a má singulární bod  $\Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ .

Bohužel rovnice (4.317) bývá složitější než původní rovnice (4.309). Navíc pro určení rovnice (4.317) musíme znát řešení  $\mathbf{x}_S(t)$  rovnice (4.309). Přesto nám umožňuje tento způsob transformovat problém stability řešení (trajektorií) na problém stability rovnovážného stavu, který je dokonce umístěn v počátku stavového prostoru. Proto je většina problémů stability vztahována ke stabilitě singulárního bodu v počátku stavového prostoru. Pokud bychom studovali stabilitu singulárního bodu ležícího mimo počátek stavového prostoru, převedeme si problém do počátku stavového prostoru prostým posuvem souřadnic prostoru.

**4.5.3 Ljapunovova funkce**

Stabilitou řešení diferenciálních rovnic se zabýval ruský matematik Ljapunov již v roce 1892.

Ljapunov rozděloval problém analýzy stability na dvě metody. První metoda obsahovala všechny způsoby, ve kterých bylo třeba řešit systém rovnic buď zcela nebo z části. Řešení pak bylo zkoumáno a zjišťovalo se, zda vyhovuje některé z definic stability. Tato metoda nese název *první Ljapunovova metoda*. Při studiu této metody Ljapunov ukázal, že často musí být řešení hledáno ve formě řady a s pomocí druhé metody dokázal, že u mnoha systému stačí k vyšetření stability jen lineární část řady. Proto se

také první Ljapunovova metoda nazývá metoda zjišťování stability, při které provedeme linearizaci problému a zjišťujeme stabilitu vzniklého lineárního systému. Stabilita tohoto lineárního systému indikuje lokální asymptotickou stabilitu příslušného nelineárního systému. Výjimku tvoří případ, kdy linearizovaný systém má charakteristická čísla na imaginární ose. V takovém případě nelze jednoznačně prohlásit, že původní nelineární systém je lokálně stabilní, protože členy Taylorovy řady, které jsme při linearizaci zanedbali, s největší pravděpodobností způsobí posun charakteristických čísel systému z imaginární osy do stabilní nebo nestabilní oblasti.

Druhá metoda, která nese název *druhá Ljapunovova metoda* nebo také *přímá Ljapunovova metoda*, zahrnuje ty způsoby zjišťování stability, u kterých není třeba předem určovat řešení systému. Při této metodě se v podstatě hledá tzv. Ljapunovova funkce k danému systému. Podaří-li se nám najít Ljapunovovu funkci, je systém stabilní. V opačném případě nemůžeme o stabilitě nic říci. Existence Ljapunovovy funkce je tedy podmínkou postačující pro stabilitu systému. Navíc pro daný systém může existovat více Ljapunovových funkcí. Z toho plyne, že když z nalezené Ljapunovovy funkce určíme nějakou oblast parametrů systému, při kterých je systém stabilní, neznamená to, že překročení této oblasti nutně způsobí nestabilitu systému.

Vzhledem k těmto nepříjemnostem se podobným způsobem vyvíjela kritéria, která pro změnu tvoří podmínku postačující pro nestabilitu. Hlavním problémem je vůbec Ljapunovovu funkci najít. Nejčastěji se Ljapunovova funkce hledá ve tvaru funkce udávající celkovou energii systému nebo ve tvaru kvadratické formy, jak bude patrné z následujícího výkladu.

Na úvod výkladu se pokusíme vyšetřit stabilitu jednoduchého mechanického systému, aniž bychom řešili jeho rovnice.

**Příklad 4.45** Předpokládejme mechanický systém z obr. 4.64. Charakteristika tření i pružiny je nelineární. Síla tření je určena funkcí  $b(\dot{y})$  a síla pružiny funkcí  $k(y)$ . Diferenciální rovnice popisující systém je

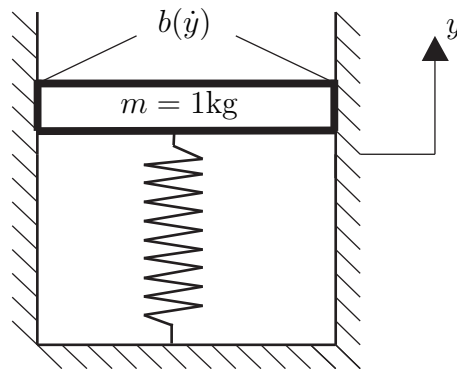
$$\frac{d^2y}{dt^2} + b\left(\frac{dy}{dt}\right) + k(y) = 0 \quad (4.318)$$

Po zavedení stavových proměnných  $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$  dostaneme stavové rovnice

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -k(x_1) - b(x_2) \end{aligned} \quad (4.319)$$

Za předpokladu, že  $k(x_1) \neq 0$  pro  $x_1 \neq 0$  a  $k(0) = b(0) = 0$ , má systém jediný singulární bod  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ . Jestliže bude tření v systému nulové  $b(x_2) = 0$  dostaneme pro směrové vektory tečen k trajektorii

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{k(x_1)}{x_2} \quad (4.320)$$



Obrázek 4.64: Mechanický tlumič

Stavový portrét pak můžeme sestavit metodou izoklin, nebo provést přímo výpočet trajektorie vyřešením diferenciální rovnice (4.320) metodou separace proměnných

$$\frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} k(x_1) dx_1 = konst \quad (4.321)$$

Trajektorie tohoto systému jsou podobné jako na obr. 4.19, jejich konkrétní tvar bude záviset na průběhu funkce  $k(y)$ .

Obrázek o trajektoriích si v tomto případě můžeme také udělat na základě energetických úvah. Jelikož v systému není tření, nemůže u něj nastat ztráta energie a tak musí být jeho celková energie  $E(x_1, x_2)$  která na jeho stavu závisí, konstantní. Celková energie systému je dána energií kinetickou a potenciální. Kinetická energie je  $\frac{1}{2}x_2^2$ , potenciální energie je energie akumulovaná v pružině při jejím vychýlení z rovnovážného stavu  $\int_0^{x_1} k(x_1) dx_1$ .

Celková energie systému tedy je

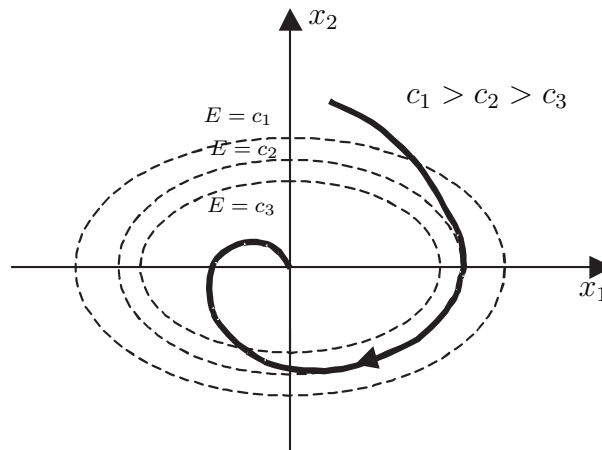
$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} k(x_1) dx_1 = konst \quad (4.322)$$

Trajektorie tohoto systému jsou tedy křivkami konstantní energie. Musí pak platit  $\frac{dE}{dt} = 0$ , čímž dostáváme

$$\frac{dE}{dt} = x_2 \frac{dx_2}{dt} + k(x_1) \frac{dx_1}{dt} = x_2 \left[ \frac{dx_2}{dt} + k(x_1) \right] \quad (4.323)$$

Po dosazení za  $\frac{dx_2}{dt}$  dostaneme skutečně  $\frac{dE}{dt} = 0$ .

Předpokládejme nyní existenci tření, kdy platí  $x_2 b(x_2) > 0$  pro  $x_2 \neq 0$ . Trajektorie systému můžeme získat obdobně jako v předchozím případě. Chceme-li ale vyšetřovat pouze stabilitu, stačí nám jen odhadnout, jak se bude měnit energie systému. Je zřejmé, že



**Obrázek 4.65:** Křivky konstantní energie z příkladu 4.45

v tomto případě bude docházet ke ztrátě energie systému s časem. Změna energie v čase je určena rovnicí (4.323). Po dosazení za  $\dot{x}_2$  do této rovnice dostaneme

$$\frac{dE}{dt} = -x_2 b(x_2) \quad (4.324)$$

Podle našich předpokladů je  $\frac{dE}{dt} < 0$ , vyjma  $x_2 = 0$ . Znamená to, že každá trajektorie musí ve stavové rovině probíhat tak, že energie systému bude klesat. Nakreslíme-li si do stavové roviny křivky konstantní energie, musí stavové trajektorie procházet tyto křivky z vyšší energetické úrovně na nižší úroveň, vyjma případu, kdy  $x_2 = 0$ . Trajektorie, která dospěla na čáru  $x_2 = 0$  by se mohla zastavit, energie systému se v tomto bodě nemusí měnit. Ale protože žádný bod na čáře  $x_2 = 0$  kromě bodu  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ , neodpovídá rovnovážnému stavu, nezastaví se na této čáře žádná trajektorie vyjma bodu  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ . Představa, kterou si o trajektorii můžeme učinit, je zachycena na obr. 4.65. Z tohoto rozboru je zřejmé, že všechny trajektorie směřují do počátku stavové roviny a tento počátek je tedy stabilní. Vyšetřili jsme tak stabilitu systému, aniž jsme řešili jeho rovnice.

Rozbor, který jsme provedli v podstatě intuitivně objasňuje, že jestliže změna energie fyzikálního systému je negativní při libovolném stavu (vyjma jediného singulárního bodu), pak úbytek energie bude probíhat tak dlouho, dokud stav systému nedosáhne tohoto singulárního bodu a tím i minimální energie. Souhlasí to také s intuitivním pojetím stability. Jestliže se však snažíme výše získanou ideu převést do konkrétní matematické metody, která by umožňovala zjišťování stability, vzniká řada problémů. Jeden z problémů je, jak určit energii systému, který je zadán v čistě matematické podobě diferenciálními rovnicemi. Obecnějším aparátém jsou v takovém případě Ljapunovy funkce, které v některých případech mohou charakterizovat energii systému.

Předpokládejme t-invariantní systém popsany soustavou nelineárních diferenciálních rovnic

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (4.325)$$

který má jediný rovnovážný bod v počátku souřadnic a tedy platí  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

Ljapunovova teorie předpokládá nalezení vhodné skalární funkce  $V(\mathbf{x})$  stavových proměnných  $\mathbf{x}$ , které jsou také proměnnými systému (4.325). Podle vlastností funkce  $V(\mathbf{x})$  a její časové derivace vzhledem k systému (4.325) lze pak posuzovat stabilitu rovnovážného stavu. Derivaci  $V(\mathbf{x})$  podle času označíme  $W(\mathbf{x})$

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = W(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} \quad (4.326)$$

Dosazením (4.325) do (4.326) dostaneme vztah pro  $W(\mathbf{x})$  platící na libovolné trajektorii systému

$$W(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(\mathbf{x}) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(\mathbf{x}) \quad (4.327)$$

Označíme-li

$$\mathbf{grad} V(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1}; \frac{\partial V}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]^T \quad (4.328)$$

můžeme  $W(\mathbf{x})$  zapsat také jako skalární součin gradientu a vektoru  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$

$$W = \langle \mathbf{grad} V(\mathbf{x}); \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle = (\mathbf{grad} V(\mathbf{x}))^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4.329)$$

#### Definice 4.7 Ljapunovova funkce

Ljapunovova funkce je taková skalární funkce  $V(\mathbf{x})$ , která splňuje následující podmínky

1.  $V(\mathbf{x})$  je spojitá a má spojitě první parciální derivace v dané oblasti  $\Omega$  definované v okolí počátku souřadnic vztahem  $\|\mathbf{x}\| < a; a > 0$
2.  $V(\mathbf{x})$  je v oblasti  $\Omega$  pozitivně definitní
3.  $W(\mathbf{x})$  je v oblasti  $\Omega$  negativně definitní případně semidefinitní

Připomeňme, že funkce  $F(\mathbf{x})$  se nazývá pozitivně *definitní* v určité oblasti, jestliže ve všech bodech této oblasti je stále kladná a jen v počátku je rovna nule, tedy  $F(\mathbf{x}) > 0$  pro  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  a  $F(\mathbf{0}) = 0$ .  $F(\mathbf{x})$  je pozitivně *semidefinitní*, jestliže  $F(\mathbf{x}) \geq 0$  a je-li nulová i pro nějaké  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .  $F(\mathbf{x})$  je *indefinitní*, jestliže ve sledované oblasti mění znaménko.

Jako Ljapunovovu funkci lze volit různé typy funkcí. Pro libovolnou skalární funkci  $F(\mathbf{x})$  však neexistuje obecná metoda, pomocí níž by bylo možno určit definitnost funkce. To značně omezuje volbu vhodných Ljapunovových funkcí.

**Příklad 4.46** Uvedme několik příkladů skalárních funkcí a určíme jejich definitnost v  $n$ -rozměrném stavovém prostoru.

- $V(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2; n = 3$  je pozitivně semidefinitní, protože je pozitivní všude vyjma  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  a  $x_1 = -x_2; x_3 = 0$ , kdy je nulová
- $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2; n = 2$  je pozitivně definitní, protože je pozitivní všude vyjma bodu  $\mathbf{0}$ , kdy je nulová

- $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2; n = 3$  je pozitivně semidefinitní, protože je pozitivní všude vyjma bodu  $x_1 = x_2 = 0$  a  $x_3$  je libovolné, kdy je nulová
- $V(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n q_{ij} x_i x_j; q_{ij} = q_{ji}$  je kvadratická forma, kterou můžeme vyjádřit jako skalární součin  $\langle \mathbf{x}; \mathbf{Q}\mathbf{x} \rangle$ , kde  $\mathbf{Q}$  je matice koeficientů  $q_{ij}$ . Podle Sylvestrova teorému je tato funkce pozitivně definitní tehdy a jen tehdy, když všechny hlavní subdeterminanty matice  $\mathbf{Q}$  jsou větší než 0
- funkce  $E(x_1, x_2)$  definovaná vztahem (4.322) je pozitivně definitní

#### 4.5.4 Věty o stabilitě

K hledání Ljapunovovy funkce se velmi často používá kvadratická forma

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n q_{ij} x_i x_j; q_{ij} = q_{ji} \quad (4.330)$$

Všimněme si, že Ljapunovova funkce v podstatě určitým způsobem měří „vzdálenost“ stavového vektoru od počátku stavového prostoru, a protože její derivace s časem musí být na každé trajektorii negativně semidefinitní nebo dokonce negativně definitní, nemůže tato „vzdálenost“ růst s časem. To pak vede k teorémům o stabilitě, které uvedeme v této kapitole.

#### Věta 4.8 Teorém o lokální stabilitě

Jestliže může být pro systém popsaný stavovou rovnicí (4.325) nalezena taková Ljapunovova funkce, u které je  $W(\mathbf{x})$  negativně semidefinitní, pak je počátek stavového prostoru lokálně stabilní.

Teorém o lokální stabilitě si objasníme ve stavové rovině. Stavovou rovnici  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  lze pak vyjádřit

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (4.331)$$

Zvolíme funkci

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 \quad (4.332)$$

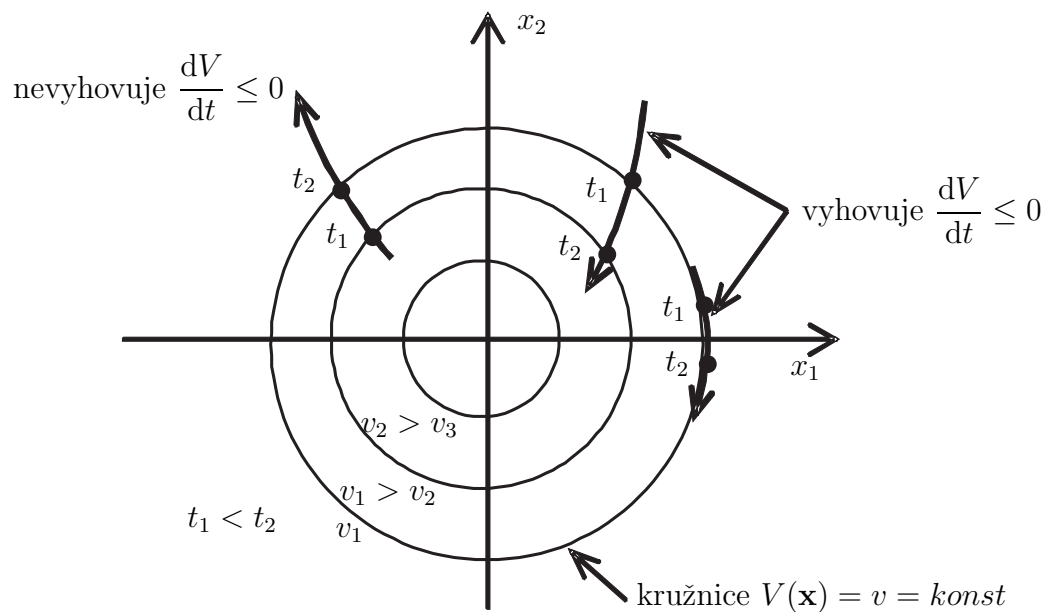
Její derivace podle času je

$$W(\mathbf{x}) = \frac{dV}{dt} = 2x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt} \quad (4.333)$$

Po dosazení z (4.331) dostaneme

$$W(\mathbf{x}) = \frac{dV}{dt} = 2x_1 f_1(x_1, x_2) + 2x_2 f_2(x_1, x_2) \quad (4.334)$$





**Obrázek 4.66:** Objasnění věty o lokální stabilitě

Hodnota  $V(\mathbf{x})$  je konstantní na kružnicích se středem v počátku obr. 4.66. Jestliže bude  $W(\mathbf{x})$  negativně semidefinitní, pak při postupu po libovolné stavové trajektorii ve směru růstu času musíme přecházet na kružnice s menší hodnotou  $V(\mathbf{x})$  nebo alespoň zůstat na některé kružnici. V žádném případě nemůžeme přecházet na kružnice s větším  $V(\mathbf{x})$ . Takový systém by tedy vyhovoval lokální definici stability a byl by lokálně stabilní vzhledem k počátku.

Vraťme se nyní k příkladu 4.45. Pokusme se najít Ljapunovovu funkci ve formě energie systému

$$V(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} k(u)du \quad (4.335)$$

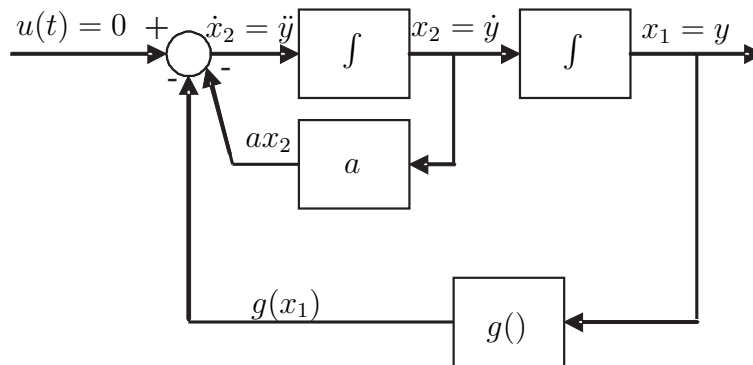
Pro libovolnou reálnou pružinu platí

$$\int_0^{x_1} k(u)du \begin{cases} > 0 & x_1 \neq 0 \\ = 0 & x_1 = 0 \end{cases} \quad (4.336)$$

a funkce  $V(\mathbf{x})$  je tedy pozitivně definitní. Funkce  $W(x_1, x_2)$  je dána vztahem

$$W(x_1, x_2) = x_2 \frac{dx_2}{dt} + k(x_1) \frac{dx_1}{dt} = -x_2 b(x_2) \quad (4.337)$$

Jestliže bude  $b(x_2) \equiv 0 \Rightarrow x_2 b(x_2) = 0$ , bude  $W(x_1, x_2)$  negativně semidefinitní (je nulová pro každé  $x_1, x_2$ ) a systém je tedy lokálně stabilní. Vidíme, že výsledek teoremu odpovídá našim fyzikálním představám o chování systému bez tření a definici lokální stability. Jestliže bude  $b(x_2)$  představovat jakoukoliv lichou funkci s vlastností  $x_2 b(x_2) > 0$



Obrázek 4.67: Nelineární regulační systém

při  $x_2 \neq 0$ , bude  $W(x_1, x_2)$  rovněž negativně semidefinitní ( $W(x_1, x_2) = 0$  pro  $x_2 = 0$  a  $x_1 \neq 0$ ) a systém je opět lokálně stabilní (jde o systém, z kterého se energie ztrácí). To opět odpovídá našim představám, dokonce víme, že takový systém je lokálně asymptoticky stabilní i globálně asymptoticky stabilní.

#### Věta 4.9 Teorém o lokální asymptotické stabilitě

Jestliže může být pro systém popsaný stavovou rovnicí (4.325) nalezena taková Ljapunovova funkce, u které je  $W(\mathbf{x})$  negativně definitní, pak je počátek stavového prostoru lokálně asymptoticky stabilní.

**Příklad 4.47** Na obr. 4.67 je nakreslen systém druhého řádu s nelineární zpětnou vazbou. Máme určit podmínky, jaké musí zpětné vazby splňovat, aby byl systém při  $u(t) = 0$  stabilní. Stavové rovnice systému jsou

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -g(x_1) - ax_2 \end{aligned} \quad (4.338)$$

Předpokládáme, že  $g(x_1) = 0$  jen pro  $x_1 = 0$ . Systém má tedy pouze jeden rovnovážný stav  $x_1 = x_2 = 0$ . Vzhledem k tomu, že rovnice (4.338) jsou podobné rovnicím (4.319), pokusíme se najít Ljapunovovu funkci ve tvaru podobném (4.322)

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} g(u) du \quad (4.339)$$

Jestliže bude mít  $g(u)$  tvar obdobný jako na obr. 4.68 silně vytažený průběh, tj. bude platit  $ug(u) > 0$  pro  $u \neq 0$  a  $g(0) = 0$ , bude  $V(x_1, x_2)$  pozitivně definitní. Odpovídající  $W(x_1, x_2)$  je

$$W(x_1, x_2) = x_2 \frac{dx_2}{dt} + g(x_1) \frac{dx_1}{dt} = -ax_2^2 \quad (4.340)$$

Tato funkce je negativně semidefinitní pro  $a \geq 0$ . Za těchto podmínek je tedy systém lokálně stabilní. Při  $a > 0$  bude  $W(x_1, x_2)$  (vyjma čáry  $x_2 = 0$ ) negativně definitní. Na

této čáře je  $W(x_1, x_2) = 0$  a pohyb systému (trajektorie) by na ní mohl končit. Protože však na této čáře neleží vyjma bodu  $x_1 = x_2 = 0$ , žádný rovnovážný bod systému, nebude na ní končit žádná trajektorie a systém bude asymptoticky stabilní, i když námi nalezená Ljapunovova funkce neodpovídá teorému o lokální asymptotické stabilitě. Intuitivně cítíme, že systém bude dokonce globálně asymptoticky stabilní. Poznamenejme ještě, že počátek stavové roviny bude pro tento systém lokálně asymptoticky stabilní, i když  $g(x_1)$  bude mít průběh zaznamenaný na obr. 4.68 čárkovaně, protože chování funkcí  $W(\mathbf{x})$  a  $V(\mathbf{x})$  zůstane stejné pro dostatečně malé okolí kolem počátku  $\mathbf{0}$ . Čárkovaný průběh  $g(x_1)$  však způsobí, že systém bude mít další rovnovážné stavy, které nemusí být stabilní.

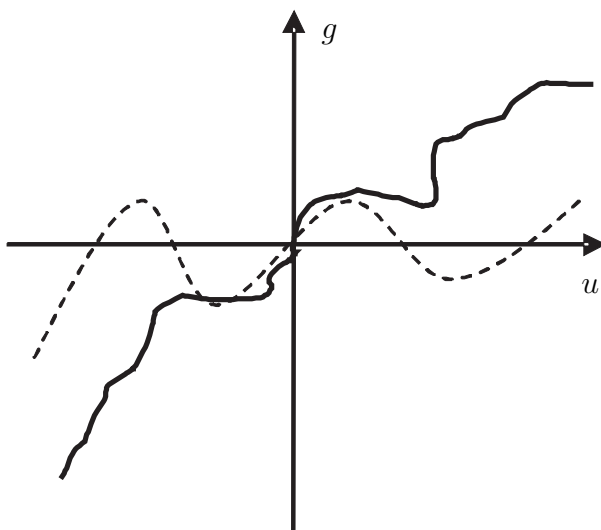
#### Věta 4.10 Teorém o globální asymptotické stabilitě

Jestliže může být pro systém popsaný stavovou rovnicí (4.325) nalezena taková Ljapunovova funkce, u které je oblast  $\Omega = R^n$  (celý stavový prostor) a  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  pro  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  a  $W(\mathbf{x})$  je negativně definitní, pak je počátek stavového prostoru globálně asymptoticky stabilní.

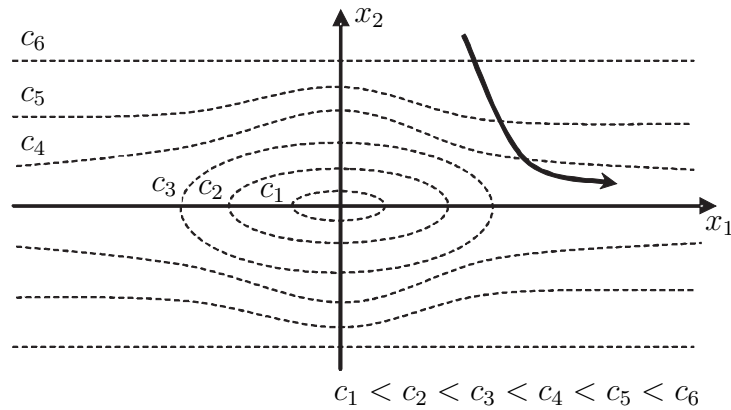
Požadavek na neohraničený růst Ljapunovovy funkce při růstu vzdálenosti  $\|\mathbf{x}\|$  od počátku si můžeme intuitivně vysvětlit na příkladu 4.45. Víme, že pro tento systém jsme používali Ljapunovovu funkci ve formě energie systému a čáry odpovídající její konstantní hodnotě jsou určeny rovnicí

$$v(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} k(u) du = c = konst \quad (4.341)$$

Předpokládejme, že  $k(u)$  je takové, že člen  $\int_0^{x_1} k(u) du$  při růstu  $x_1 \rightarrow \infty$  neroste neomezeně, ale jen na nějakou konečnou hodnotu  $c_0$  (pružina nemůže akumulovat nekonečné



Obrázek 4.68: Průběh nelineární funkce



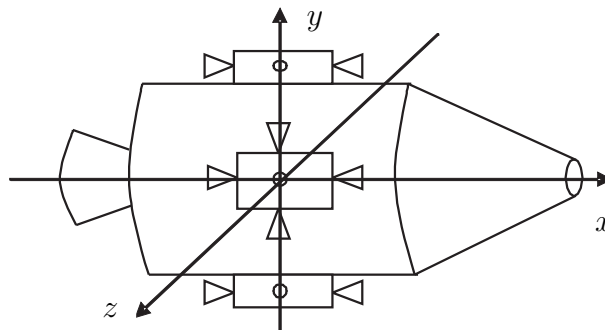
Obrázek 4.69: Vysvětlení teoremu o globální stabilitě

množství energie). Jestliže  $c_0 < c$ , nemusí být čáry konstantní energie uzavřené tak jako na obr. 4.65, ale mohou mít tvar jako na obr. 4.69. V takovém případě může být počátek lokálně asymptoticky stabilní, ale ne globálně stabilní. Při dostatečně velkém  $x_{t_0}$  může totiž probíhat ze stavů s velkou energií ke stavům s nižší energií tak, že mine počátek souřadnic. Podmínky teoremu o globální stabilitě takovou možnost vylučují.

**Příklad 4.48** *Následující rovnice popisují pohyb družice okolo hlavních os setrvačnosti obr. 4.70*

$$\begin{aligned} J_x \frac{d\omega_x}{dt} - (J_y - J_z)\omega_y\omega_z &= M_x \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} - (J_z - J_x)\omega_x\omega_z &= M_y \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} - (J_x - J_y)\omega_x\omega_y &= M_z \end{aligned} \quad (4.342)$$

kde  $J_x, J_y, J_z$  jsou momenty setrvačnosti družice kolem hlavních os,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  jsou úhlové rychlosti kolem hlavních os a  $M_x, M_y, M_z$  jsou vnější kroutící momenty kolem hlavních os. Družice se může nevhodně otáčet kolem těchto hlavních os, a proto chceme její pohyb stabilizovat tak, že vnější momenty vyvolané raketovými motory učiníme závislé



Obrázek 4.70: Řízená družice

na úhlových rychlostech podle rovnic

$$\begin{aligned} M_x &= -k_x \omega_x \\ M_y &= -k_y \omega_y \\ M_z &= -k_z \omega_z \end{aligned} \quad (4.343)$$

Otázka je, za jakých podmínek bude takový systém stabilní. Stavové rovnice systému s uvážením řízení jsou

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_x}{dt} &= \frac{1}{J_x} [-k_x \omega_x + (J_y - J_z) \omega_y \omega_z] \\ \frac{d\omega_y}{dt} &= \frac{1}{J_y} [-k_y \omega_y + (J_z - J_x) \omega_x \omega_z] \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{1}{J_z} [-k_z \omega_z + (J_x - J_y) \omega_x \omega_y] \end{aligned} \quad (4.344)$$

Rovnice jsou nelineární vzhledem k přítomnosti násobení stavových veličin. Systém má jediný rovnovážný stav  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ . Rovnice (4.344) můžeme zapsat rovněž ve tvaru

$$\frac{d\omega}{dt} = \mathbf{A}(\omega)\omega \quad (4.345)$$

kde

$$\mathbf{A}(\omega) = \begin{bmatrix} -\frac{k_x}{J_x} & \frac{J_y}{J_x} \omega_z & -\frac{J_z}{J_x} \omega_y \\ -\frac{J_x}{J_y} \omega_z & -\frac{k_y}{J_y} & \frac{J_z}{J_y} \omega_x \\ \frac{J_x}{J_z} \omega_y & -\frac{J_y}{J_z} \omega_x & -\frac{k_z}{J_z} \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (4.346)$$

Pro Ljapunovovu funkci zvolíme pozitivně definitní kvadratickou formu, kterou můžeme zapsat jako skalární součin  $\omega$  a  $\mathbf{Q}\omega$

$$V(\omega) = \langle \omega, \mathbf{Q}\omega \rangle \quad (4.347)$$

Zvolíme

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} J_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & J_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & J_z^2 \end{bmatrix} \quad (4.348)$$

a dostaneme

$$V(\omega) = J_x^2 \omega_x^2 + J_y^2 \omega_y^2 + J_z^2 \omega_z^2 \quad (4.349)$$

Odpovídající funkce  $W(\omega)$  je

$$W(\omega) = \frac{dV}{dt} = \left\langle \frac{d\omega}{dt}, \mathbf{Q}\omega \right\rangle + \left\langle \omega, \mathbf{Q} \frac{d\omega}{dt} \right\rangle \quad (4.350)$$

S využitím (4.345) dostaneme

$$\begin{aligned} W(\omega) &= \langle \mathbf{A}(\omega)\omega, \mathbf{Q}\omega \rangle + \langle \omega, \mathbf{Q}\mathbf{A}(\omega)\omega \rangle = [\mathbf{A}(\omega)\omega]^T \mathbf{Q}\omega + \omega^T \mathbf{Q}\mathbf{A}(\omega)\omega = \\ &= \omega^T \mathbf{A}^T(\omega) \mathbf{Q}\omega + \omega^T \mathbf{Q}\mathbf{A}(\omega)\omega \end{aligned} \quad (4.351)$$

Tuto rovnici lze také zapsat ve tvaru

$$W(\omega) = \langle \omega, [\mathbf{A}^T(\omega)\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}(\omega)]\omega \rangle = -\langle \omega, \mathbf{P}\omega \rangle \quad (4.352)$$

kde

$$\mathbf{P} = -[\mathbf{A}^T(\omega)\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}(\omega)] \quad (4.353)$$

Dosadíme-li z předchozích rovnic, dostaneme

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2k_x J_x & 0 & 0 \\ 0 & 2k_y J_y & 0 \\ 0 & 0 & 2k_z J_z \end{bmatrix} \quad (4.354)$$

Při pozitivních hodnotách  $k_x, k_y, k_z$  bude tedy  $W(\omega)$  negativně definitní v celém stavovém prostoru, a tak tedy bude i náš systém (družice plus navržený stabilizátor) globálně asymptoticky stabilní.

#### 4.5.5 Volba Ljapunovovy funkce

V předchozích kapitolách jsme uvedli několik příkladů, ve kterých jsme dokázali nalézt Ljapunovovu funkci k vyšetřovaným systémům. Volba funkce byla provedena pouze na základě analogie a zkušeností. Neexistuje totiž jednoduchá a spolehlivá metoda, které by umožnila stanovit vhodnou Ljapunovovu funkci k libovolnému nelineárnímu systému. Volba Ljapunovovy funkce ve tvaru kvadratické formy obecně selhává a vyhoví jen omezenému počtu speciálních případů. Existuje řada metod pro generování Ljapunovovy funkce, pro speciální rovnice dokonce i některé metody obecné. Jejich praktické použití je však poměrně obtížné. V dalším si všimneme jen některých metod, které lze prakticky použít. Jednu z nich jsme již v předchozích kapitolách aplikovali. Byla to metoda vytvoření Ljapunovovy funkce podle fyzikální energetické analogie. Tato metoda je vhodná pro systémy nižšího řádu.

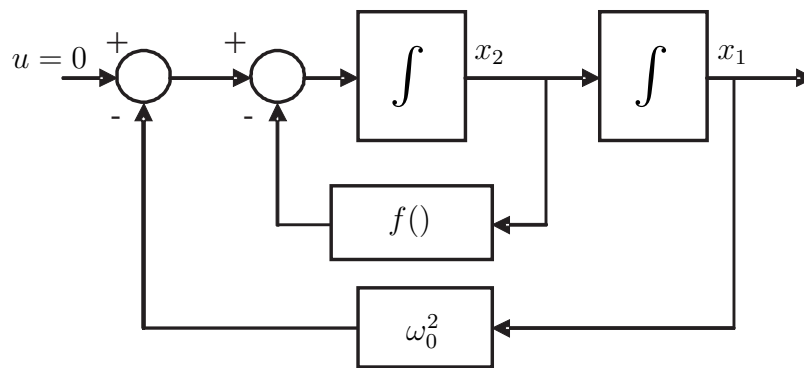
#### Krasovského metoda

Pro systém popsany rovnicí (4.325) lze nalézt Ljapunovovu funkci ve tvaru obecné kvadratické formy

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_{ij} f_i f_j = \langle \mathbf{f}; \mathbf{L}\mathbf{f} \rangle \quad (4.355)$$

kde  $f_i$  jsou obecné nelineární funkce z pravé strany rovnice (4.325). Symetrickou matici  $\mathbf{L}$  zvolíme tak, že bude pozitivně definitní. Pak bude i  $V(\mathbf{x})$  pozitivně definitní. Pro  $W(\mathbf{x})$  platí

$$W(\mathbf{x}) = \left\langle \frac{d\mathbf{f}}{dt}; \mathbf{L}\mathbf{f} \right\rangle + \left\langle \mathbf{f}; \mathbf{L} \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right\rangle \quad (4.356)$$



Obrázek 4.71: Nelineární regulační systém

kde

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (4.357)$$

a

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \quad (4.358)$$

je Jacobián systému. Po dosazení (4.325), (4.357) a (4.358) do (4.356) dostaneme

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{J}\mathbf{f}; \mathbf{L}\mathbf{f} \rangle + \langle \mathbf{f}; \mathbf{L}\mathbf{J}\mathbf{f} \rangle = (\mathbf{J}\mathbf{f})^T \mathbf{L}\mathbf{f} + \mathbf{f}^T \mathbf{L}\mathbf{J}\mathbf{f} = \mathbf{f}^T \mathbf{J}^T \mathbf{L}\mathbf{f} + \mathbf{f}^T \mathbf{L}\mathbf{J}\mathbf{f} = \\ &= \mathbf{f}^T (\mathbf{J}^T \mathbf{L} + \mathbf{L}\mathbf{J}) \mathbf{f} = \mathbf{f}^T \mathbf{T}\mathbf{f} = \langle \mathbf{f}; \mathbf{T}\mathbf{f} \rangle \end{aligned} \quad (4.359)$$

kde

$$\mathbf{T} = \mathbf{J}^T \mathbf{L} + \mathbf{L}\mathbf{J} \quad (4.360)$$

Aby bylo  $W(\mathbf{x})$  negativně definitní stačí, aby matice  $-\mathbf{T}$  byla pozitivně definitní, čímž si zajistíme globální stabilitu systému. Z tohoto požadavku pak vyplyne, jaké podmínky musí parametry systému splňovat, aby bylo dosaženo globální stability. Problém si objasníme příkladem.

**Příklad 4.49** Pro systém z obr. 4.71 je třeba zjistit, jaké požadavky musí splňovat nelinearita, aby byl systém globálně stabilní.

Stavové rovnice sestavíme ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 = f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -f(x_2) - \omega_0^2 x_1 = f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (4.361)$$

Aby byly splněny podmínky kladené na rovnici (4.325), musí platit, že  $f(x) \neq 0$  pro  $x \neq 0$  a  $f(0) = 0$ . Ljapunovovu funkci zvolíme podle (4.355)

$$V(\mathbf{x}) = [f_1 f_2] \begin{bmatrix} \frac{l_{11}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{l_{22}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} l_{11} f_1^2 + \frac{1}{2} l_{22} f_2^2 \quad (4.362)$$

Po dosazení ze stavových rovnic dostaneme

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} l_{11} x_2^2 + \frac{1}{2} l_{22} [f(x_2) + \omega_0^2 x_1]^2 \quad (4.363)$$

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}) &= \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = l_{11} x_2 \frac{dx_2}{dt} + l_{22} [f(x_2) + \omega_0^2 x_1] \left[ \frac{df(x_2)}{dx_2} \frac{dx_2}{dt} + \omega_0^2 \frac{dx_1}{dt} \right] \\ &= l_{11} x_2 [-f(x_2) - \omega_0^2 x_1] + l_{22} [f(x_2) + \omega_0^2 x_1] \left[ -\frac{df(x_2)}{dx_2} (f(x_2) + \omega_0^2 x_1) + \omega_0^2 x_2 \right] \\ &= (-l_{11} + l_{22} \omega_0^2) (f(x_2) + \omega_0^2 x_1) x_2 - l_{22} \frac{df(x_2)}{dx_2} [f(x_2) + \omega_0^2 x_1]^2 \end{aligned} \quad (4.364)$$

Zvolíme-li  $l_{11} = \omega_0^2$  a  $l_{22} = 1$ , dostaneme

$$W(\mathbf{x}) = -\frac{df(x_2)}{dx_2} [f(x_2) + \omega_0^2 x_1]^2 \quad (4.365)$$

Postačující podmínkou pro globální stabilitu systému je, že  $W(\mathbf{x})$  je negativně definitní v celém stavovém prostoru. Je tedy třeba, aby platilo

$$\frac{df(x_2)}{dx_2} > 0 \quad (4.366)$$

pro libovolné  $x_2$ . Lze však dokázat, že tento požadavek na  $f(x_2)$  je zbytečně přísný, protože lze nalézt jinými metodami i jiné Ljapunovovy funkce, podle kterých bude tento systém stabilní i při nesplnění výše uvedené podmínky pro  $f(x_2)$ .

## Metoda variabilního gradientu

V předchozích případech byly Ljapunovovy funkce vhodně zvoleny. Různé teoremy dokazují existenci Ljapunovových funkcí pro stabilní systémy. Jde o to takovou funkci nalézt. Jednou z metod, podle které lze vhodnou Ljapunovovu funkci vypočítat (tedy určit její tvar, nejen koeficienty) je metoda variabilního gradientu.

Jestliže u systému existuje Ljapunovova funkce (skalární funkce vektorového argumentu), musí u něj existovat také gradient této funkce. (Volně řečeno je gradient  $V(\mathbf{x})$  vektor, jehož „velikost“ udává změnu  $V(\mathbf{x})$  ve „směru“ tohoto vektoru.)

$$\mathbf{grad} V(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4.367)$$



kde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  jsou souřadnice vektoru  $\mathbf{x}$  v normální bázi  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  prostoru  $\mathbb{R}^n$ .

Princip metody spočívá v tom, že podle určitého systému volíme gradient  $V(\mathbf{x})$ , ze kterého pak vypočítáme  $V(\mathbf{x})$ . Z rovnice (4.329) víme, že platí

$$W(\mathbf{x}) = \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \langle \mathbf{grad} V(\mathbf{x}); \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle = \left\langle \mathbf{grad} V(\mathbf{x}); \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\rangle \quad (4.368)$$

a tedy

$$V(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}} \langle \mathbf{grad} V; d\mathbf{x} \rangle \quad (4.369)$$

Tento vztah představuje křivkový integrál funkce  $W(\mathbf{x})$  z počátku do zvoleného bodu  $\mathbf{x}$  stavového prostoru. Aby bylo možné  $V(\mathbf{x})$  vypočítat jednoznačně, nesmí výsledek záviset na zvolené cestě integrace. K tomu je nutné a postačující

$$\forall i, j = 1, 2, \dots, n \quad i \neq j \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial V}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) \quad (4.370)$$

Při splnění této podmínky si můžeme vybrat např. integrační cestu postupně ve směru jednotlivých vektorů báze

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} \Big|_{(u_1, 0, 0, \dots, 0)} du_1 + \int_0^{x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \Big|_{(x_1, u_2, 0, \dots, 0)} du_2 + \dots + \int_0^{x_n} \frac{\partial v}{\partial x_n} \Big|_{(x_1, x_2, x_3, \dots, u_n)} du_n \quad (4.371)$$

kde  $\frac{\partial v}{\partial x_i} \Big|_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}$  udává hodnotu  $i$ -té souřadnice vektoru  $\mathbf{grad} V(\mathbf{x})$  v bodě  $\mathbf{x}$  o souřadnicích  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Nyní přejdeme k vlastní volbě gradientu. Předpokládejme, že složky gradientu jsou ve tvaru určeném rovnicí

$$\mathbf{grad} V(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{x} \quad (4.372)$$

kde

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(\mathbf{x}) & \alpha_{12}(\mathbf{x}) & \dots & \alpha_{1n}(\mathbf{x}) \\ \alpha_{21}(\mathbf{x}) & \alpha_{22}(\mathbf{x}) & \dots & \alpha_{2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1}(\mathbf{x}) & \alpha_{n2}(\mathbf{x}) & \dots & \alpha_{nn}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (4.373)$$

Gradient tedy obsahuje neurčité koeficienty, které jsou funkcí stavového vektoru. Je výhodné jednotlivé koeficienty rozdělit na část konstantní a část proměnnou, závisující na  $\mathbf{x}$ , t.j.

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^c + \alpha_{ij}^v(\mathbf{x}) \quad (4.374)$$

kde index  $c$  označuje konstantní a index  $v$  proměnnou část. Dále je vhodné zvolit koeficienty  $\alpha_{ii}^v$  závislé pouze na složce  $x_i$  stavového vektoru, všechny ostatní složky vybrat tak, aby nezáležely na složce  $x_n$  a  $\alpha_{nn} = 1$ . Matice  $\alpha$  má pak tvar

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^c + \alpha_{11}^v(x_1) & \alpha_{12}^c + \alpha_{12}^v(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) & \dots & \alpha_{1n}^c + \alpha_{1n}^v(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \\ \alpha_{21}^c + \alpha_{21}^v(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) & \alpha_{22}^c + \alpha_{22}^v(x_2) & \dots & \alpha_{2n}^c + \alpha_{2n}^v(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}^c + \alpha_{n1}^v(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) & \alpha_{n2}^c + \alpha_{n2}^v(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.375)$$

Jestliže tedy zvolíme matici  $\alpha$  tak, jak bylo popsáno, je postup určení Ljapunovovy funkce následující:

1. předpokládáme, že gradient je určen rovnicí (4.372)
2. určíme  $W = \langle \mathbf{grad} V(\mathbf{x}); \mathbf{f} \rangle$
3. na základě podmínek nezávislosti na integrační cestě (4.370) volíme neurčité koeficienty tak, aby  $W$  byla alespoň negativně semidefinitní
4. integrací (4.371) určíme funkci  $V(\mathbf{x})$  a stanovíme její definitnost

Postup si objasníme na příkladě

**Příklad 4.50** Máme určit Ljapunovovu funkci pro systém z příkladu 4.47. Stavové rovnice systému jsou

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -g(x_1) - ax_2 \end{aligned} \quad (4.376)$$

Podle (4.372) a (4.375) gradient bude

$$\mathbf{grad} V = \begin{bmatrix} [\alpha_{11}^c + \alpha_{11}^v(x_1)]x_1 + [\alpha_{12}^c + \alpha_{12}^v(x_1)]x_2 \\ [\alpha_{12}^c + \alpha_{12}^v(x_1)]x_1 + x_2 \end{bmatrix} \quad (4.377)$$

Funkce  $W(\mathbf{x})$  je podle (4.368)

$$\begin{aligned} W &= \{[\alpha_{11}^c + \alpha_{11}^v(x_1)]x_1 + [\alpha_{12}^c + \alpha_{12}^v(x_1)]x_2\}x_2 + \\ &\quad + \{[\alpha_{12}^c + \alpha_{12}^v(x_1)]x_1 + x_2\}\{-g(x_1) - ax_2\} = \\ &= \left[ \alpha_{11}^c + \alpha_{11}^v(x_1) - a\alpha_{21}^c - a\alpha_{21}^v(x_1) - \frac{g(x_1)}{x_1} \right] x_1 x_2 - \\ &\quad - [\alpha_{21}^c + \alpha_{21}^v(x_1)]x_1 g(x_1) - [a - \alpha_{12}^c - \alpha_{12}^v(x_1)]x_2^2 \end{aligned} \quad (4.378)$$

Podle (4.370) musíme zaručit, že platí

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) = \alpha_{12}^c + \alpha_{12}^v(x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) = \alpha_{21}^c + \frac{\partial}{\partial x_1} [\alpha_{21}^v(x_1)x_1] \quad (4.379)$$

Zvolme  $\alpha_{12}^c = \alpha_{12}^v = \alpha_{21}^c = \alpha_{21}^v = 0$ . Tím dojde ke zjednodušení

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} V &= \begin{bmatrix} [\alpha_{11}^c + \alpha_{11}^v(x_1)]x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ W &= \left[ \alpha_{11}^c + \alpha_{11}^v(x_1) - \frac{g(x_1)}{x_1} \right] x_1 x_2 - ax_2^2 \end{aligned} \quad (4.380)$$

Dalšího zjednodušení dosáhneme volbou  $\alpha_{11}^c = 0$ ,  $\alpha_{11}^v(x_1) = \frac{g(x_1)}{x_1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} V &= \begin{bmatrix} g(x_1) \\ x_2 \end{bmatrix} \\ W &= -ax_2^2 \end{aligned} \quad (4.381)$$

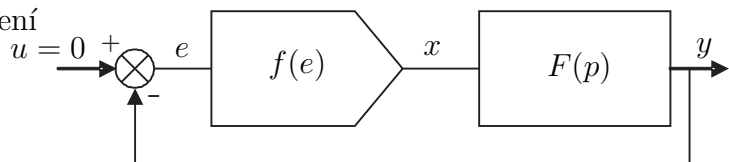
$W$  je tedy negativně semidefinitní při  $a > 0$ . Provedeme integraci podle (4.371)

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} g(u_1) du_1 + \int_0^{x_2} u_2 du_2 = \int_0^{x_1} g(u_1) du_1 + \frac{x_2^2}{2} \quad (4.382)$$

Pokud platí  $g(u_1)u_1 > 0$  pro  $u_1 \neq 0$  a  $g(0) = 0$  je  $V(\mathbf{x})$  pozitivně definitní a je to tedy Ljapunovova funkce. Obvod je tedy lokálně stabilní.

#### 4.5.6 Popovovo kritérium stability

Popovovo kritérium je velmi výhodné pro praxi, protože k vyšetření stability používá běžně známých frekvenčních charakteristik lineární části systému. V základní verzi je možno Popovovo kritérium použít pouze pro systémy, které mají konfiguraci uvedenou na obr. 4.72, nebo mohou být na takovou konfiguraci převedeny. Kritérium je tedy použitelné pro neřízené t-invariantní systémy, které mohou být rozděleny na lineární část a nelineární část popsanou funkčním předpisem  $x = f(e)$ . Navíc musí být splněny následující podmínky: Pro nelinearitu musí platit:



**Obrázek 4.72:** Základní konfigurace regulačního systému pro použití Popovova kritéria stability

- a)  $f(0) = 0$  (4.383)
- b) Má-li  $F(p)$  póly jen s negativní reálnou částí (tzv. základní případ), musí nelinearita splňovat podmínku

$$0 \leq \frac{f(e)}{e} \leq k, \quad e \neq 0 \quad (4.384)$$

To znamená, že převodní charakteristika nelinearity může ležet kdekoli v sektoru ohraničeném osou úseček a přímkou o směrnici  $k$ , viz obr. 4.73.

- c) Má-li  $F(p)$  nějaké póly na imaginární ose a žádné póly s pozitivní reálnou částí (tzv. kritický případ), platí pro nelinearitu podmínka

$$0 < \frac{f(e)}{e} \leq k, \quad e \neq 0 \quad (4.385)$$

Pro operátorový přenos  $F(p)$  musí navíc v kritickém případě platit následující omezení. Nahradíme-li nelineární funkci  $f(e)$  lineární funkcí  $f(e) = \delta e$ , nesmí být uzavřená smyčka z obr. 4.72 nestabilní pro  $\delta \rightarrow 0+$ , tj. póly uzavřené smyčky musí být pro malé hodnoty  $\delta$  v levé polorovině komplexní roviny.

Za těchto podmínek můžeme formulovat následující teorém:

**Věta 4.11 Popovův teorém**

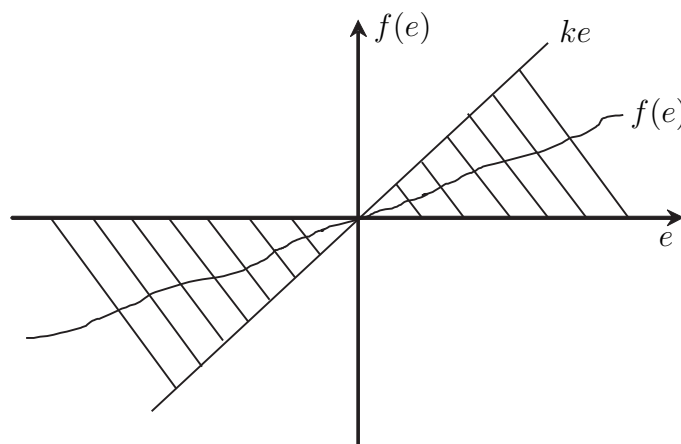
*Nelineární systém vyhovující výše uvedeným podmínkám je globálně asymptoticky stabilní tehdy, existuje-li libovolné reálné číslo  $q$  takové, že nerovnost*

$$\Re\{(1 + j\omega q)F(j\omega)\} + \frac{1}{k} > 0 \quad (4.386)$$

*kde  $F(j\omega)$  je frekvenční charakteristika lineární části systému a  $k$  je směrnice přímky omezující nelinearitu, je splněna pro všechna  $\omega \geq 0$ .*

Popovův teorém představuje podmínku postačující pro globální asymptotickou stabilitu, jeho nesplnění tedy neznamená nestabilitu systému. Podmínky Popovova teorému zajišťují, že systém má jediný rovnovážný stav, při kterém  $e = 0$ . Platnost podmínky (4.384) se obvykle zjišťuje graficky. Reálnou část z nerovnosti (4.384) můžeme upravit

$$\begin{aligned} \Re\{(1 + j\omega q)F(j\omega)\} &= \Re\{(1 + j\omega q)[\Re F(j\omega) + j\Im F(j\omega)]\} = \\ &= \Re F(j\omega) - q\omega \Im F(j\omega) \end{aligned} \quad (4.387)$$



**Obrázek 4.73:** Sektor, ve kterém se může nacházet nelinearita při použití Popovova kritéria stability

Označíme-li

$$\begin{aligned}\Re F(j\omega) &= X \\ \omega \Im F(j\omega) &= Y\end{aligned}\quad (4.388)$$

můžeme nerovnost (4.384) přepsat do tvaru

$$X - qY + \frac{1}{k} > 0 \quad (4.389)$$

Změníme-li v nerovnici (4.389) znaménko nerovnosti na rovnost, dostáváme v souřadnicích  $X, Y$  rovnici tzv. *Popovovy přímky*

$$X - qY + \frac{1}{k} = 0 \quad (4.390)$$

Tato přímka má směrnici  $\frac{1}{q}$  a vytíná na ose  $X$  úsek  $-\frac{1}{k}$ . Vyneseme-li nyní do těchto souřadnic pro určité  $\omega$  bod o souřadnicích  $X(\omega), Y(\omega)$  podle rovnic (4.388) a bude-li tento bod ležet vpravo od Popovovy přímky, pak pro toto  $\omega$  bude zřejmě nerovnost (4.389), a tedy i (4.384), splněna. Provedeme-li tento test pro všechna  $\omega \geq 0$ , dostaneme v rovině  $X, Y$  hodograf, jehož parametrem bude  $\omega$ . Ztotožníme-li nyní osu  $X$  resp.  $Y$  s reálnou resp. imaginární osou, můžeme výše uvedený hodograf chápat jako jakousi *modifikovanou frekvenční charakteristiku*, kterou označíme  $F^*(j\omega)$

$$F^*(j\omega) = \Re F(j\omega) + j\omega \Im F(j\omega) \quad (4.391)$$

Popovův teorém pak můžeme formulovat následovně:

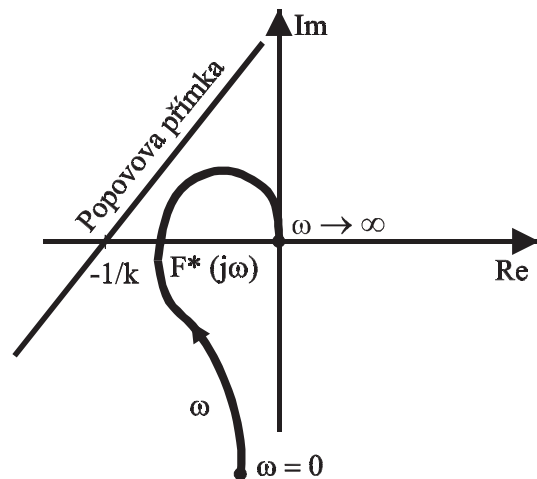
**Věta 4.12** *Nelineární systém vyhovující podmínkám Popovova kritéria je globálně asymptoticky stabilní tehdy, jestliže lze bodem  $-\frac{1}{k}$  na reálné ose vést přímku tak, že modifikovaná frekvenční charakteristika  $F^*(j\omega)$  leží pro všechna  $\omega \geq 0$  napravo od této přímky, viz. obr. 4.74.*

**Příklad 4.51** *Na obr. 4.75 je nakreslen reléový regulační obvod. Je zapotřebí stanovit, jaké podmínky musí splňovat nelinearita, aby systém byl globálně asymptoticky stabilní při nulovém vstupním signálu.*

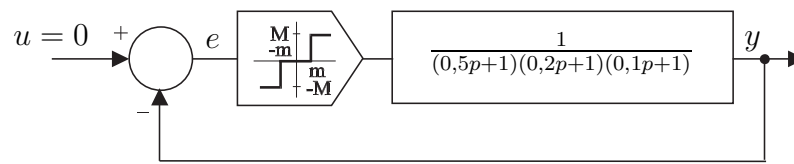
*Modifikovaná frekvenční charakteristika systému je určena výrazem  $F^*(j\omega)$ , u kterého platí*

$$\begin{aligned}\Re F^*(j\omega) &= \Re F(j\omega) = \frac{1 - 0,17\omega^2}{(1 + 0,25\omega^2)(1 + 0,04\omega^2)(1 + 0,01\omega^2)} \\ \Im F^*(j\omega) &= \omega \Im F(j\omega) = \frac{-0,8\omega^2 + 0,01\omega^4}{(1 + 0,25\omega^2)(1 + 0,04\omega^2)(1 + 0,01\omega^2)}\end{aligned}\quad (4.392)$$

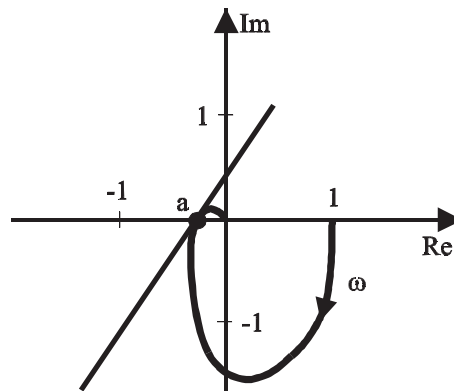
*Náčrt modifikované frekvenční charakteristiky je uveden na obr. 4.76. Z rovnice  $\Im F^*(j\omega) = 0$  dostáváme  $\omega = 8,94$ , po dosazení této frekvence do  $\Re F^*(j\omega)$  dostáváme  $a = \Re F^*(j8,94) = -0,08 = -\frac{1}{k}$ . Tedy  $k = 12,5$ . Aby byl systém globálně asymptoticky stabilní, stačí, aby nelinearita splňovala podmínku  $\frac{M}{m} \leq 12,5$ . Nesplnění této podmínky však neznamená, že by systém musel být nutně nestabilní.*



**Obrázek 4.74:** Zjišťování stability podle Popovova kritéria



Obrázek 4.75: Regulační obvod z příkladu 4.51



Obrázek 4.76: Modifikovaná frekvenční charakteristika systému z příkladu 4.51

K použití Popovova kritéria je zapotřebí systém upravit tak, aby vyhovoval podmínkám kritéria. K tomu se často používá jednoduché transformační techniky, která převede systém do tvaru použitelného pro Popovovo kritérium.

### Transformace posouvající póly

Systém na obr. 4.72 může být upraven podle obr. 4.77. Provedenou úpravou se nemění jeho vlastnosti, změní se však operátorový přenos lineární části

$$F_a(p) = \frac{F(p)}{1 + aF(p)} \quad (4.393)$$

a změní se i nelinearita, pro kterou platí

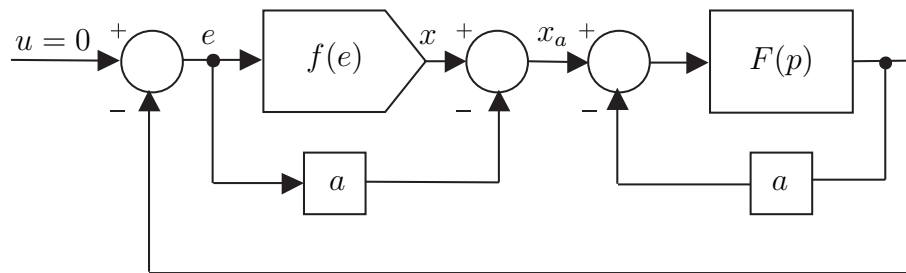
$$x_a = f(e) - ae = f_a(e) \quad (4.394)$$

Jestliže původní nelinearita byla v sektoru omezeném přímkami se směrnici  $k_1$  a  $k_2$ , bude nová nelinearita v sektoru omezeném přímkami se směrnici  $k_1 - a$  a  $k_2 - a$ .

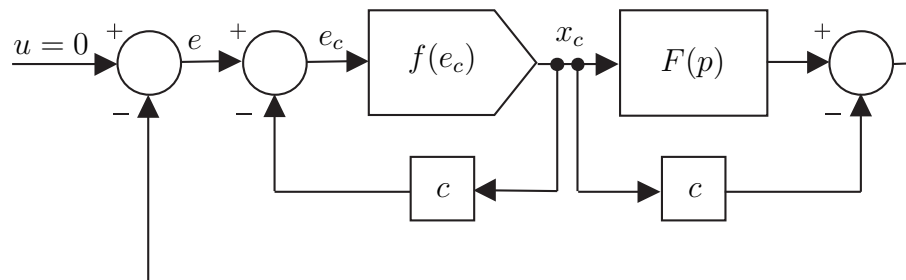
### Transformace měnící tvar nelinearity

Systém z obr. 4.72 může být upraven podle obr. 4.78, aniž by se změnilo jeho chování. Tato transformace změní tvar nelinearity, ale pokud je  $F(p)$  racionální lomená funkce, nemění se její póly. Výslednou nelinearitu  $f_c(e)$  získáme řešením rovnice

$$x_c = f(e - x_c c) \quad (4.395)$$



Obrázek 4.77: Transformace pólů



Obrázek 4.78: Transformace nelinearity

Lineární část má operátorový přenos

$$F_c(p) = F(p) - c \quad (4.396)$$

Je-li původní nelinearita uvnitř sektoru omezeného přímkami se směrnici  $a$  a  $b$ , bude transformovaná nelinearita uvnitř sektoru se směrnici  $\frac{a}{1+ac}$  a  $\frac{b}{1+bc}$ .

#### 4.5.7 Věty o nestabilitě

Všechny dosud diskutované metody poskytovaly možnost ověřit, zda je splněna podmínka postačující k dosažení stability. Nesplnění nalezené podmínky pak automaticky neznamená nestabilitu systému. V některých případech je naopak užitečné ověřit za jakých podmínek bude systém nestabilní. Uvedeme proto nyní ve stručnosti základní metody pro vyšetření nestability.

##### Věta 4.13 Četajevova věta o nestabilitě

Nechť systém (4.325) má rovnovážný stav v počátku stavového prostoru a nechť funkce  $V(\mathbf{x})$  má spojitou první derivaci a platí

- $V(\mathbf{0}) = 0$
- pro libovolně malé  $\varepsilon > 0$  existuje bod  $\mathbf{x}$  takový, že  $\|\mathbf{x}\| < \varepsilon$  a  $V(\mathbf{x}) > 0$
- existuje takové  $\delta$ -okolí počátku souřadnic  $\mathbb{B}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \delta\}$ , že pro každé  $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$ , kde  $\mathbb{U} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{B}_\delta \mid V(\mathbf{x}) > 0\}$ , platí  $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} > 0$

Pak je rovnovážný bod v počátku stavového prostoru nestabilní.

**Příklad 4.52** Předpokládejme systém popsaný stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1 + g_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + g_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{4.397}$$

kde nelineární funkce  $g_1, g_2$  splňují podmínku

$$\begin{aligned}|g_1(x_1, x_2)| &\leq k(x_1^2 + x_2^2) \\ |g_2(x_1, x_2)| &\leq k(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}\tag{4.398}$$

na oblasti  $\mathbb{D}$  zahrnující počátek stavové roviny. Je zřejmé, že systém má rovnovážný bod v počátku stavové roviny. Chceme zjistit, zda je tento rovnovážný bod stabilní.

Zvolme funkci

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)\tag{4.399}$$

Pro  $x_2 = 0$  je  $V(\mathbf{x}) > 0$  libovolně blízko počátku. Derivace funkce  $V$  na stavové trajektorii je

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = x_1 \frac{dx_1}{dt} - x_2 \frac{dx_2}{dt} = x_1^2 + x_2^2 + x_1 g_1(x_1, x_2) - x_2 g_2(x_1, x_2)\tag{4.400}$$

Velikost členu  $x_1 g_1(x_1, x_2) - x_2 g_2(x_1, x_2)$  splňuje nerovnost

$$\begin{aligned}|x_1 g_1(x_1, x_2) - x_2 g_2(x_1, x_2)| &\leq |x_1 g_1(x_1, x_2)| + |x_2 g_2(x_1, x_2)| \leq \\ &\leq (|x_1| + |x_2|)k(x_1^2 + x_2^2) \leq 2k(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}\tag{4.401}$$

a proto

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \geq x_1^2 + x_2^2 - 2k(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}} = (x_1^2 + x_2^2) \left(1 - 2k\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\tag{4.402}$$

Je zřejmé, že zvolíme-li  $\delta$  takové, že  $\mathbb{B}_\delta \subset \mathbb{D}$  a  $\delta < \frac{1}{2k}$  budou podmínky věty 4.13 splněny a rovnovážný bod je tedy nestabilní.

**Věta 4.14 První Ljapunovova věta o nestabilitě**

Nechť systém (4.325) má rovnovážný stav v počátku stavového prostoru. Jestliže existuje spojitá funkce  $V(\mathbf{x})$  se spojitou první derivací taková, že v oblasti  $\mathbb{D}$  zahrnující počátek platí

- $V(\mathbf{0}) = 0$
- $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt}$  je pozitivně definitní
- $V(\mathbf{x})$  není negativně definitní nebo semidefinitní v libovolně malém  $\varepsilon$  okolí počátku stavového prostoru



pak je rovnovážný bod v počátku stavového prostoru nestabilní.

**Příklad 4.53** Předpokládejme systém popsaný stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^4) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^4)\end{aligned}\tag{4.403}$$

Chceme zjistit, zda je rovnovážný bod  $(0, 0)$  stabilní.

Pokud provedeme linearizaci kolem rovnovážného stavu  $(0, 0)$ , dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1\end{aligned}\tag{4.404}$$

Vlastní čísla systému jsou  $\pm j$  a o stabilitě nelze tedy rozhodnout na základě linearizace. Zvolme funkci

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2\tag{4.405}$$

Její derivace je

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = 2x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt} = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^4)\tag{4.406}$$

Je zřejmé, že  $V(\mathbf{x})$  i  $\dot{V}(\mathbf{x})$  je pozitivně definitní. Jsou tedy splněny podmínky věty 4.14 a rovnovážný stav systému je nestabilní.

**Věta 4.15 Druhá Ljapunovova věta o nestabilitě**

Nechť systém (4.325) má rovnovážný stav v počátku stavového prostoru. Jestliže existuje spojitá funkce  $V(\mathbf{x})$  se spojitou první derivací taková, že v oblasti  $\mathbb{D}$  zahrnující počátek platí

- $V(\mathbf{0}) = 0$
- $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \lambda V(\mathbf{x}) + W(\mathbf{x})$ , kde  $\lambda > 0$  a  $W(\mathbf{x})$  je pozitivně semidefinitní
- $V(\mathbf{x})$  není negativně definitní nebo semidefinitní v libovolně malém  $\varepsilon$  okolí počátku stavového prostoru

pak je rovnovážný bod v počátku stavového prostoru nestabilní.

**Příklad 4.54** Uvažujme systém popsaný rovnicemi

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1 + 2x_2 + x_1x_2^2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1 + x_2 - x_1^2x_2\end{aligned}\tag{4.407}$$

Chceme zjistit, zda je rovnovážný stav  $(0, 0)$  stabilní.

Zvolíme

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2 \quad (4.408)$$

Tato funkce není sice pozitivně definitní, avšak není ani negativně definitní na libovolně malém okolí počátku stavového prostoru (může nabývat kladných hodnot např. pro  $x_2 = 0$ )  
Její derivace je

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = 2x_1 \frac{dx_1}{dt} - 2x_2 \frac{dx_2}{dt} = 2x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1^2 x_2^2 = 2V(\mathbf{x}) + 4x_1^2 x_2^2 \quad (4.409)$$

Vzhledem k tomu, že výraz  $4x_1^2 x_2^2$  je pozitivně semidefinitní, jsou splněny podmínky věty 4.15 a rovnovážný bod je nestabilní.

#### 4.5.8 Shrnutí kapitoly 4.5

Stabilita nelineárních systémů je mnohem komplikovanější pojem, než v případě lineárních systémů. Uvedli jsme několik definic stability, které se všechny používají v praktických případech. Dle uvedených definic lze často za stabilní považovat i takové chování systému, které odpovídá meznímu cyklu. Základní metodou vyšetřování stability nelineárních systémů je použití Ljapunovovy funkce. Její volba není často jednoduchá avšak v řadě případů lze využít volby Ljapunovovy funkce na základě sledování energetické bilance systému. Ljapunovova metoda pak umožňuje určit postačující podmínky pro dosažení stability nelineárního systému.

#### 4.5.9 Kontrolní otázky pro kapitolu 4.5

1. Jaký je rozdíl mezi první a druhou Ljapunovovou metodou?
2. Jaké požadavky musí splňovat Ljapunovova funkce?
3. Pokud se nám nepodaří najít vhodnou Ljapunovovu funkci, znamená to, že je systém nestabilní?
4. Může být systém, který nemá rovnovážný stav asymptoticky stabilní?

Správné odpovědi jsou uvedeny v dodatku A.

#### 4.5.10 Řešené příklady pro kapitolu 4.5

**Příklad 4.55** V příkladě 4.6 jsme se zabývali výpočtem rovnovážných stavů obvodu s tunelovou diodou. Nyní určíme, zda jsou rovnovážné stavy systému stabilní. Pokud budeme uvažovat aproximaci voltampérové charakteristiky tunelové diody

$$h(u_C) = [17,76u_C - 103,79u_C^2 + 229,62u_C^3 - 226,31u_C^4 + 83,72u_C^5]10^{-3} \quad (4.410)$$

kte  $u_D = u_C$  (obr. 4.4) a další parametry obvodu jsou  $U = 1,2V$ ,  $R = 1,5k\Omega$ ,  $C = 2pF$  a  $L = 5\mu H$ , určíme rovnovážné stavy numerickým řešením rovnice (4.28). Fyzikální význam

mají pouze reálné hodnoty  $u_{C0}$ . Po dosazení do vztahu (4.27) pak dostaneme příslušné hodnoty proudu v rovnovážném stavu  $i_{L0}$ . Rovnovážné stavy tedy jsou

$$\mathbf{x}_0 = \{(u_{C0}; i_{L0})\} = \{(0,063; 0,758 \cdot 10^{-3}), (0,285; 0,61 \cdot 10^{-3}), (0,884; 0,21 \cdot 10^{-3})\} \quad (4.411)$$

Stabilitu určíme první Ljapunovovou metodou. Budeme tedy vycházet z linearizace systému v okolí jednotlivých rovnovážných stavů. Linearizaci jsme již vypočetli během příkladu 4.12, kde jsme získali matici systému pro lineární náhradu ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_C} & \frac{\partial f_1}{\partial i_L} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_C} & \frac{\partial f_2}{\partial i_L} \end{bmatrix}_{u_{C0}, i_{L0}} = \begin{bmatrix} -0,5 \cdot 10^{12} \frac{dh(u_C)}{du_C} & 0,5 \cdot 10^{12} \\ -0,2 \cdot 10^6 & -0,3 \cdot 10^9 \end{bmatrix}_{u_{C0}} = \\ &= 10^5 \begin{bmatrix} -5 \cdot 10^6 \frac{dh(u_C)}{du_C} & 5 \cdot 10^6 \\ -2 & -3000 \end{bmatrix}_{u_{C0}} \end{aligned} \quad (4.412)$$

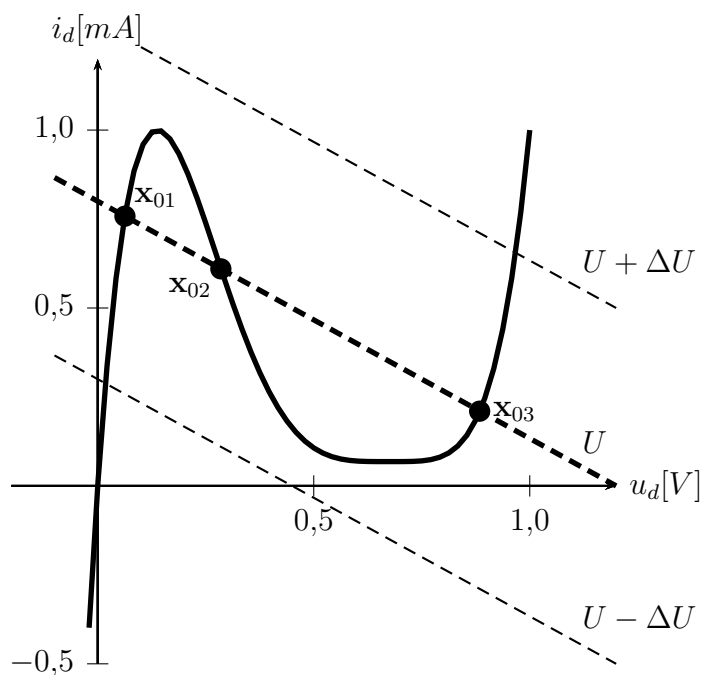
kde

$$\frac{dh(u_C)}{du_C} = [17,76 - 207,58u_C + 688,86u_C^2 - 905,24u_C^3 + 418,6u_C^4]10^{-3} \quad (4.413)$$

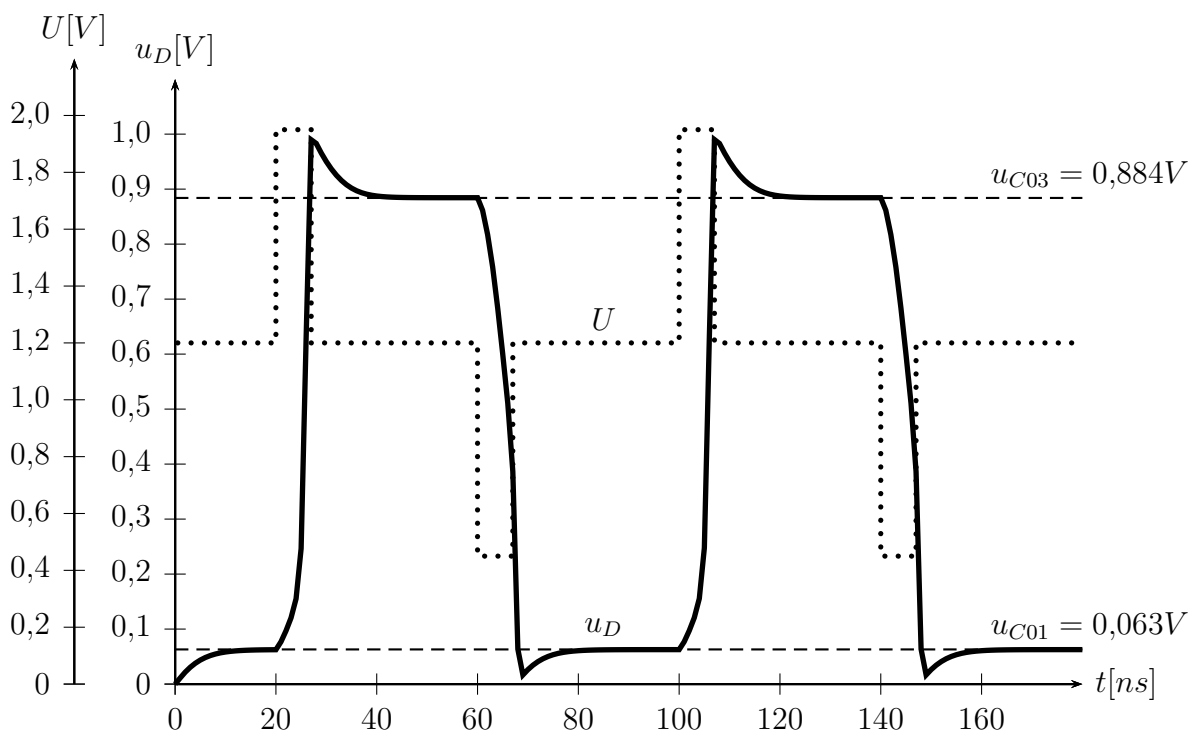
Pro posouzení stability vypočteme vlastní čísla lineární náhrady v každém z rovnovážných stavů

$$\begin{aligned} u_{C01} = 0,063 \quad \mathbf{A} &= 10^5 \begin{bmatrix} -35984 & 5 \cdot 10^6 \\ -2 & -3000 \end{bmatrix} & \lambda_{11} = -3,57 & \lambda_{21} = -0,33 \\ u_{C02} = 0,285 \quad \mathbf{A} &= 10^5 \begin{bmatrix} 18207 & 5 \cdot 10^6 \\ -2 & -3000 \end{bmatrix} & \lambda_{12} = 1,77 & \lambda_{22} = -0,25 \\ u_{C03} = 0,884 \quad \mathbf{A} &= 10^5 \begin{bmatrix} -14274 & 5 \cdot 10^6 \\ -2 & -3000 \end{bmatrix} & \lambda_{13} = -1,33 & \lambda_{23} = -0,4 \end{aligned} \quad (4.414)$$

Vidíme, že lineární náhrada je v prvním a třetím případě stabilní (vlastní čísla matice systému jsou v levé polorovině), zatímco v druhém případě je náhrada nestabilní. Na základě první Ljapunovovy metody lze tedy říci, že v okolí rovnovážných stavů  $(0,063; 0,758 \cdot 10^{-3})$  a  $(0,884; 0,21 \cdot 10^{-3})$  je systém lokálně asymptoticky stabilní, zatímco v okolí rovnovážného stavu  $(0,285; 0,61 \cdot 10^{-3})$  není lokálně asymptoticky stabilní. U řešeného obvodu se zjištěné vlastnosti prakticky využívá – jedná se o bistabilní obvod, jehož stav lze řídit pulsy napětí  $U$ . Pokud zvýšíme řídicí napětí  $U$  o dostatečně velkou hodnotu  $\Delta U$  (obr. 4.79), dojde k přechodu do stavu  $\mathbf{x}_{03}$ . Podmínkou je, že změna řídicího napětí trvá po dostatečně dlouhou dobu. Jestliže řídicí napětí naopak na okamžik snížíme hodnotu  $\Delta U$ , přejde systém do stavu  $\mathbf{x}_{01}$ . V dosažených stavech pak setrvá, i když se řídicí napětí vrátí zpět na původní hodnotu. Této vlastnosti bylo dříve užíváno v paměťových obvodech. Časový průběh napětí na diodě je pak zobrazen na obr. 4.80.

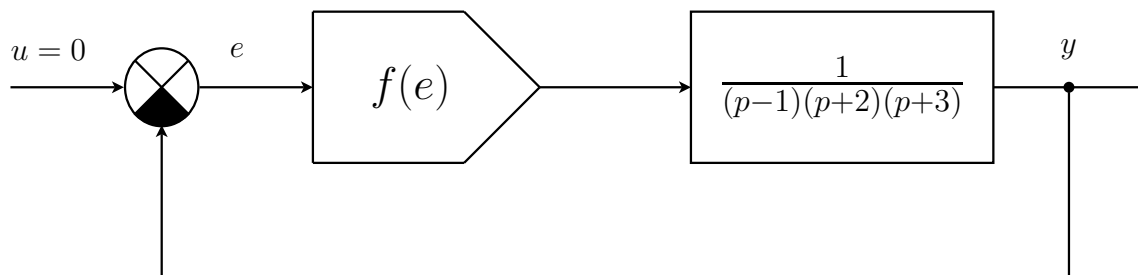


Obrázek 4.79: Charakteristika bistabilního obvodu s tunelovou diodou



Obrázek 4.80: Napětí na tunelové diodě během přechodu mezi rovnovážnými stavy

**Příklad 4.56** Předpokládejme nelineární dynamický systém popsany stavovými rovni-



Obrázek 4.81: Blokové schéma systému z příkladu 4.57

*cemi*

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -6x_1 + 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3\end{aligned}\tag{4.415}$$

Systém má rovnovážný stav v počátku stavové roviny. Chceme určit, zda je tento rovnovážný stav stabilní. Pro nalezení Ljapunovovy funkce použijeme Krasovského metodu. Jacobiho matice systému je

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 - 6x_2^2 \end{bmatrix}\tag{4.416}$$

Pokud zvolíme matici  $\mathbf{L}$  jako jednotkovou dostaneme

$$\mathbf{T} = \mathbf{J}^T \mathbf{L} + \mathbf{LJ} = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 - 12x_2^2 \end{bmatrix}\tag{4.417}$$

Na základě Sylvestrova kritéria je zřejmé, že matice  $\mathbf{T}$  je negativně definitní pro libovolnou hodnotu  $x_2$ . Podle Krasovského metody můžeme tedy Ljapunovovu funkci zvolit jako

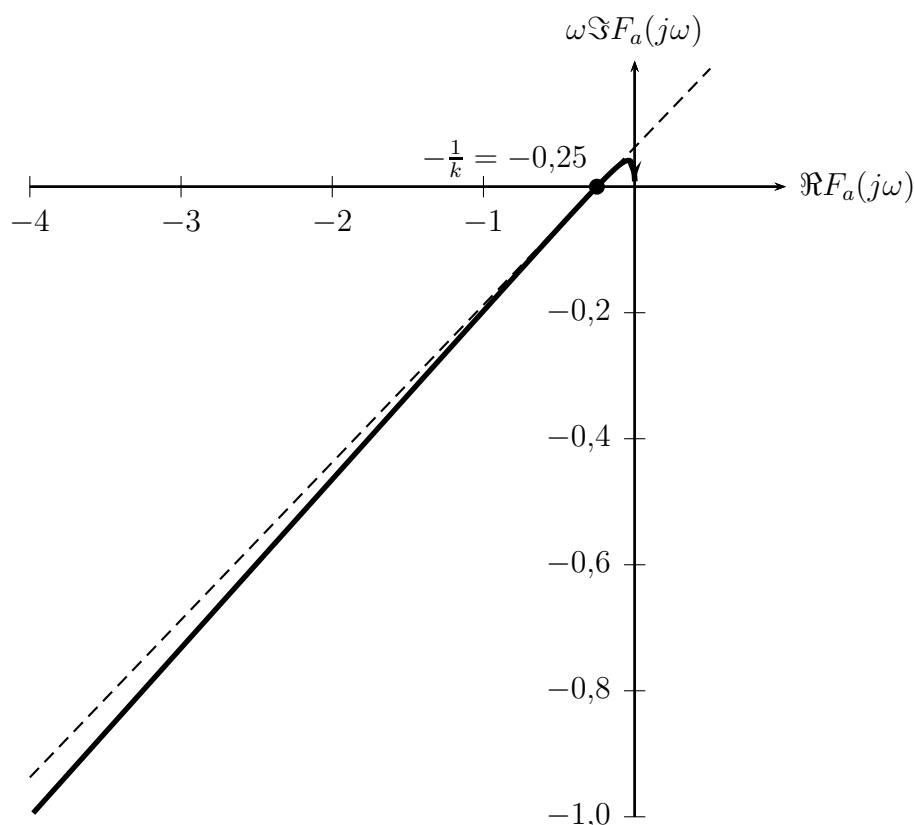
$$V(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{f}; \mathbf{Lf} \rangle = \mathbf{f}^T \mathbf{f} = (-6x_1 + 2x_2)^2 + (2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3)^2\tag{4.418}$$

Nalezli jsme tedy pozitivně definitní Ljapunovovu funkci, jejíž časová derivace je na základě Krasovského metody negativně definitní, a vzhledem k tomu, že  $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = \infty$ , je rovnovážný stav v počátku stavové roviny globálně asymptoticky stabilní.

**Příklad 4.57** Na obr. 4.81 je zakresleno blokové schéma nelineárního systému. Chceme určit, jaké postačující podmínky musí splňovat nelinearita  $f(e)$ , aby bylo dosaženo globální asymptotické stability.

Pro ověření stability použijeme Popovovo kritérium. Vzhledem k tomu, že lineární část systému

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)(p+2)(p+3)}\tag{4.419}$$



**Obrázek 4.82:** Modifikovaná frekvenční charakteristika  $F_a^*(j\omega)$  systému z příkladu 4.57

je nestabilní, nelze Popovovo kritérium použít přímo. Systém nejdříve upravíme transformací posouvající póly systému

$$F_a(p) = \frac{F(p)}{1 + aF(p)} = \frac{1}{(p-1)(p+2)(p+3) + a} = \frac{1}{p^3 + 4p^2 + p - 6 + a} \quad (4.420)$$

Přípustné hodnoty parametru  $a$  snadno určíme pomocí Hurwitzova kritéria stability

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ a-6 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.421)$$

$$D_1 = 4 \quad D_2 = 10 - a$$

Vidíme, že přenos  $F_a(p)$  bude stabilní pro  $6 < a < 10$ . Zvolíme-li  $a = 6$  dostaneme systém na mezi stability

$$F_a(p) = \frac{1}{p(p^2 + 4p + 1)} \quad (4.422)$$

Modifikovaná frekvenční charakteristika  $F_a^*(j\omega)$  je zakreslena na obr. 4.82, přičemž Popovova přímka je vykreslena čárkovaně. Polohu průsečíku určíme z rovnice

$$\Im F_a^*(j\omega) = \frac{\omega^2 - 1}{\omega^4 + 14\omega^2 + 1} = 0 \quad (4.423)$$

odkud dostaneme  $\omega = 1$ . Dosazením do reálné části modifikované frekvenční charakteristiky pak získáme

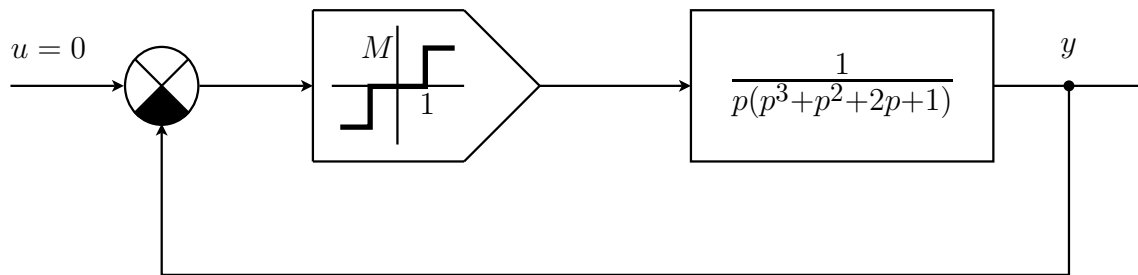
$$\Re F_a^*(j\omega)_{\omega=1} = \left( \frac{-4}{\omega^4 + 14\omega^2 + 1} \right)_{\omega=1} = -0,25 = -\frac{1}{k} \quad (4.424)$$

Aby byl tedy systém stabilní, musí platit, že modifikovaná nelinearita  $f_a(e)$  se musí nacházet v sektoru  $0 < \frac{f_a(e)}{e} \leq 4$ . Protože jsme uvažovali hodnotu parametru  $a = 6$ , musí pro původní nelinearitu platit

$$6 < \frac{f(e)}{e} \leq 10 \quad (4.425)$$

#### 4.5.11 Neřešené příklady pro kapitolu 4.5

**Příklad 4.58** Pro systém uvedený na blokovém schématu obr. 4.83 určete maximální možnou hodnotu  $M$ , tak aby systém byl globálně asymptoticky stabilní.



Obrázek 4.83: Blokové schéma systému z příkladu 4.58

**Příklad 4.59** Systém je popsán rovnicí

$$\frac{dx}{dt} = ax + bx^5 \quad (4.426)$$

Pomocí první Ljapunovovy metody rozhodněte, pro jaké hodnoty parametru  $a$  je rovnovážný stav  $x = 0$  lokálně asymptoticky stabilní.

**Příklad 4.60** Metodou variabilního gradientu rozhodněte, zda je systém

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -2x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2x_2 + 2x_1x_2^2 \end{aligned} \quad (4.427)$$

stabilní v okolí rovnovážného stavu  $x_1 = x_2 = 0$ .

## 5 Řízení nelineárních systémů

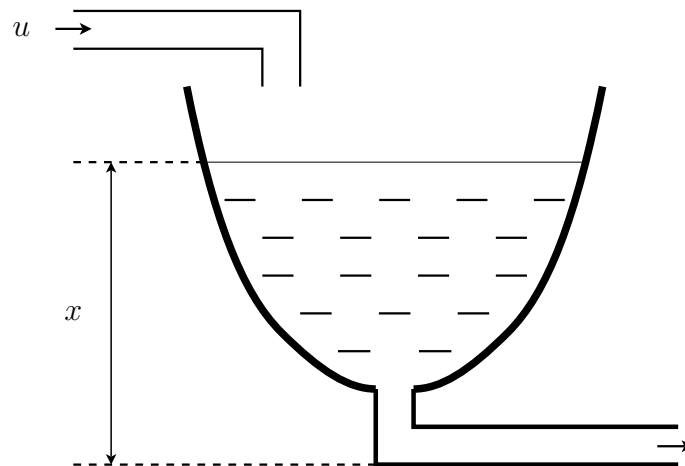
### 5.1 Řízení v okolí zvoleného pracovního bodu

#### 5.1.1 Motivace

Během kurzu Regulace a řízení I byla diskutována řada metod pro návrh regulátoru pro lineární systém. Tyto metody nemohou být použity přímo pro návrh řízení nelineárních systémů. V řadě případů však budeme řešit takové úlohy, kde regulace má probíhat v blízkosti zvoleného pracovního bodu. Nabízí se tedy možnost náhrady nelineárního systému jeho přibližnou lineární aproximací, která bude platit v okolí pracovního bodu. Pro tuto lineární náhradu lze pak obvykle snadno najít vhodný regulátor metodami známými z teorie lineárních systémů.

#### 5.1.2 Lineární řízení v okolí pracovního bodu

V kapitole 4.2 jsme ukázali, že lze za podmínky, že je možné rozvinout funkce na pravé straně stavových rovnic do Taylorovy řady, poměrně lehce najít lineární náhradu systému, platnou v okolí zvoleného pracovního bodu. Za pracovní bod obvykle volíme rovnovážný stav regulačního obvodu, který odpovídá aktuální žádané hodnotě. Pokud budeme předpokládat, že se stav systému bude pohybovat pouze v blízkosti zvoleného pracovního bodu. Možný návrh regulátoru si ukážeme na jednoduchém příkladě.



Obrázek 5.1: Schema systému k výkladu návrhu regulátoru pro linearizovaný systém

**Příklad 5.1** *Pokusíme se navrhnout regulátor pro řízení systému, který je zobrazen na obr. 5.1. Řízený systém můžeme popsat rovnicí*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\beta(x)} (u - c\sqrt{2x}) = f(x, u) \quad (5.1)$$

*kde  $x$  odpovídá výšce hladiny v nádrži,  $\beta(x)$  je průřez nádrže ve výšce  $x$  a  $c$  představuje konstantu danou tíhovým zrychlením a průřezem a hydraulickým odporem odtokového*



potrubí. Chceme vytvořit regulátor, který zajistí, že hodnota  $x$  bude sledovat referenci  $x_r$ . Pokud má žádaná výška hladiny hodnotu  $x_r = \alpha$ , měl by mít systém rovnovážný stav  $x_0 = \alpha$ . Hodnotu řízení v pracovním bodě  $u_0$  pak určíme z

$$0 = \frac{1}{\beta(x_0)} (u_0 - c\sqrt{2x_0}) = \frac{1}{\beta(\alpha)} (u_0 - c\sqrt{2\alpha}) \quad (5.2)$$

a tedy

$$u_0 = c\sqrt{2\alpha} \quad (5.3)$$

Nyní provedeme linearizaci systému (5.1) v okolí pracovního bodu  $x_0 = \alpha$ ,  $u_0 = c\sqrt{2\alpha}$ , čímž dostaneme lineární systém

$$\frac{d\Delta x}{dt} = a(\alpha)\Delta x + b(\alpha)\Delta u \quad (5.4)$$

kde  $\Delta x = x - \alpha$   $\Delta u = u - c\sqrt{2\alpha}$  a

$$a(\alpha) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\alpha, u=c\sqrt{2\alpha}} = \left[ \frac{1}{\beta(x)} \frac{-c}{\sqrt{2x}} - \frac{\beta'(x)}{\beta^2(x)} (u - c\sqrt{2x}) \right]_{x=\alpha, u=c\sqrt{2\alpha}} = -\frac{c\sqrt{2\alpha}}{2\alpha\beta(\alpha)} \quad (5.5)$$

$$b(\alpha) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=\alpha, u=c\sqrt{2\alpha}} = \left. \frac{1}{\beta(x)} \right|_{x=\alpha} = \frac{1}{\beta(\alpha)}$$

Pokud budeme považovat veličinu  $x$  za výstup systému, můžeme jeho chování v blízkosti pracovního bodu popsat operátorovým přenosem

$$F_S(p) = \frac{\Delta X(p)}{\Delta U(p)} = \frac{b(\alpha)}{p - a(\alpha)} = \frac{1}{p + \frac{c}{\sqrt{2\alpha}}} \quad (5.6)$$

Pro tento přenos můžeme navrhnout např. PI regulátor.

Pokud provedeme návrh regulátoru pro linearizovaný systém jako v předchozím příkladu, musíme zvážit dvě možnosti:

- navrhnete pevný regulátor pro jeden pracovní bod – je zřejmé, že regulátor bude správně pracovat jen v blízkosti zvoleného pracovního bodu, což je vhodné jen v aplikacích, kde nepředpokládáme změny žádané hodnoty. Pokud dojde ke změně žádané hodnoty a tím i pracovního bodu, není možné garantovat zachování dynamických vlastností regulačního obvodu a v některých případech i stability.
- použijeme regulátor parametrizovaný podle polohy pracovního bodu, který se může měnit – regulátor se bude přizpůsobovat změnám pracovního bodu, čímž lze zajistit stejné dynamické vlastnosti regulačního obvodu pro různé velikosti žádané hodnoty. V závislosti na pracovním bodu měníme zesílení regulátoru, proto tato metoda bývá v literatuře označována jako „gain-scheduling“.

Postup si opět ukážeme na příkladě.

**Příklad 5.2** Předpokládejme, že pro řízení systému z příkladu 5.1 použijeme PI regulátor popsaný stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dt} &= e \\ \Delta u &= k_1 e + k_2 \sigma\end{aligned}\quad (5.7)$$

kde

$$e = x_r - x = \alpha - x = -\Delta x \quad (5.8)$$

Přenos regulátoru tedy je

$$F_R(p) = k_1 + k_2 \frac{1}{p} \quad (5.9)$$

zatímco přenos soustavy je dán vztahem (5.6). Přenos uzavřené smyčky bude

$$F(p) = \frac{F_R(p)F_S(p)}{1 + F_R(p)F_S(p)} = \frac{k_1 b p + k_2 b}{p^2 + p(-a + k_1 b) + k_2 b} \quad (5.10)$$

Předpokládejme požadovaný tvar jmenovatele přenosu

$$p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 \quad \omega_0^2 > 0 \quad 0 < \xi < 1 \quad (5.11)$$

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$k_1(\alpha) = \frac{2\xi\omega_0 + a(\alpha)}{b(\alpha)} \quad k_2(\alpha) = \frac{\omega_0^2}{b(\alpha)} \quad (5.12)$$

Konstanty regulátoru se tedy mění v závislosti na žádané hodnotě  $x_r = \alpha$ . Popis regulátoru

$$F_R(p) = k_1(\alpha) + k_2(\alpha) \frac{1}{p} \quad k_1(\alpha) = \frac{2\xi\omega_0 + a(\alpha)}{b(\alpha)} \quad k_2(\alpha) = \frac{\omega_0^2}{b(\alpha)} \quad (5.13)$$

snadno upravíme do tvaru

$$F_R(p) = k(\alpha) \left( 1 + \frac{1}{T(\alpha)p} \right) \quad k(\alpha) = \frac{2\xi\omega_0 + a(\alpha)}{b(\alpha)} \quad T(\alpha) = \frac{2\xi\omega_0 + a(\alpha)}{\omega_0^2} \quad (5.14)$$

Pro jednoduchost budeme dále předpokládat, že budeme požadovat málo kmitavý a rychlý přechodový děj, a tedy že  $|a(\alpha)| \ll 2\xi\omega_0$ . Pak dostaneme

$$k(\alpha) \approx \frac{2\xi\omega_0}{b(\alpha)} = 2\xi\omega_0\beta(\alpha) \quad T(\alpha) \approx \frac{2\xi\omega_0}{\omega_0^2} = \frac{2\xi}{\omega_0} \quad (5.15)$$

Měníme tedy jen jeden parametr  $k(\alpha)$  v závislosti na žádané hodnotě  $\alpha$  a přenos regulátoru bude

$$F_R(p) = 2\xi\omega_0\beta(\alpha) \left( 1 + \frac{\omega_0}{2\xi p} \right) = \frac{2\xi\omega_0\beta(\alpha)p + \omega_0^2\beta(\alpha)}{p} \quad (5.16)$$

Přenos uzavřené smyčky vypočtený spojením lineárního regulátoru s linearizovanou soustavou ve zpětnovazebním zapojení je

$$F(p) = \frac{F_R F_S}{1 + F_R F_S} = \frac{b(\alpha)(2\xi\omega_0\beta(\alpha)p + \omega_0^2\beta(\alpha))}{p^2 + p(b(\alpha)\beta(\alpha)2\xi\omega_0 - a(\alpha)) + b(\alpha)\beta(\alpha)\omega_0^2} = \frac{2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}{p^2 + p(2\xi\omega_0 - a(\alpha)) + \omega_0^2} \quad (5.17)$$

V tomto okamžiku se zdá, že jsme našli vhodné řešení. Pokusme se však zkontrolovat, jaké bude chování původního nelineárního systému (5.1) řízeného navrženým regulátorem (5.16). Stavové rovnice systému s regulátorem jsou

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{\beta(x)} \left( k(x_r) \left( x_r - x + \frac{1}{T}\sigma \right) - c\sqrt{2x} \right) \\ \frac{d\sigma}{dt} &= x_r - x \end{aligned} \quad (5.18)$$

kde  $x_r$  je vstup a  $x$  výstup systému. Rovnovážný stav při  $x_r = \alpha$  je  $x_0 = \alpha$  a  $\sigma_0 = \frac{c\sqrt{2\alpha}}{\omega_0^2\beta(\alpha)}$ . Provedeme linearizaci systému (5.18) kolem rovnovážného stavu  $(x_0, \sigma_0)$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{d\Delta x}{dt} \\ \frac{d\Delta\sigma}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a(\alpha) - 2\xi\omega_n & \omega_n^2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta\sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi\omega_0 + \gamma(\alpha) \\ 1 \end{bmatrix} \Delta x_r \\ \Delta y &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta\sigma \end{bmatrix} \\ \gamma(\alpha) &= \frac{\left. \frac{dk(x_r)}{dx_r} \right|_{x_r=\alpha} \sigma_0(\alpha)}{T\beta(\alpha)} \end{aligned} \quad (5.19)$$

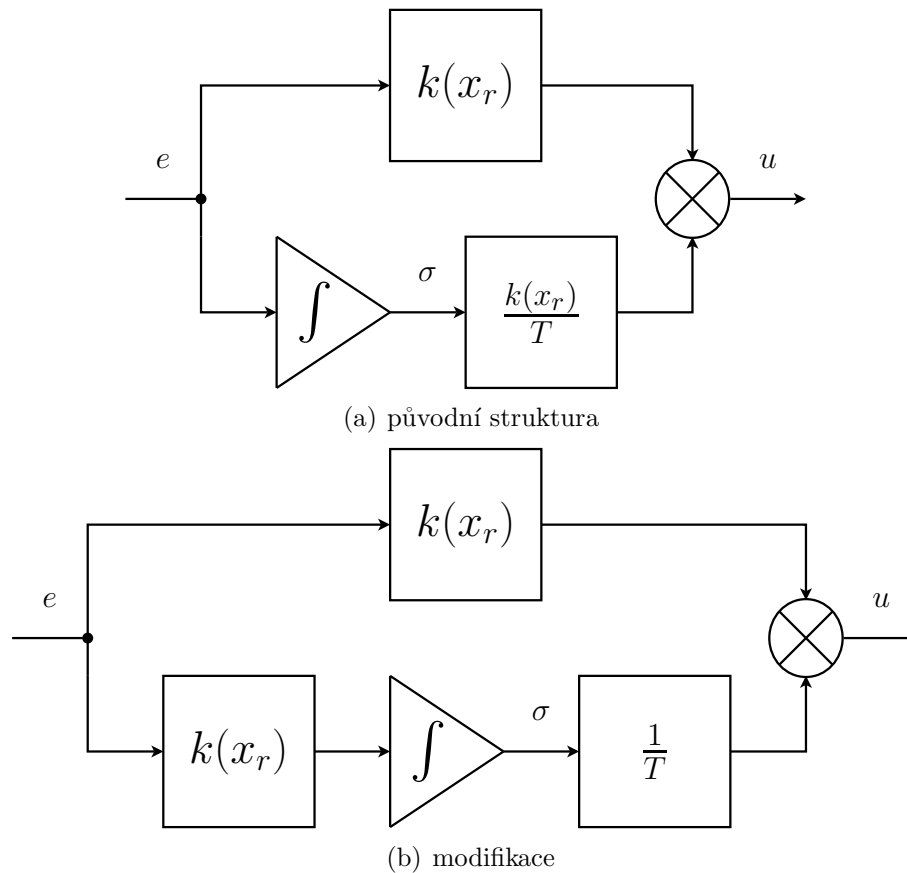
Operátorový přenos systému vypočteme ze vztahu

$$F(p) = \left[ \frac{1}{\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})} \mathbf{C} \operatorname{adj}(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathbf{D} \right] = \frac{(2\xi\omega_0 + \gamma(\alpha))p + \omega_0^2}{p^2 + p(2\xi\omega_0 - a(\alpha)) + \omega_0^2} \quad (5.20)$$

Vidíme, že operátorový přenos uzavřené smyčky odpovídající řízení linearizovaného (5.17) a původního nelineárního systému (5.20) v okolí pracovního bodu se liší. Skutečné chování regulačního obvodu bude tedy jiné, než bylo předpokládáno během návrhu regulátoru. Pokud nám postačuje, že zůstalo zachováno umístění pólů a schopnost regulovat na nulovou ustálenou odchylku a došlo pouze ke změně dynamiky regulačního děje v důsledku změny polynomu v čitateli, může být navržený regulátor přijatelný. V opačném případě musíme provést takovou úpravu regulátoru, aby došlo ke shodě mezi přenosy vypočtenými oběma postupy.

V našem případě provedeme drobnou úpravu výpočtu PI regulátoru. Místo výpočtu (obr. 5.2(a))

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= e \\ u &= k(x_r) \left( e + \frac{1}{T}\sigma \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$



**Obrázek 5.2:** Struktura PI regulátoru z příkladu 5.2

použijeme (obr. 5.2(b))

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= k(x_r)e \\ u &= k(x_r)e + \frac{1}{T}\sigma \end{aligned} \quad (5.22)$$

Po provedení této na první pohled bezvýznamné úpravy dostaneme stavové rovnice celého regulačního obvodu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{\beta(x)} \left( k(x_r)(x_r - x) + \frac{1}{T}\sigma - c\sqrt{2x} \right) \\ \frac{d\sigma}{dt} &= k(x_r)(x_r - x) \end{aligned} \quad (5.23)$$

kdy rovnovážný stav při  $x_r = \alpha$  je  $x_0 = \alpha, \sigma_0 = cT\sqrt{2\alpha}$ . Opět provedeme linearizaci v

okolí rovnovážného stavu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{d\Delta x}{dt} \\ \frac{d\Delta\sigma}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a(\alpha) - 2\xi\omega_n & \frac{\omega_n}{2\xi\beta(\alpha)} \\ -2\xi\omega_0\beta(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta\sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi\omega_0 \\ 2\xi\omega_0\beta(\alpha) \end{bmatrix} \Delta x_r \\ \Delta y &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta\sigma \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Pokud nyní vypočteme odpovídající operátorový přenos mezi vstupem  $x_r$  a výstupem  $x$ , dostaneme

$$F(p) = \left[ \frac{1}{\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A})} \mathbf{C} \operatorname{adj}(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathbf{D} \right] = \frac{2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}{p^2 + p(2\xi\omega_0 - a(\alpha)) + \omega_0^2} \quad (5.25)$$

Vidíme, že tento přenos již odpovídá vztahu (5.17).

Postup návrhu regulátoru ukázaný v příkladě můžeme shrnout do následujících kroků:

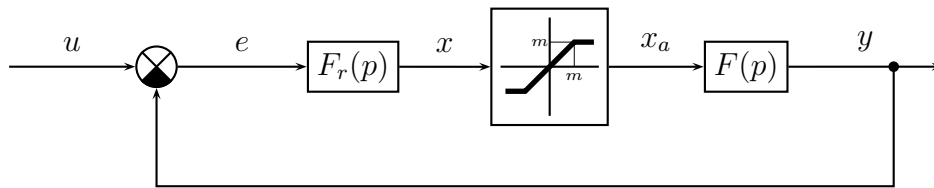
1. linearizovat nelineární model v okolí pracovních bodů, parametrizovat linearizaci pomocí proměnných používaných k přepínání
2. pro jednotlivé pracovní body navrhnout lineární regulátory, parametrizovat regulátory pomocí proměnných používaných k přepínání
3. sestavit takový regulátor s přepínáním, že v každém pracovním bodě platí
  - v konstantním pracovním bodě regulátor dosahuje nulové ustálené odchylky
  - linearizace uzavřené smyčky v každém pracovním bodě se shoduje se zpětnovazebním spojením lineárního regulátoru a linearizace soustavy v daném pracovním bodě
4. ověřit vlastnosti regulátoru simulací pro velké změny pracovního bodu

Pokud dochází k rychlým změnám žádané hodnoty, bude systém pracovat v oblastech značně vzdálených od předpokládaného pracovního bodu. To má za následek zhoršení dynamických vlastností, nebo dokonce i nestabilitu regulačního obvodu. Z tohoto důvodu je metoda „gain-scheduling“ vhodná především pro systémy, u kterých dochází pouze k pomalým změnám žádané hodnoty.

Metodu je možné rovněž modifikovat tak, že jsou zesílení v regulátoru měněna podle okamžité hodnoty stavu systému. Výhodou je zajištění lepších dynamických vlastností, protože prakticky vždy probíhá řízení v blízkosti pracovního bodu (pracovní bod odpovídá okamžité hodnotě stavu). Problémem však je, že musíme mít k dispozici měření hodnot stavových veličin, což není u reálných aplikací vždy možné.

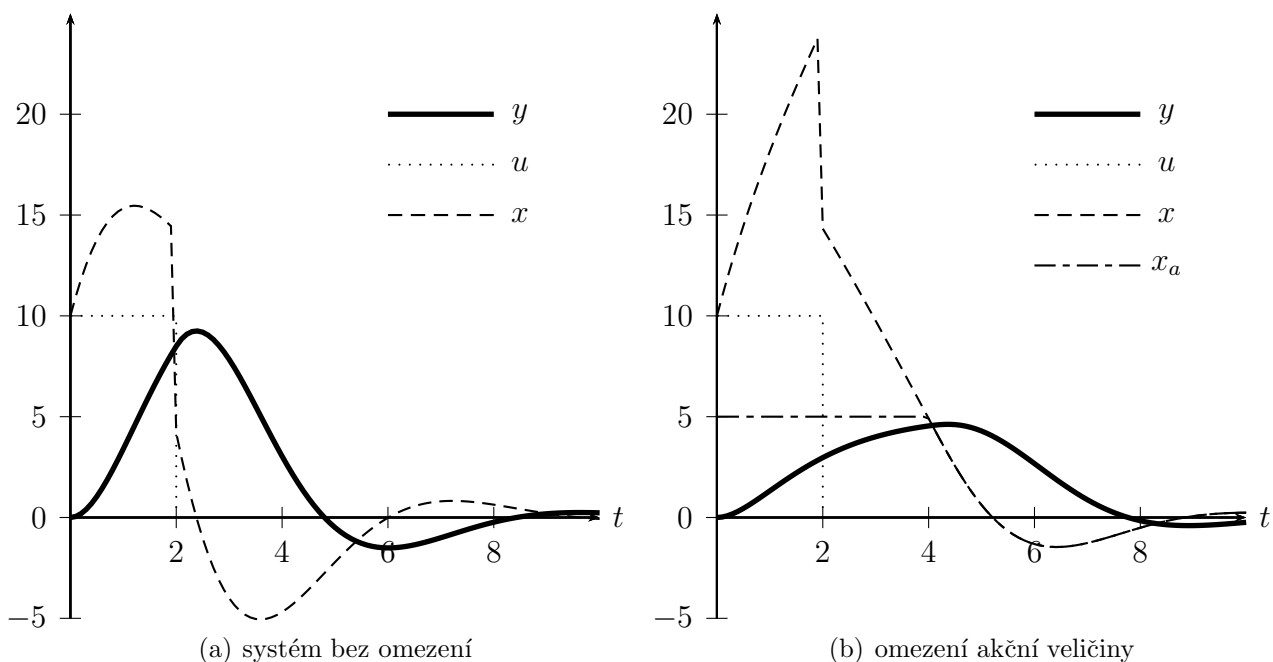
### 5.1.3 Anti wind-up

V některých případech lze předpokládat, že řízený systém je lineární. Obvykle pak navrhne me řízení v podobě lineárního regulátoru. Nicméně i v tomto případě se bude v regulačním obvodu nacházet významná nelinearita – nasycení akční veličiny. Je zřejmé, že v každém reálném fyzikálním systému bude existovat určitá mez, nad kterou nemůže působení regulátoru na soustavu růst (např. omezení maximálního elektrického napětí, omezení síly z důvodu možností akčního členu nebo meze pevnosti mechanických částí soustavy, ...).



**Obrázek 5.3:** Blokové schéma regulačního obvodu s nasycením akční veličiny

Problém nastává, pokud regulační obvod s uspořádáním podle obr. 5.3 obsahuje regulátor  $F_r(p)$  s integrační složkou. Vznik wind-up jevu si objasníme na průběhu veličin zachycených na obr. 5.4 pro systém  $F(p) = \frac{1}{p^2+2p+1}$ ,  $F_r(p) = \frac{p+1}{p}$  a  $m = 5$ .

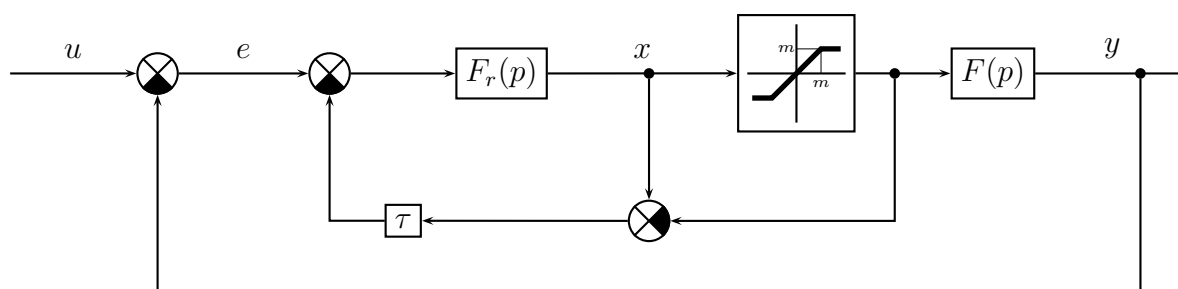


**Obrázek 5.4:** Vznik wind-up jevu

V čase  $t = 0$  dojde ke skokové změně žádané hodnoty  $u = 10$ . Pokud se v regulační smyčce nachází nasycení, bude akční veličina přivedená na vstup soustavy omezena hodnotou nasycení  $m = 5$ . Regulační odchylka bude pak klesat pomaleji než v případě

regulace bez nasycení (obr. 5.4(a)), a její integrací bude docházet k dalšímu růstu výstupu regulátoru, jak je zachyceno na obr. 5.4(b). Je zřejmé, že výstup soustavy nemůže v našem případě dosáhnout žádané hodnoty. Mnohem větší problém však nastává v okamžiku, kdy v čase  $t = 2$  dojde ke snížení žádané hodnoty na  $u = 0$ . Systém bez omezení pak reaguje v podstatě okamžitě a výstup regulačního obvodu začne klesat obr. 5.4(a). Pokud však je v obvodu nasycení, došlo vlivem integrace regulační odchylky k naakumulování velké hodnoty na integrátoru v regulátoru. Při změně znaménka regulační odchylky pak může poměrně dlouhou dobu trvat „odintegrování“ této hodnoty. Z obr. 5.4(b) je zřejmé, že výstup soustavy pak dále roste, i když jeho hodnota výrazně překračuje žádanou hodnotu. Výsledkem je, že dojde k prodloužení regulačního děje, přičemž toto prodloužení lze jen těžko předem odhadnout (závisí na hodnotě zapamatované na integrátoru, která vyplývá z předchozího průběhu žádané veličiny).

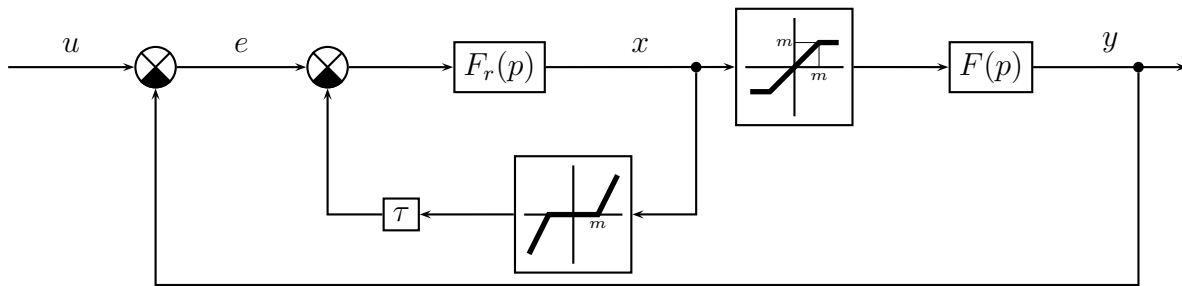
Je zřejmé, že v okamžiku, kdy dosáhneme meze nasycení, nemá další narůst výstupu regulátoru smysl. Je tedy třeba zajistit, aby po dosažení nasycení nepokračovala integrace regulační odchylky v regulátoru. Toho lze dosáhnout mnoha způsoby, z nichž dva obecně použitelné jsou zobrazeny na obr. 5.5 a obr. 5.6.



**Obrázek 5.5:** Potlačení wind-up jevu s měřením skutečné hodnoty akční veličiny

Schéma uvedené na obr. 5.5 vychází z porovnání výstupu regulátoru a hodnoty skutečně přivedené akčním členem na vstup soustavy. Pokud je výstup regulátoru větší než hodnota na vstupu soustavy, došlo k omezení akční veličiny. Na základě vzniklého rozdílu je pak uměle snížena velikost regulační odchylky vstupující do regulátoru, která postupně klesne až na hodnotu 0, a tím i zastaven další nárůst výstupu regulátoru. Zesílením  $\tau$  lze ovlivnit rychlost, s jakou obvod reaguje na vznik nasycení. V případě použití této metody musí být možné měřit skutečnou hodnotu výstupu akčního členu.

Pokud nelze měřit výstup akčního členu, můžeme použít strukturu uvedenou na obr. 5.6. V tomto případě neprovádíme měření akční veličiny, ale odchylku mezi výstupem regulátoru a skutečnou hodnotou akční veličiny odhadujeme pomocí nelinearity typu necitlivost. Pokud výstup regulátoru nepřekročí hodnotu  $m$ , nedochází k nasycení akční veličiny a na výstupu necitlivosti ve zpětné vazbě je hodnota 0. Po dosažení meze nasycení  $m$  začne narůstat hodnota na výstupu necitlivosti. Chování systému pak odpovídá předchozímu případu. Podmínkou použití uvedené metody je znalost meze nasycení akčního členu.



Obrázek 5.6: Potlačení wind-up jevu s modelem omezení akční veličiny

### 5.1.4 Shrnutí kapitoly 5.1

Během kurzu Regulace a řízení I byla uvedena řada metod návrhu regulátorů pro lineární obvody. Tyto regulátory je často možné použít i pro linearizované nelineární systémy. Jednou ze základních metod je metoda „gain-scheduling“, která je založena změně parametrů regulátoru v závislosti na aktuální hodnotě pracovního bodu. Rovněž jsme si ukázali, že i v případě řízení lineárních systémů musíme zohlednit existenci nasycení akční veličiny a zamezit vzniku tzv. „wind-up“ jevu.

### 5.1.5 Kontrolní otázky pro kapitolu 5.1

1. Může vzniknout „wind-up“ jev v regulačním obvodu, kde je použit PD regulátor?
2. Proč se snažíme potlačit „wind-up“ jev?
3. Kdy dochází ke změně parametrů regulátoru při použití metody „gain-scheduling“?
4. Jaké jsou omezující požadavky na průběh žádané hodnoty u metody „gain-scheduling“?

Správné odpovědi jsou uvedeny v dodatku A.

## 5.2 Zpětnovazební linearizace

### 5.2.1 Motivace

Lineární řízení systému linearizovaného rozvojem do Taylorovy řady, jak bylo ukázáno v kapitole 4.2, skrývá jeden základní problém – vypočtená linearizace je platná vždy jen v omezeném okolí pracovního bodu. Můžeme sice uvažovat, že pracovní bod je pohyblivý (kapitola 5.1), nicméně i v tomto případě narazíme na problémy se stabilitou řízení pokud dochází k velkým a rychlým změnám polohy pracovního bodu.

V řadě případů však dokážeme systém linearizovat tak, že linearizace je platná pro jakékoli hodnoty stavů a vstupů. Představme si systém popsany rovnicí

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + u \quad (5.26)$$



pokud použijeme řízení  $u = v - x^2$ , ve kterém vlastně zavedeme zpětnou vazbu od stavu  $x$ , dostaneme lineární systém

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (5.27)$$

pro který můžeme navrhnout řízení  $v$  metodami pro lineární systémy. Uvedená metoda umožňuje dosáhnout přesné linearizace systému a bývá nazývána *exaktní zpětnovazební linearizace*. V této kapitole se pokusíme popsat obecné řešení zpětnovazební linearizace.

### 5.2.2 Linearizace vstup – stav

Předpokládejme, že nelineární dynamický systém je popsán stavovými rovnicemi

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (5.28)$$

Linearizace bude pak spočívat v hledání vhodných transformací stavových proměnných  $\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$  a vstupu  $u$ , tak aby popis systému přešel do tvaru

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{v} \quad (5.29)$$

V nejjednodušších případech postačí modifikace vstupní veličiny, což si ukážeme na následujícím příkladě.

**Příklad 5.3** *Uvažujme nelineární systém popsaný rovnicí*

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{S(h)}(u - a\sqrt{2hg}) \quad (5.30)$$

*Zvolme řízení ve tvaru*

$$u = a\sqrt{2hg} + S(h)v \quad (5.31)$$

*kde  $v$  je nový „řídící vstup“ soustavy, čímž dostaneme lineární systém*

$$\frac{dh}{dt} = v \quad (5.32)$$

*Jedná se o čistě integrační systém, který můžeme řídit proporcionálním regulátorem  $v = K(h_w - h)$ . Výsledné řízení tedy je*

$$u = a\sqrt{2hg} + S(h)K(h_w - h) \quad (5.33)$$

Linearizace v uvedeném příkladě bylo dosaženo vstupní transformací

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})\mathbf{v} \quad (5.34)$$

Je však zřejmé, že tento postup vede k cíli jen pokud je systém popsán ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\beta^{-1}(\mathbf{x})[\mathbf{u} - \alpha(\mathbf{x})] \quad (5.35)$$

Pokud tomu tak není, musíme použít vhodnou transformaci stavových proměnných

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \quad (5.36)$$

tak abychom dostali systém popsany ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\beta^{-1}(\mathbf{z})[\mathbf{u} - \alpha(\mathbf{z})] \quad (5.37)$$

Provedení linearizace si opět ukážeme na příkladě.

**Příklad 5.4** *Předpokládejme systém popsany rovnicemi*

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -2x_1 + ax_2 + \sin x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 \cos x_1 + u \cos(2x_1) \end{aligned} \quad (5.38)$$

*Je zřejmé, že první rovnici nelze linearizovat vstupní transformací. Pokusíme se proto zavést transformaci stavu*

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= ax_2 + \sin x_1 \end{aligned} \quad (5.39)$$

*která vede ke stavovým rovnicím*

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= -2z_1 + z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} &= -2z_1 \cos z_1 + \cos z_1 \sin z_1 + au \cos(2z_1) \end{aligned} \quad (5.40)$$

*Nyní již můžeme použít transformaci vstupu*

$$u = \frac{1}{a \cos(2z_1)}(v - \cos z_1 \sin z_1 + 2z_1 \cos z_1) \quad (5.41)$$

*čímž dostaneme lineární systém*

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= -2z_1 + z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} &= v \end{aligned} \quad (5.42)$$

*Kombinací transformace stavu a transformace vstupu jsme tedy získali lineární systém.*

Základním problémem linearizace vstup – stav je nalezení vhodné transformace stavu. V obecném případě pak může být použití této linearizační metody velmi obtížné. Způsob hledání stavové transformace lze nalézt např. v [4],[1].

### 5.2.3 Linearizace vstup – výstup

V předchozích kurzech byly řešeny úlohy založené především na vstupně – výstupním popisu systému. Často může být pro nás zajímavé dosáhnout linearizace systému vzhledem k jeho vstupně – výstupnímu chování, aniž bychom řešili, zda je systém vnitřně lineární nebo nelineární. S touto problematikou pak souvisí úloha linearizace vstup – výstup.

Pro jednoduchost budeme řešit vstupně – výstupní linearizaci jen pro systém s jedním vstupem a jedním výstupem

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (5.43)$$

Původní systém řízený veličinou  $u$  se pokusíme nahradit lineární náhradou se vstupem  $v$

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \mathbf{A}z + bv \\ \tilde{y} &= \tilde{h}(z)\end{aligned}\quad (5.44)$$

Lineární náhradu můžeme volit obecně ve tvaru libovolného stabilního systému. Většinou však volíme strukturu odpovídající sériově zapojeným integrátorům. Oba systémy budou vstupně – výstupně ekvivalentní, pokud bude platit

$$\frac{d^i y}{dt^i} = \frac{d^i \tilde{y}}{dt^i} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (5.45)$$

Při hledání linearizace budeme postupovat tak, že vypočteme postupně derivace výstupu původního systému i lineární náhrady dokud nenarazíme na závislost na vstupní veličině  $u$ . Transformaci stavů a vstupu pak najdeme prostým srovnáním hodnot příslušných derivací výstupu. Řešení si ukážeme na příkladě.

**Příklad 5.5** *Systém je popsán rovnicemi*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^5 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 + u \\ y &= x_1\end{aligned}\quad (5.46)$$

*Náhradu se pokusíme najít ve tvaru*

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v \\ \tilde{y} &= z_1\end{aligned}\quad (5.47)$$

*Vypočteme derivace výstupu systému (5.46)*

$$\dot{y} = \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3 \quad \ddot{y} = (x_3 + \cos x_2)(x_1^5 + x_3) + (x_2 + 1)(x_1^2 + u) \quad (5.48)$$

a systému (5.47)

$$\dot{\hat{y}} = z_2; \quad \ddot{\hat{y}} = v \quad (5.49)$$

a provedeme jejich srovnání. Tak dostaneme transformaci stavu a vstupu

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3 \\ u &= \frac{1}{x_2 + 1}(v - (x_1^5 + x_3)(x_3 + \cos x_2)) - x_1^2 \end{aligned} \quad (5.50)$$

Můžeme tedy navrhnout lineární řízení  $v$  pro systém (5.47) a následně určit řízení  $u$  ze vztahu (5.50)

Tento příklad ukazuje velmi zajímavý výsledek linearizace vstup – výstup. Původní systém popsáný rovnicí (5.46) je systém třetího řádu, zatímco po provedení linearizace transformací vstupu (5.50) dostaneme systém (5.47), který je jen druhého řádu. Část dynamiky systému se však rozhodně nemohla „ztratit“, pouze se neprojevuje na vstupně – výstupním chování systému mezi vstupem  $v$  a výstupem  $u$ . Během linearizace se nám podařilo vytvořit systém jehož stav je nepozorovatelný. Ze sledování vstupu a výstupu pak nejsme schopni určit vývoj hodnot některých stavových proměnných - v systému existuje tzv. *vnitřní dynamika*.

Pokud systém obsahuje vnitřní dynamiku (lineární náhrada je nižšího řádu než původní systém), je nutné zajistit, aby vnitřní dynamika systému byla stabilní. V případě, že by bylo chování vnitřní dynamiky nestabilní, je výsledek linearizace prakticky nepoužitelný. Obecné vyšetření vnitřní dynamiky systému je značně náročné a nebude dále diskutováno, případný zájemce může nalézt další výklad tohoto tématu např. v [6].

#### 5.2.4 Shrnutí kapitoly 5.2

Metoda exaktní zpětnovazební linearizace představuje zajímavou možnost linearizace dynamických systémů. V této kapitole byl ukázán základní princip linearizace vstup – stav i vstup – výstup. Výhodou oproti linearizaci rozvojem do Taylorovy řady je skutečnost, že použitelnost určené lineární náhrady není omezena jen na okolí zvoleného pracovního bodu. Metody exaktní zpětnovazební linearizace jsou založeny na použití zpětných vazeb od stavových proměnných. Praktická aplikace uvedených metod je pak poněkud ztížena tím, že musíme mít k dispozici hodnoty jednotlivých stavových veličin. V reálných případech se nám však často stává, že z technologických důvodů není možné hodnoty některých stavových veličin přímo měřit. V takových případech je pak nutné odhadovat aktuální hodnoty stavových veličin pomocí tzv. rekonstruktorů stavu, jak je ukázáno např. v [6].

#### 5.2.5 Kontrolní otázky pro kapitolu 5.2

1. Má vždy lineární náhrada při linearizaci vstup – výstup stejný řád jako původní systém?

2. Je znalost hodnoty výstupu soustavy postačující pro provedení zpětnovazební linearizace?
3. Pomocí jakých transformací provádíme zpětnovazební linearizace?
4. Co je to vnitřní dynamika?

Správné odpovědi jsou uvedeny v dodatku A.

### 5.2.6 Řešené příklady pro kapitolu 5.2

**Příklad 5.6** Je dán systém popsaný rovnicemi

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 - \sin x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 \cos x_1 + u \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{5.51}$$

Cílem je nalezení zpětnovazební linearizace vstup – výstup.

Linearizaci budeme hledat ve tvaru  $y = z_1$ ,  $\dot{z}_1 = z_2, \dots, \dot{z}_n = v$ . Budeme derivovat výstup  $y$  tak dlouho, dokud neobjevíme závislost na vstupu  $u$ , řádem derivace bude určen i řád lineární náhrady  $n$ .

$$\begin{aligned}y &= x_1 \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} = x_2 - \sin x_1 \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dx_2}{dt} - \frac{d \sin x_1}{dt} = x_2 \cos x_1 + u - x_2 \cos x_1 + \sin x_1 \cos x_1 = u + \sin x_1 \cos x_1\end{aligned}\tag{5.52}$$

Pro zvolenou lineární náhradu platí

$$\begin{aligned}y &= z_1 \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dz_1}{dt} = z_2 \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dz_2}{dt} = v\end{aligned}\tag{5.53}$$

Porovnáním derivací ve vztazích (5.52) a (5.53) dostaneme transformaci stavových proměnných

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_2 - \sin x_1\end{aligned}\tag{5.54}$$

a transformaci vstupu

$$u = v - \sin x_1 \cos x_1\tag{5.55}$$

Pokud tuto transformaci vstupu předřadíme soustavě, dostáváme systém, jehož chování mezi vstupem  $v$  a výstupem  $y$  odpovídá lineárnímu systému, který má charakter dvou sériově zapojených integrátorů.

**Příklad 5.7** Je dán systém popsaný rovnicemi

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 - \sin x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 \cos x_1 - \sin x_1 \cos x_1 + u \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{5.56}$$

Cílem je nalezení zpětnovazební linearizace vstup – výstup.

Linearizaci budeme hledat ve tvaru  $y = z_1$ ,  $\dot{z}_1 = z_2, \dots, \dot{z}_n = v$ . Budeme derivovat výstup  $y$  tak dlouho, dokud neobjevíme závislost na vstupu  $u$ , řádem derivace bude určen i řád lineární náhrady  $n$ .

$$\begin{aligned}y &= x_1 \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} = x_2 - \sin x_1 \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dx_2}{dt} - \frac{d \sin x_1}{dt} = x_2 \cos x_1 - \sin x_1 \cos x_1 + u - x_2 \cos x_1 + \sin x_1 \cos x_1 = u\end{aligned}\tag{5.57}$$

Pro zvolenou lineární náhradu platí

$$\begin{aligned}y &= z_1 \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dz_1}{dt} = z_2 \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dz_2}{dt} = v\end{aligned}\tag{5.58}$$

Porovnáním derivací ve vztazích (5.57) a (5.58) dostaneme transformaci stavových proměnných

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_2 - \sin x_1\end{aligned}\tag{5.59}$$

a transformaci vstupu

$$u = v\tag{5.60}$$

I když je systém vnitřně nelineární, jeho vstupně výstupní chování je lineární, aniž bychom museli použít nějakou transformaci vstupu.

### 5.2.7 Neřešené příklady pro kapitolu 5.2

**Příklad 5.8** Nelineární dynamický systém s jedním vstupem a jedním výstupem je popsán rovnicemi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 + x_2 + (\sin x_1)u \\ y &= x_1^2\end{aligned}\tag{5.61}$$

kde  $u$  je vstup systému a  $y$  je výstup. Určete lineární náhradu metodou exaktní zpětnovazební linearizace

a) vstup – stav

b) vstup – výstup

V obou případech rovněž určete, za jakých omezení bude linearizace platná.

**Příklad 5.9** Nelineární dynamický systém s jedním vstupem a jedním výstupem je popsán rovnicemi

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 + x_2 + u \\ y &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned} \tag{5.62}$$

kde  $u$  je vstup systému a  $y$  je výstup.

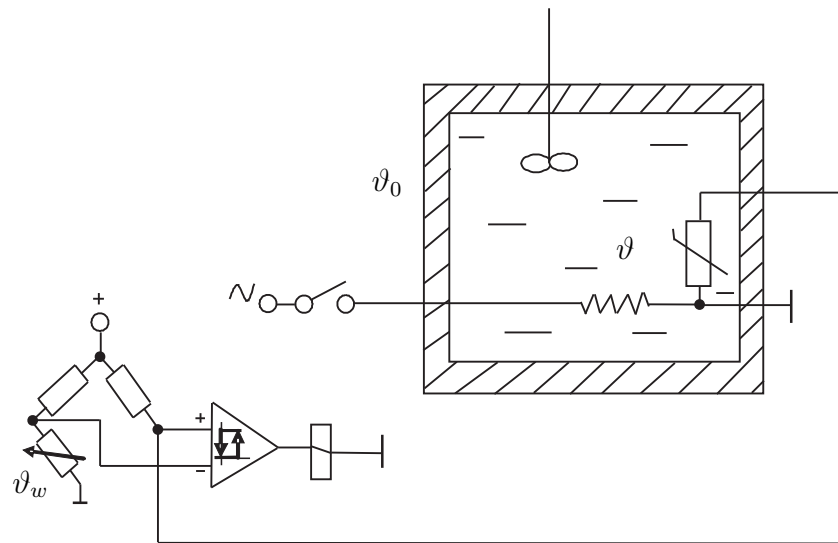
- a) Určete lineární náhradu metodou exaktní zpětnovazební linearizace vstup – výstup a podmínku její platnosti
- b) Rozhodněte, zda lineární náhrada obsahuje vnitřní dynamiku a proč.

## 5.3 Reléové systémy

### 5.3.1 Motivace

V následující krátké kapitole se budeme zabývat regulačními obvody, ve kterých se vyskytují nelinearity reléového charakteru, nebo přesněji řečeno prvky, které umožňují spínání a přepínání. Tyto nelinearity nemusí být nutně realizovány elektromechanickými prvky, naopak v současné době jsou často realizovány číslicovými obvody. Struktura regulačních obvodů s reléovými nebo přesněji „spínacími“ prvky může být velmi rozmanitá a vzhledem k jejich schopnosti spínání a přepínání se může dokonce během práce systému měnit. Vzniká tak nová třída systémů - systémy s proměnnou strukturou, které umožňují progresivně řešit řadu regulačních problémů. Poměrně často se vyskytují systémy, u kterých je řízená soustava řízena akčními zásahy, při kterých akční veličina nabývá maximální nebo nulové hodnoty, tedy zásahy jsou typu „zapnuto“/„vypnuto“ (tzv. „on-off control“) a systémy, u kterých akční veličiny nabývají maximální možné absolutní hodnoty a mění se jen jejich znaménko (tzv. „bang-bang control“). Posledně jmenované systémy představují často realizace časově optimálního řízení. Např. máme-li za úkol řídit polohu hmotného bodu tak, že jej máme co nejrychleji přemístit z bodu  $A$  do bodu  $B$  na přímce, kde má být opět v klidu, pak optimální řízení bude jistě to, při kterém do poloviny dráhy  $AB$  budeme na bod působit maximální silou, která bude bod urychlovat, a od poloviny dráhy budeme toutéž maximální silou brzdít.

Pro reléové systémy platí samozřejmě všechny obecné závěry uvedené v předchozích kapitolách a používají se rovněž všechny výše uvedené metody analýzy chování systému. Proto budou v následujícím řešení více méně konkrétní případy, které budou ilustrovat některé typické vlastnosti a chování reléových systémů.



Obrázek 5.7: Reléový regulátor teploty

### 5.3.2 Řízení s použitím reléového regulátoru

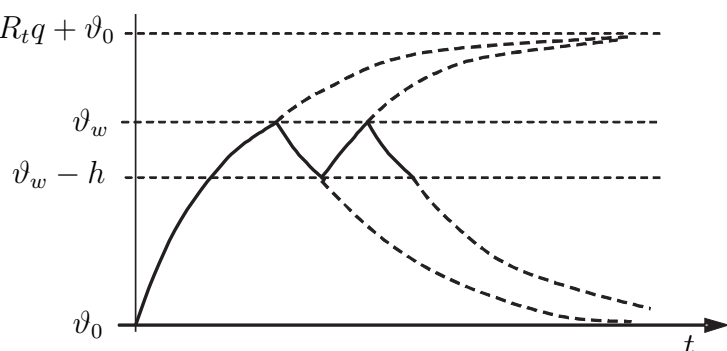
Patrně nejběžnějším příkladem reléového řízení je reléový regulátor teploty, jehož principiální schéma je uvedeno na obr. 5.7. V měřícím můstku je zapojen termistor, který měří regulovanou teplotu  $\vartheta$  v nádrži s kapalným médiem. Žádaná hodnota  $\vartheta_w$  je nastavována potenciometrem umístěným rovněž v měřícím můstku. Rozdíl je vyhodnocován operačním zesilovačem, který ovládá výkonové relé. Toto relé zapíná topení, je-li  $\vartheta < \vartheta_w$ , v opačném případě topení vypíná. Kdyby byl operační zesilovač zapojen jako komparátor (v takovém případě se chová téměř jako ideální relé), docházelo by při  $\vartheta \doteq \vartheta_w$  vlivem náhodných šumů na vstupu zesilovače k chaotickému kmitání výkonového relé. Proto je na operačním zesilovači realizována reléová charakteristika s hysterezí. Situaci ilustruje obr. 5.8.

Za předpokladu, že míchání tekutiny v nádrži je dokonalé, že  $R_t q + \vartheta_0$  izolace neodebírání žádné teplo, že šíření tepla je homogenní apod., můžeme vytvořit následující model systému. Pokud je relé v sepnutém stavu, platí

$$q + \frac{\vartheta_0 - \vartheta}{R_t} = C \frac{d\vartheta}{dt} \quad (5.63)$$

Při vypnutí relé dostáváme

$$\frac{\vartheta_0 - \vartheta}{R_t} = C \frac{d\vartheta}{dt} \quad (5.64)$$

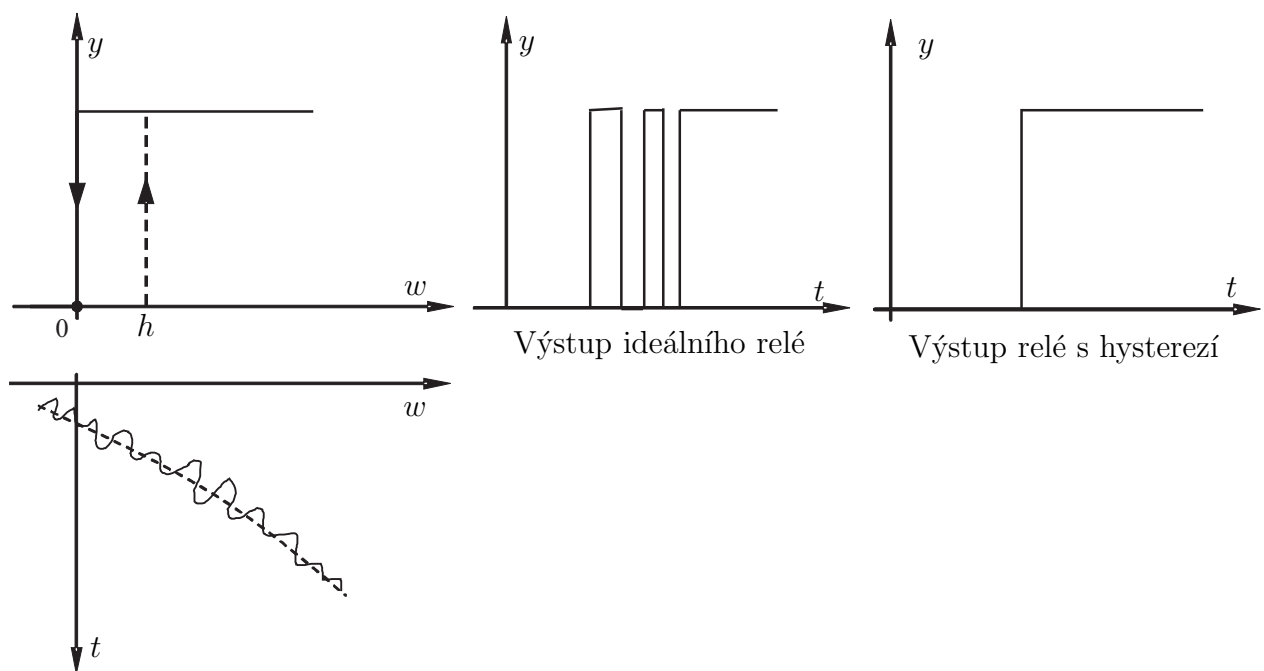


Obrázek 5.10: Průběh regulace teploty

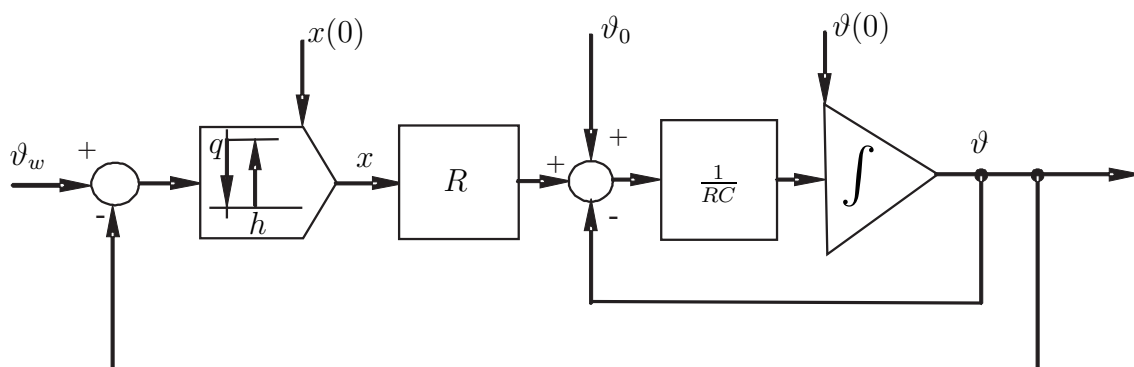
Systému tedy odpovídá stavové schéma zobrazené na obr. 5.9

Protože jde o stabilizátor teploty, bude  $\vartheta_w = konst.$  Dále je rozumné předpokládat, že platí  $\vartheta_w > \vartheta_0 + h$ , kde  $h$  je hystereze regulátoru, že  $\vartheta_0 = konst$  a že maximální možná





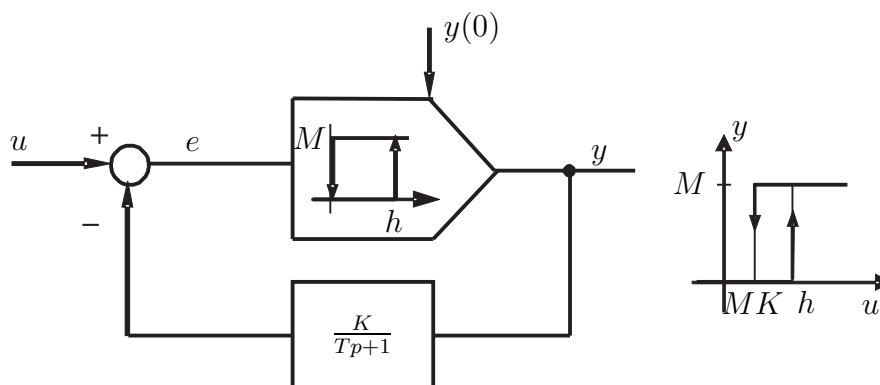
Obrázek 5.8: Potlačení vibrací elektromechanických spínacích prvků pomocí hystereze



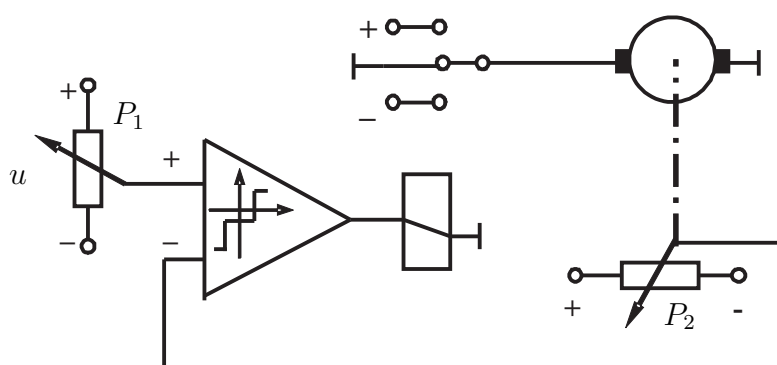
Obrázek 5.9: Stavové schéma regulátoru teploty

teplota na kterou je možno tekutinu ohřát  $R_i q + \vartheta_0 > \vartheta_w$ . Za těchto předpokladů můžeme nakreslit trajektorii systému (průběh výstupní veličiny) při  $\vartheta(0) = \vartheta_0$ , jak je zachyceno na obr. 5.10. Z obrázku je zřejmé, že regulovaná teplota bude kolísat v rozmezí  $\vartheta_w - h$  až  $\vartheta_w$ . Perioda kmitů bude záviset na hodnotě  $\vartheta_w$  a časové konstantě  $T = RC$  řízené soustavy. V tomto případě, zřejmě nejsou splněny předpoklady použití metody harmonické rovnováhy, neboť její použití popírá existenci kmitů v tomto regulačním obvodu. Použití výše uvedeného regulátoru s hysterezí většinou vede k oscilacím systému, ty však mohou být často technicky přijatelné. V některých případech je však nutné snížit amplitudu kmitů snížením velikosti hystereze, např. u regulátorů teploty, které používají bimetalový spínač.

Snížení velikosti hystereze je možné docílit zavedením záporné zpětné vazby obepínající



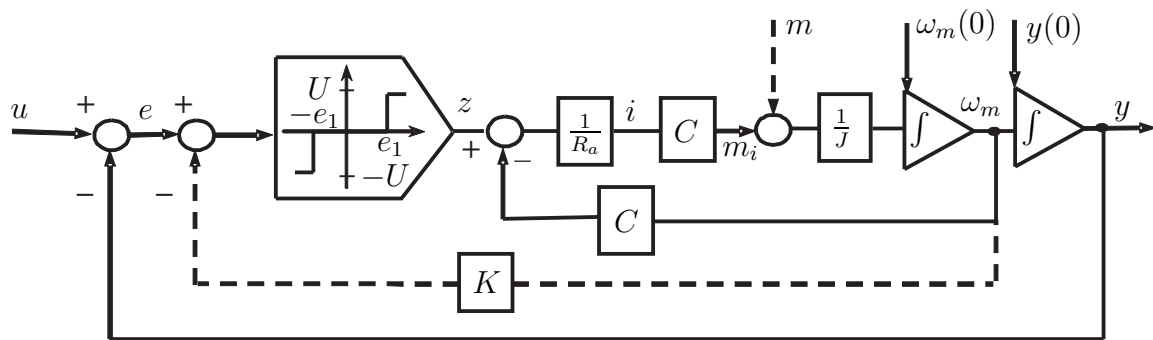
Obrázek 5.11: Snížení hystereze pomocí zpětné vazby



Obrázek 5.12: Principiální schéma polohového servomechanismu

člen s hysterezí, viz obr. 5.11. Podmínkou správné činnosti je, že musí platit  $0 < KM < h$ , kde  $h$  je hystereze původního regulátoru, a že časová konstanta  $T$  je dostatečně malá. Činnost obvodu si vysvětlíme následovně. Předpokládejme, že  $u < h$ , relé je ve stavu vypnuto, t.j.  $y = 0$  a hodnota  $u$  roste. Platí tedy  $e = u$ . Jakmile signál  $u$  dosáhne hodnoty hystereze  $h$ , přejde relé do stavu zapnuto  $y = M$  a v důsledku malé časové konstanty se prakticky okamžitě změní signál  $e$  z hodnoty  $h$  na hodnotu  $e = u - MK$ , tedy  $e = h - MK$ . Další zvyšování hodnoty  $u$  a tím i  $e$  nezmění stav relé. Při následném poklesu signálu  $u$  pak již při hodnotě  $u = MK$  nabyde signál  $e$  hodnotu  $e = 0$  a relé přejde zpět do stavu  $y = 0$ . Výsledná statická charakteristika obvodu pak bude mít hysterezi o velikosti  $h - MK$ . Abychom mohli systém považovat za ideální relé s hysterezí, musí být zřejmě časová konstanta  $T$  tak malá, aby se hystereze projevila i u nejvyšších frekvencí signálu  $u$ . Z praktického hlediska postačuje, aby  $T < 1/f_{max}$ , kde  $f_{max}$  je nejvyšší frekvence obsažená v signálu  $u$ . Technické provedení této zpětné vazby u bimetalových regulátorů teploty je provedeno tak, že bimetal spíná proud do malého vyhřívacího tělíska v blízkosti bimetalu.

Jiným typickým příkladem použití reléového regulátoru je polohový servomechanismus, jehož schéma je nakresleno na obr. 5.12. Signál žádané polohy  $u$  a signál aktuální regulované polohy  $y$  jsou pomocí potenciometrů  $P_1$  a  $P_2$  převáděny na elektrický signál



Obrázek 5.13: Stavové schéma reléového servomechanismu

vedený do nelinearity s charakteristikou třípolohového relé, která je realizována zapojením s operačním zesilovačem. Operační zesilovač ovládá výkonové třípolohové relé, toto relé pak ovládá stejnosměrný motor s konstantním buzením. Má-li regulační odchylka malou absolutní hodnotu, je relé v neutrální poloze a motor je připojen na nulové napětí. Překročí-li regulační odchylka určitou hodnotu, je motor připojen na napětí  $+U$  nebo  $-U$  tak, aby se absolutní hodnota regulační odchylky snižovala. Stavové schéma tohoto systému je nakresleno na obr. 5.13 silně.

Stavové schéma je sestaveno za předpokladu zanedbatelné indukčnosti kotvy motoru, zanedbatelných pasivních i aktivních zatěžujících momentů na ose motoru a za předpokladu bezvúlového spojení zpětnovazebního potenciometru s hřídelí motoru. Stavové rovnice systému tedy jsou

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \omega_m \\ \frac{d\omega_m}{dt} &= \frac{C}{JR_a} [-C\omega_m + f(u - y)] \end{aligned} \quad (5.65)$$

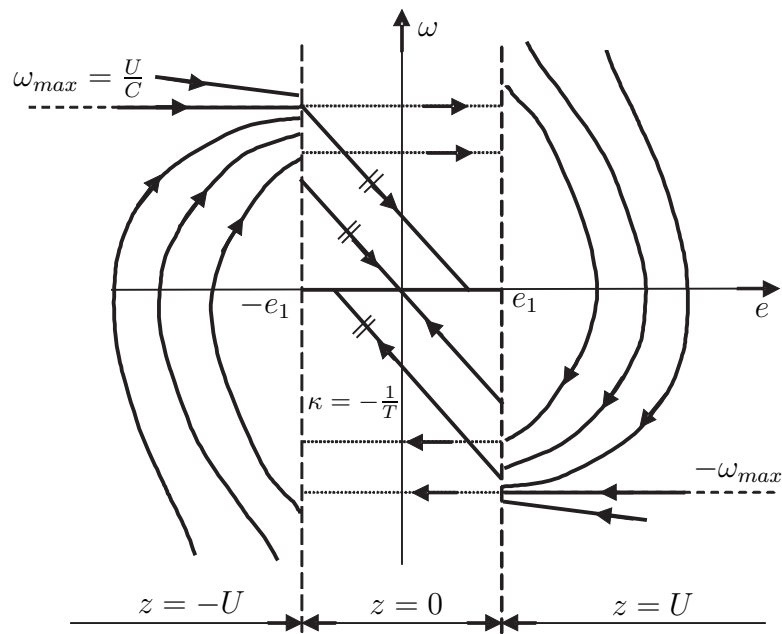
kde  $C$  je rychlostní konstanta stroje,  $J$  je moment setrvačnosti kotvy a  $R_a$  je odpor vinutí kotvy. Funkce  $f$  je určena ideální reléovou třístavovou charakteristikou. Po zavedení substituce  $u - y = e$  a  $\omega = -\omega_m$  dostáváme za předpokladu  $u = konst$  fázové rovnice

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{1}{T}\omega - \frac{1}{CT}f(e) \end{aligned} \quad (5.66)$$

kde  $T = \frac{JR_a}{C^2}$  je elektromechanická konstanta motoru. Pro případ, že  $e > e_1$  dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{1}{T}\omega - \frac{U}{CT} \end{aligned} \quad (5.67)$$

Je zřejmé, že v této oblasti bude hodnota  $\omega$  stále klesat, až dosáhne minimální hodnoty  $-\omega_{max} = -\frac{U}{C}$ . Obdobný závěr můžeme učinit i pro  $e < -e_1$ . V případě, že  $|e| < e_1$ , platí



**Obrázek 5.14:** Fázová trajektorie polohového servomechanismu

$f(e) = 0$  a systém je popsán rovnicemi

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{1}{T}\omega \end{aligned} \quad (5.68)$$

a směrnice tečny k trajektorii je

$$\frac{d\omega}{de} = -\frac{1}{T} \quad (5.69)$$

Množina bodů se souřadnicemi  $\omega = 0; e < e_1$  představuje singulární body systému. Stavový portrét snadno sestavíme metodou izoklin a jeho výsledný tvar zachycen na obr. 5.14. Obrázek je nakreslen pro určité parametry systému a je zřejmé, že v systému s těmito parametry nemohou nastat trvalé oscilace pro jakékoliv  $u = konst$ . Postačující podmínkou pro takové chování systému je, aby trajektorie vycházející z bodu  $\omega = -\omega_{max}; e = e_1$  nepřešla do oblasti  $e < -e_1$ , tedy aby platilo

$$\frac{\omega_{max}}{2e_1} < \frac{1}{T} \quad (5.70)$$

kde  $\omega_{max} = \frac{U}{C}$  je maximální rychlost servomechanismu.

Z obrázku je zřejmé, že pro jakýkoliv signál  $u = konst$  přejde systém z nulových počátečních podmínek do množiny singulárních bodů. V systému se bude projevovat pásmo necitlivosti v rozsahu  $\pm e_1$ . Snižování této necitlivosti může vést k porušení postačující podmínky neexistence oscilací a k jejich vzniku.

Ke vzniku oscilací může také dojít tedy, bude-li motor řízen systémem zapnuto - vypnuto tj. pokud v pásmu necitlivosti relé  $|e| < e_1$  nebude kotva připojena na nulové napětí. Pak bez přítomnosti vnějších momentů bude kotva motoru představovat jen volně se točící těleso a stavové rovnice systému se změň na

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \omega_m = konst \\ \frac{d\omega_m}{dt} &= 0\end{aligned}\tag{5.71}$$

Trajektorie jsou pro tento případ zakresleny na obr. 5.14 tečkovaně.

Příznivý vliv na potlačení oscilací diskutovaného servomechanismu má zabrzdění kotvy nejen jejím zkratováním, ale i připojením třecího momentu v intervalu necitlivosti. V obr. 5.13 je to naznačeno přivedením vnějšího momentu  $m$ . V intervalu necitlivosti budou pak stavové rovnice systému

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{1}{T}\omega - M_t \text{sign } \omega\end{aligned}\tag{5.72}$$

Směrnice tečen k trajektoriím budou tedy absolutně větší než při dynamickém brzdění a trajektorie budou do singulárních bodů směřovat strměji.

Dalším možností potlačení oscilací je zavedení záporné zpětné vazby od rychlosti motoru. V obr. 5.13 je tato vazba nakreslena čárkovaně. Stavové rovnice systému přejdou do tvaru

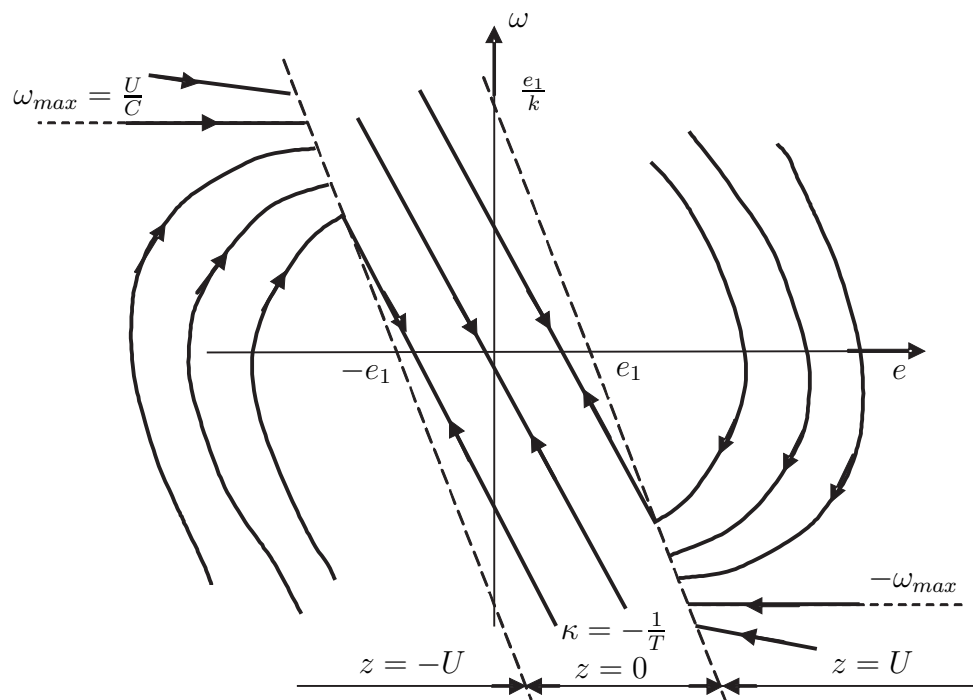
$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{1}{T}\omega + \frac{1}{CT}f(e + K\omega)\end{aligned}\tag{5.73}$$

Množina bodů ve stavové rovině, pro které platí  $f(e + K\omega) = 0$ , tj. relé je v neutrální poloze, je nyní vymezena nikoliv nerovností  $|e| < e_1$ , ale  $|e + K\omega| < e_1$ . Hranice této oblasti je tedy tvořena ve stavové rovině přepínacími přímkami, podobně jako u předchozího systému, ale tyto přímky mají nyní směrnici  $-\frac{1}{K}$  a nejsou tedy rovnoběžné s osou  $\omega$ . Průběh trajektorií systému s dynamickým brzděním a zápornou rychlostí zpětnou vazbou je nakreslen na obr. 5.15. Postačující podmínkou pro neexistenci oscilací při  $u = konst$  je nyní splnění nerovnosti

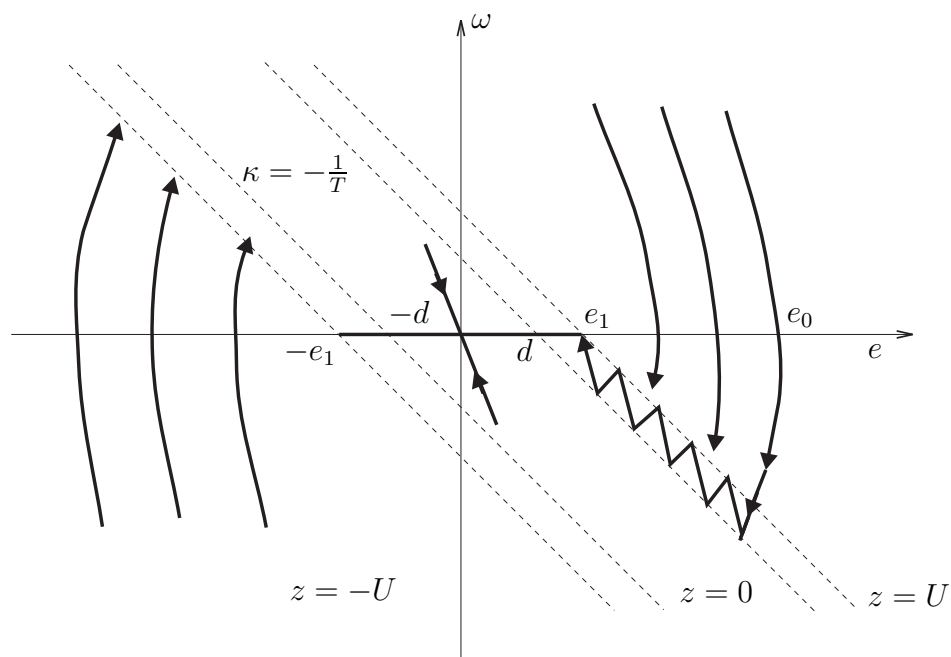
$$\frac{\omega_{max}}{2e_1 + K\omega_{max}} < \frac{1}{T}\tag{5.74}$$

což lze snadno ověřit geometrickým rozbohem obrázku obr. 5.15.

Potlačení oscilací můžeme tedy dosáhnout, kromě zvětšování pásma necitlivosti, také zvyšování velikosti záporné rychlostní zpětné vazby. Co se však stane, bude-li tato vazba příliš velká, konkrétně bude-li platit  $K \geq T$ . K rozboru této situace opatříme reléovou charakteristiku hysterezí tak, že relé bude mít charakteristiku odpovídající obr. 3.8(d). Při analýze takového systému je nutno si uvědomit, že relé má tři stavy a celkový stavový



**Obrázek 5.15:** Fázové trajektorie polohového servomechanismu s dynamickým brzděním a zápornou rychlostní zpětnou vazbou

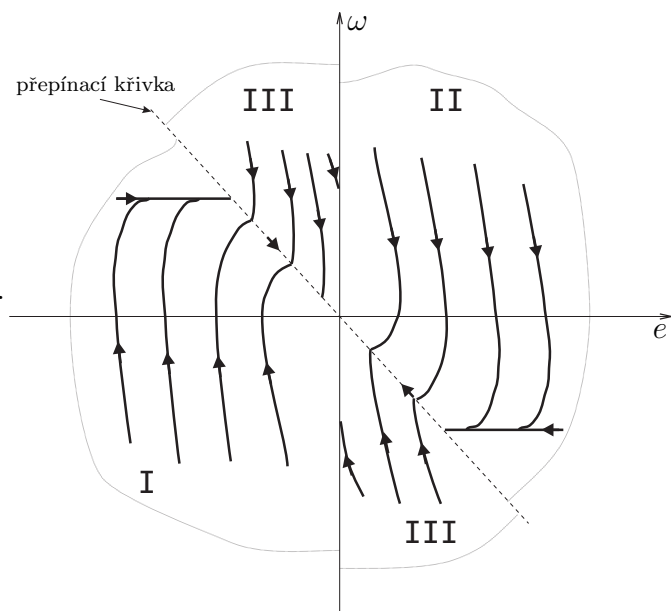


**Obrázek 5.16:** Stavový portrét polohového servomechanismu pracujícího v „kluzavém režimu“

prostor systému je tvořen sjednocením stavového prostoru řízeného systému a regulátoru. V předchozích případech jsme na tento fakt nemuseli klást důraz. Stavový portrét systému je nakreslen na obr. 5.16. Přepínací přímky jsou čtyři se směrnici  $-\frac{1}{K}$ .

Podívejme se na chování systému s počátečními podmínkami  $e(0) > e_1, \omega(0) = 0$ . V tomto počátečním stavu musí být relé nutně ve stavu zapnuto,  $z = U$ . Regulační odchylka se začne snižovat a systém se bude pohybovat podle nám již známé trajektorie. Za určitou dobu poklesne signál do nelinearity pod úroveň  $e_1$ , ke změně stavu relé nedochází, ještě později klesne signál do nelinearity na úroveň  $d$ , kdy relé změní stav na vypnuto,  $z = 0$ . Systém se začne dynamicky brzdit, bude se pohybovat po přímkové trajektorii se směrnici  $-\frac{1}{T}$ . Po určité době tak opět dosáhne hranice, kdy relé musí přejít do stavu  $z = U$  a děj se bude opakovat. Trajektorie systému se tedy bude pohybovat v úzkém pásmu omezeném dvěma přepínacími přímkami směrem do oblasti singulárních bodů. Velikost tohoto pásma je určena velikostí hystereze. V obr. 5.16 jsou trajektorie nakresleny jakoby přecházely z jednoho listu, na kterém je zapsán určitý stav relé na jiný list s jiným stavem, proto bývá v praxi taková stavová rovina nazývána „vícelistá stavová rovina“. Popsaný režim práce se nazývá „klouzavý režim“ („sliding mode control“) a má v praxi značný význam. S pomocí tohoto způsobu řízení je možné v některých případech docílit, aby se nelineární systém s proměnnými parametry, ovlivněný náhodnými poruchami, choval jako lineární systém s předepsaným chováním. Problém si můžeme vysvětlit pomocí již popisovaného polohového servomechanismu. V praxi je motor servomechanismu zatěžován náhodnými vnějšími momenty. Použije-li se v převodu z kotvy motoru na výstupní orgán šnekový převod, je vliv vnějších momentů obzvlášť komplikovaný. K těmto problémům se přidává ještě matematicky těžko postižitelný vliv reakce kotvy a změn parametrů s teplotou.

V takovém případě je získání dostatečně přesného matematického modelu velmi obtížné a návrh uspokojivého lineárního regulátoru prakticky nemožný. S pomocí klouzavého režimu však můžeme docílit, aby se systém pohyboval podle námi předepsané trajektorie. Klouzavý režim docílíme přepínáním různých regulačních zákonů. Chceme-li např., aby trajektorie podle které se má polohový servomechanismus pohybovat byla přímka  $\omega = -ke$ , viz obr. 5.17, stačí, aby regulační zákon způsobil, že trajektorie v oblastech I, II, III budou směřovat do této přímky. Bude-li přepínání dosti rychlé, dojde na přepínací přímce ke klouzavému režimu a trajektorie systému bude prakticky totožná s touto přímkou.



Obrázek 5.17: Stavový portrét

Jelikož na této přímce platí  $\dot{e} = -ke$ , bude regulační odchylka směřovat k nule podle přechodového děje lineárního systému 1. řádu s časovou konstantou  $T = 1/k$ . Konkrétní trajektorie na obr. 5.17 mohou být získány tak, že v oblasti I je k motoru připojeno plné záporné napětí, v oblasti II plné kladné napětí a v oblasti III je motor brzděn suchým třením. Vyhodnocení, zda je stav systému v té které oblasti a přepnutí regulačního zákona může být snadno prováděno číslicovým algoritmem. Aby se snížily oscilace klouzavého režimu, je vhodné regulační zákon zvolit tak, aby trajektorie vcházely do přímky klouzavého režimu se sklonem blízkým sklonu této přímky. Výsledný systém je značně odolný proti poruchám i změnám parametrů, je tzv. „robustní“. Řízením v klouzavém režimu se budeme detailněji zabývat v kapitole 5.4.

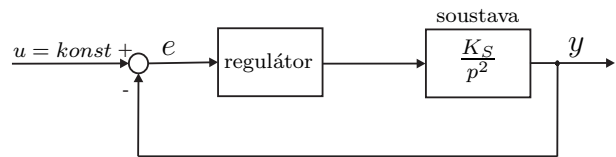
Změnou struktury systému resp. regulátoru můžeme poměrně jednoduše dosahovat dobrých regulačních výsledků. Máme-li např. navrhnout regulátor ve smyčce z obr. 5.18 tak, aby celkový systém byl stabilní (pro  $u = konst$  a jakékoliv počáteční podmínky přešel do stavu  $e = 0$ ), můžeme to jistě provést s pomocí PD regulátoru. Stabilitu nám však zajistí i P regulátor, u kterého budeme vhodně přepínat jeho zisk  $K_R$ . Na obr. 5.19 jsou nakresleny trajektorie uzavřené smyčky pro  $K_R > 1/K_S$  a  $K_R < 1/K_S$ . Tyto trajektorie tvoří elipsy s rozdílnou délkou poloos. Budeme-li však přepínat zisk regulátoru podle zákona

$$\begin{aligned} K_R &= K_{R1} > \frac{1}{K_S} && \text{pro } e\omega \geq 0 \text{ a neplatí } e = \omega = 0 \\ K_R &= K_{R2} < \frac{1}{K_S} && \text{pro } e\omega < 0 \\ K_R &= 0 && \text{pro } e = \omega = 0 \end{aligned} \quad (5.75)$$

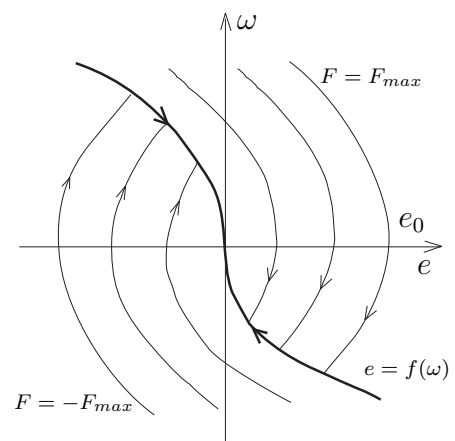
budou trajektorie přecházet z jedné soustavy elips na druhou a systém bude globálně asymptoticky stabilní. Realizace takového regulátoru je velmi jednoduchá. Podobným způsobem lze realizovat časově optimální polohový servomechanismus. Jedním z úkolů polohového servomechanismu je přemístit těleso z počáteční polohy do žádané polohy. Toto přemístění je někdy zapotřebí provádět v co nejkratším čase. Diferenciální rovnice pohybu tohoto tělesa je

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F \quad (5.76)$$

kde  $m$  je hmotnost tělesa,  $x$  je poloha tělesa a  $F$  je síla působící na těleso. Síla  $F$  je vždy omezená, platí tedy  $|F| < F_{max}$ . Označíme-li žádanou polohu jako  $u = konst$  a rozdíl  $u - x = e$

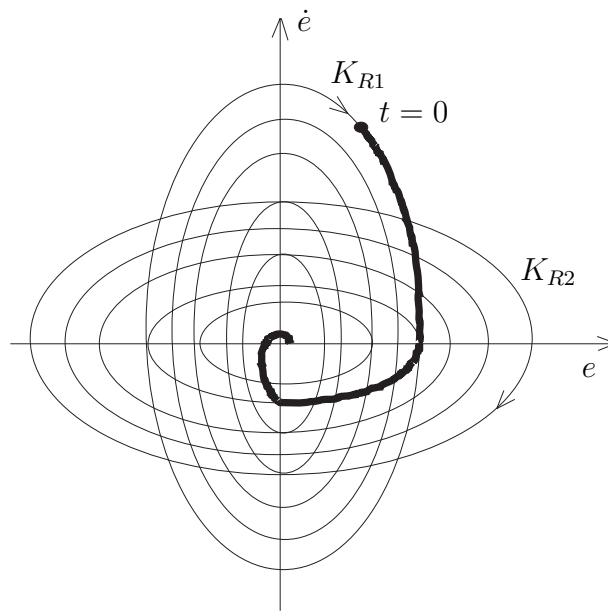


Obrázek 5.18: Regulace astatické soustavy



Obrázek 5.20: Trajektorie časově optimálního systému





**Obrázek 5.19:** Trajektorie systému z obr. 5.18 s P regulátorem s proměnným zesílením

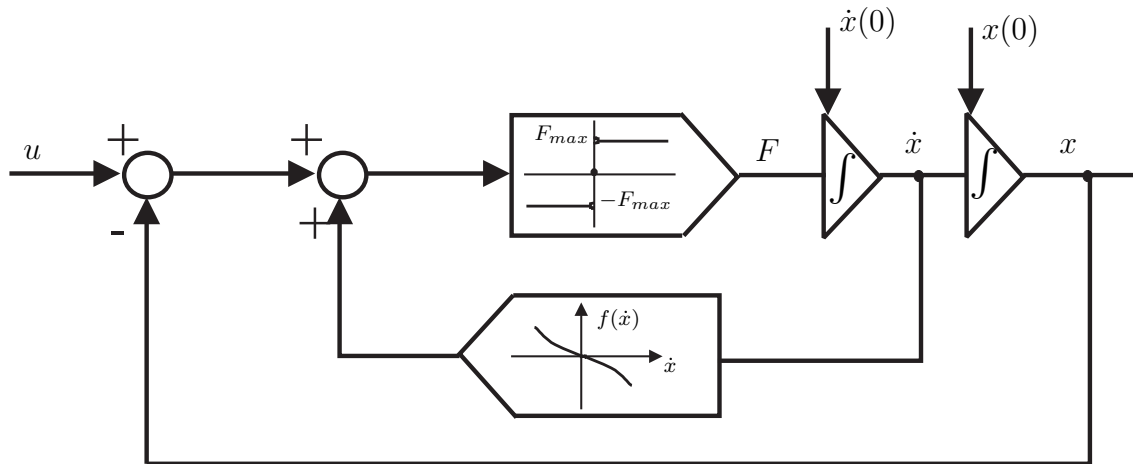
jako regulační odchylku, budou stavové trajektorie systému (5.76) v souřadnicích  $\dot{e} = \omega; e$  pro  $F = F_{max}$  a  $F = -F_{max}$  představovat soustavu parabol, obr. 5.20. Časově optimální bude zřejmě takové řízení, kdy na začátku pohybu budeme těleso maximálně akcelarovat a po dosažení určitého stavu maximálně brzdít tak, aby trajektorie pohybu skončila ve stavu  $e = 0; \omega = 0$ . Z obr. 5.20 je zřejmé, že trajektorie s maximální brzdou silou vcházející do počátku stavové roviny určuje ty stavy, kdy je nutno přejít z maximální akcelerace na maximální brždění, tyto trajektorie jsou vyznačeny silně. Optimální regulátor tedy musí vyhodnocovat stav řízené soustavy, porovnávat jej s přepínací křivkou  $e = f(\omega)$  a provádět přepínání ovládací síly. Struktura regulačního obvodu je nakreslena na obr. 5.21 a je relativně snadno realizovatelná. Pokud je u tohoto polohového mechanismu k pohonu použit elektrický motor jako v předchozích případech, pak je zapotřebí si uvědomit, že pohonná síla je úměrná kotevnímu proudu, který tedy musí být udržován na konstantní hodnotě.

### 5.3.3 Návrh reléového regulátoru na základě Ljapunovovy teorie stability

Návrh reléového regulátoru lze výhodně provést na základě Ljapunovovy teorie stability. Předpokládejme systém popsany lineární stavovou rovnicí

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{m} \quad (5.77)$$

kde  $\mathbf{m}$  je vstupní vektor objektu a jeho složky jsou ohraničeny soustavou nerovností  $|m_i(t)| \leq M_i$ . Jestliže najdeme Ljapunovovu funkci  $V(\mathbf{x})$  tohoto systému pro  $\mathbf{m} = \mathbf{0}$  a pak zvolíme  $\mathbf{m}$  tak, aby  $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt}$  byla pro řízený systém (5.77) negativně definitní, budou trajektorie takového systému směřovat k  $\mathbf{0}$ .



Obrázek 5.21: Časově optimální regulátor polohy

Ljapunovovu funkci volíme ve tvaru pozitivně definitní kvadratické formy  $V(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{x} \rangle$ , u které matice  $\mathbf{Q}$  vyhovuje rovnici

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A} = -\mathbf{P} \quad (5.78)$$

kde  $\mathbf{P}$  je nějaká pozitivně definitní matice. Pak platí

$$\begin{aligned} \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} &= W(\mathbf{x}) = \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{m})^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{m}) = \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{m}^T \mathbf{B}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{B}\mathbf{m} = \\ &= -\langle \mathbf{x}, \mathbf{P}\mathbf{x} \rangle + \mathbf{m}^T \mathbf{B}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{m}^T \mathbf{B}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.79)$$

V důsledku symetričnosti matice  $\mathbf{Q}$  pak platí

$$W(\mathbf{x}) = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{P}\mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{m}, \mathbf{B}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} \rangle \quad (5.80)$$

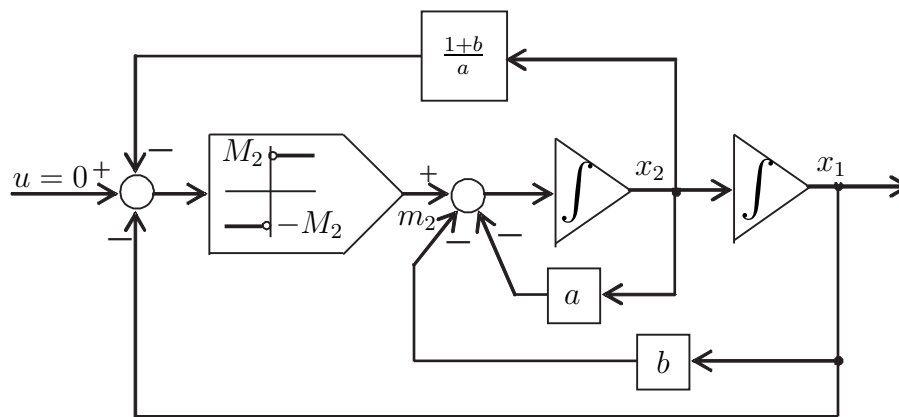
Protože první člen v (5.80) je negativně definitní, stačí, aby i druhý člen představoval negativně definitní kvadratickou formu. Zabezpečíme-li si, aby každá složka vektoru  $\mathbf{m}$  měla obrácené znaménko než má odpovídající složka vektoru  $\mathbf{B}^T \mathbf{Q}\mathbf{x}$ , bude tato podmínka splněna. Žádná složka  $\mathbf{m}$  nesmí překročit svoji maximální hodnotu, proto volíme

$$m_i = -M_i \text{sign}[\mathbf{B}^T \mathbf{Q}\mathbf{x}]_i \quad (5.81)$$

kde  $[\mathbf{B}^T \mathbf{Q}\mathbf{x}]_i$  je  $i$ -tá složka vektoru  $\mathbf{B}^T \mathbf{Q}\mathbf{x}$ . Vektor  $\mathbf{m}$  bude tedy vytvářen reléovými regulátory, jejichž vstupem bude lineární kombinace stavového vektoru.

**Příklad 5.10** Pokusme se navrhnout reléový regulátor výše uváděného typu pro systém určený maticemi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad a > 0, b > 0 \quad (5.82)$$



Obrázek 5.22: Struktura reléového systému z příkladu 5.10

Matici  $\mathbf{P}$  zvolíme jednotkovou. Pak  $\mathbf{Q}$  je podle (5.78)

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{a^2+b(1+b)}{2ab} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{2b} & \frac{1+b}{2ab} \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

Vektor  $\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$  má tvar

$$\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x_1}{2b} + \frac{(1+b)x_2}{2ab} \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

Výsledné řízení tedy je  $m_1 = 0; m_2 = -M_2 \operatorname{sign} \left[ x_1 + \frac{1+b}{a} x_2 \right]$ . Struktura systému je na obr. 5.22. Výsledný systém je globálně asymptoticky stabilní.

Hlavním problémem při návrhu reléového regulátoru uvedenou metodou je výpočet matice  $\mathbf{Q}$  se zadanými vlastnostmi.

### 5.3.4 Shrnutí kapitoly 5.3

Aplikace reléových systémů v regulační technice je velmi rozsáhlá a rozmanitá. V této kapitole jsme probrali jen některé typické ukázky. Další aplikace lze najít v odborné literatuře. Analýzu reléových systémů lze provést na základě dosud probrané teorie, která v některých případech umožňuje i provedení návrhu regulátoru (příklad 5.10). V reálných aplikacích je často používáno reléové řízení v klouzavém režimu, které umožňuje předem definovat trajektorie, po kterých se bude stav systému pohybovat.

### 5.3.5 Kontrolní otázky pro kapitolu 5.3

1. Jak lze omezit vznik kmitů v regulačním obvodu při použití reléového regulátoru?
2. Předpokládejte, že máte nelinearitu typu relé s hysterezí. Je možné upravit velikost hystereze bez zásahu do původního nelineárního bloku?
3. Co je to řízení v klouzavém režimu?

4. Jakou metodu můžete použít pro návrh reléového regulátoru?

Správné odpovědi jsou uvedeny v dodatku A.

## 5.4 Řízení v klouzavém režimu

### 5.4.1 Motivace

V předchozí kapitole jsme si ukázali na příkladě reléového řízení polohového servomechanismu základní princip řízení v klouzavém režimu. Zatímco návrh provedený v uvedeném příkladě byl spíše intuitivní, zaměříme se nyní na výklad obecné metody návrhu reléového regulátoru. Ukážeme si rovněž, že regulátor pro řízení v klouzavém režimu je možné navrhnout tak, aby zajistil správnou činnost regulační smyčky i v případě změny parametrů řízeného systému.

### 5.4.2 Návrh regulátoru v klouzavém režimu

Předpokládejme, že řízený systém je popsán soustavou diferenciálních rovnic

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\delta}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})[\mathbf{u} + \boldsymbol{\delta}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})] \quad (5.85)$$

přičemž budeme uvažovat, že funkce  $\mathbf{f}_0$  a matice  $\mathbf{G}$  jsou přesně známé, zatímco  $\boldsymbol{\delta}_1$  a  $\boldsymbol{\delta}_2$  vyjadřují neurčitosti a jejich tvar nemusí být přesně znám. Lze ukázat, že každý takový systém je možné vhodnou transformací stavových proměnných  $\mathbf{T}$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \quad (5.86)$$

převést na standardní tvar

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} &= \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\delta}_\eta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \\ \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} &= \mathbf{f}_a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{G}_a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})[\mathbf{u} + \boldsymbol{\delta}_\xi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u})] \end{aligned} \quad (5.87)$$

Funkce  $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{f}_a$  a matice  $\mathbf{G}_a$  jsou opět známé, neurčitosti jsou nyní reprezentovány funkcemi  $\boldsymbol{\delta}_\eta$  a  $\boldsymbol{\delta}_\xi$ . Předpokládejme, že  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\delta}_\eta(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  a systém tedy může mít rovnovážný stav v počátku stavového prostoru. Pokusíme se vyřešit problém stabilizace - hledáme takové řízení, které převede systém do počátku stavového prostoru.

Všimněme si, že v zápisu (5.87) došlo k oddělení stavových proměnných  $\boldsymbol{\xi}$ , které jsme schopni přímo ovlivňovat vstupním signálem  $\mathbf{u}$ , od proměnných  $\boldsymbol{\eta}$ , které lze ovlivňovat pouze nepřímo prostřednictvím stavových proměnných  $\boldsymbol{\xi}$ .

V prvním kroku budeme řešit stabilizaci systému

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\delta}_\eta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \quad (5.88)$$

příčemž vektor proměnných  $\xi$  budeme považovat za řídicí vstup systému. Řízení zvolíme jako funkci stavových proměnných  $\eta$

$$\xi = \phi(\eta) \quad (5.89)$$

příčemž  $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Dostáváme pak

$$\frac{d\eta}{dt} = \mathbf{f}(\eta, \phi(\eta)) + \delta_\eta(\eta, \phi(\eta)) \quad (5.90)$$

Funkci  $\phi$ , která definuje řízení, musíme zvolit tak, aby systém (5.90) byl asymptoticky stabilní. Její volbu můžeme provést na základě analýzy Ljapunovovy funkce, nebo návrhem regulátoru pro linearizovaný systém. V řadě praktických případů dostáváme v tomto kroku lineární systém, kdy řízení můžeme navrhnout pomocí metod, se kterými jsme se seznámili v kurzu Regulace a řízení I. Jak uvidíme později, bude volba řízení  $\phi$  rozhodující pro dynamické vlastnosti celého systému. Řešení se může výrazně zkomplikovat, pokud jsou přítomné neurčitosti reprezentované funkcí  $\delta_\eta$ . Řízení pak musí být navrženo tak, aby byl systém asymptoticky stabilní pro všechny uvažované hodnoty neurčitostí.

Předpokládejme, že se nám vhodné řízení (5.89) podařilo najít. Rovnice (5.89) definuje útvar (varietu - v anglické literatuře označováno jako manifold [7]), po kterém se musí stav systému pohybovat. Tímto útvarem může být křivka, plocha a podobně. Je zřejmé, že pokud definujeme rozdíl

$$\mathbf{z} = \xi - \phi(\eta) \quad (5.91)$$

bude rovnice (5.89) splněna při  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ . Derivací rovnice (5.91) a dosazením (5.87) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}}{dt} &= \frac{d\xi}{dt} - \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \frac{d\eta}{dt} = \\ &= \mathbf{f}_a(\eta, \xi) + \mathbf{G}_a(\eta, \xi)[\mathbf{u} + \delta_\xi(\eta, \xi, \mathbf{u})] - \frac{\partial\phi}{\partial\eta} [\mathbf{f}(\eta, \xi) + \delta_\eta(\eta, \xi)] \end{aligned} \quad (5.92)$$

Rovnice (5.92) je vlastně dynamickým systémem odchylek od variety definované vztahem (5.91). Naším dalším cílem bude tedy nalezení takového řízení  $\mathbf{u}$ , které zajistí, že v konečném čase dosáhneme stavu  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ , přičemž v tomto stavu setrváme. Řízení budeme hledat ve tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{eq} + \mathbf{G}_a^{-1}(\eta, \xi)\mathbf{v} \quad (5.93)$$

Část řízení označená jako  $\mathbf{u}_{eq}$  se nazývá *ekvivalentní řízení*. Vzhledem k možnosti zjednodušení řešení volíme ekvivalentní řízení tak, aby byly eliminovány známé členy v rovnici (5.92)

$$\mathbf{u}_{eq} = \mathbf{G}_a^{-1}(\eta, \xi) \left[ -\mathbf{f}_a(\eta, \xi) + \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \mathbf{f}(\eta, \xi) \right] \quad (5.94)$$

Po dosazení (5.94) do (5.93) a následně do (5.92) dostaneme

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{v} + \mathbf{\Delta}(\eta, \xi, \mathbf{v}) \quad (5.95)$$

kde

$$\Delta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) = \mathbf{G}_a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\delta}_\xi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}_{eq} + \mathbf{G}_a^{-1}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})\mathbf{v}) - \frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\delta}_\eta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \quad (5.96)$$

Vzhledem k přítomnosti neurčitostí neznáme skutečnou hodnotu  $\Delta$ , ale obvykle dokážeme alespoň určit její maximální možnou hodnotu

$$\|\Delta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v})\|_\infty \leq \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + k\|\mathbf{v}\|_\infty \quad (5.97)$$

kde  $\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  a  $0 \leq k < 1$ . Pro každou proměnnou  $z$  vektoru  $\mathbf{z}$ , jejíž chování lze popsat rovnicí

$$\frac{dz_i}{dt} = v_i + \Delta_i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (5.98)$$

musíme najít takové řízení  $v_i$ , že hodnota stavové proměnné  $z_i$  půjde k nule. Vhodné řízení najdeme snadno použitím Ljapunovovy funkce. Ljapunovou funkci budeme pro každou z rovnic (5.98) hledat ve tvaru

$$V_i(z_i) = \frac{1}{2}z_i^2 \quad (5.99)$$

Je zřejmé, že funkce určené vztahem (5.99) jsou pozitivně definitní. Derivace funkce, která je kandidátem na Ljapunovovu funkci je s uvážením (5.97)

$$\frac{dV_i}{dt} = z_i \frac{dz_i}{dt} = z_i v_i + z_i \Delta_i(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) \leq z_i v_i + |z_i| [\rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + k\|\mathbf{v}\|_\infty] \quad (5.100)$$

Předpokládejme, že řízení bude ve tvaru

$$v_i = -\frac{\beta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}{1-k} \text{sign } z_i \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (5.101)$$

kde  $\beta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \geq \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) + b$  a  $b > 0$ . Při této volbě řízení nám vlastně útvar definovaný vztahem  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$  (což odpovídá rovnosti (5.89)) určuje rozhraní, na kterém bude docházet k přepínání znaménka řízení. Pro derivaci Ljapunovovy funkce můžeme najít nerovnost

$$\begin{aligned} \frac{dV_i}{dt} &\leq -\frac{\beta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}{1-k}|z_i| + \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})|z_i| + k\frac{\beta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}{1-k}|z_i| = \\ &= -\beta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})|z_i| + \rho(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})|z_i| \leq -b|z_i| \end{aligned} \quad (5.102)$$

Pro derivaci námi zvolené funkce tedy platí

$$\frac{dV_i}{dt} \leq -b|z_i| \quad (5.103)$$

Výše uvedená derivace představuje negativně definitní funkci a je tedy zřejmé, že funkce (5.99) je platnou Ljapunovovu funkcí. Použijeme-li tedy řízení (5.101), bude hodnota proměnných  $z_i$  asymptoticky klesat k nule. Odtud vyplývá, že pokud dosáhneme stavu  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ , nadále v něm setrváme. Zbývá nám již jen zjistit, zda stavu  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$  dosáhneme v konečném čase. Protože platí

$$\frac{dV_i}{dt} = z_i \frac{dz_i}{dt} \leq -b|z_i| \quad (5.104)$$

a tedy

$$\begin{aligned} \frac{dz_i}{dt} &\leq -b & z_i > 0 \\ \frac{dz_i}{dt} &\geq b & z_i < 0 \end{aligned} \tag{5.105}$$

vidíme, že každá z hodnot  $|z_i|$  klesá k nule s rostoucím časem rychleji než lineárně. Je tedy jisté, že nulové hodnoty dosáhne v konečném čase.

Řízení bude probíhat ve třech fázích:

1. stav systému bude směřovat k přepínacímu rozhraní. V této fázi nedochází k přepínání.
2. v konečném čase je dosaženo přepínacího rozhraní.
3. stav systému „klouže“ po přepínacím rozhraní, které je dáno rovnicí (5.89). Stav již toto rozhraní neopustí. Systém se začne chovat jako systém nižšího řádu (stavové proměnné jsou svázané podmínkou (5.89)). Dynamika pohybu po přepínacím rozhraní je dána jen rovnicí (5.90).

Postup návrhu regulátoru pro řízení v klouzavém režimu můžeme shrnout do následujících kroků:

1. popis systému převedeme vhodnou transformací stavových proměnných na standardní tvar (5.87).
2. navrhne řízení  $\phi$  pro tu část systému, na který nemůžeme působit přímo vstupním signálem (5.88), čímž určíme přepínací rozhraní definované vztahem (5.89).
3. zavedeme proměnnou určující odchylku od přepínacího rozhraní (5.91) a její derivací dostáváme systém (5.92). Hledáme řízení systému (5.92) takové, aby bylo dosaženo počátku stavového prostoru v konečném čase.
4. určíme ekvivalentní řízení  $\mathbf{u}_{eq}$  (5.94) tak, aby došlo k eliminaci známých členů v rovnici (5.92).
5. po dosazení ekvivalentního řízení (5.94) do (5.93) a následně do (5.92) dostaneme vztah pro veličinu  $\Delta$ .
6. najdeme horní mez hodnoty  $|\Delta|$  ve tvaru (5.97).
7. pomocí vztahu (5.101) určíme řízení  $\mathbf{v}$ .

Celý postup si detailně ukážeme na následujícím příkladě.

**Příklad 5.11** *Uvažujme systém druhého řádu popsaný stavovými rovnicemi*

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \theta_2 x_2^2 + x_1 + u \end{aligned} \tag{5.106}$$

kde  $\theta_1, \theta_2$  jsou neznámé parametry, o kterých víme, že platí  $|\theta_1| \leq a$ ,  $|\theta_2| \leq b$ . Úkolem je najít takové řízení, které zajistí převedení systému do stavu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Porovnáním (5.106) s rovnicemi (5.87) vidíme, že popis systému je již ve standardním tvaru a nemusíme tedy provádět žádnou transformaci stavových proměnných.

V prvním kroku budeme hledat řízení systému

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2 \quad (5.107)$$

vstupem  $x_2$ . Vhodné stabilizující řízení můžeme navrhnout např. pomocí Ljapunovovy metody ověření stability. Nejjednodušší možná volba Ljapunovovy funkce je v tomto případě

$$V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 \quad (5.108)$$

s derivací

$$W(x_1) = \frac{dV(x_1)}{dt} = x_1 \dot{x}_1 = x_1 x_2 + \theta_1 x_1^2 \sin x_2 \leq x_1 x_2 + a x_1^2 \quad (5.109)$$

Aby byla derivace negativně definitní, stačí, aby platilo

$$x_2 = -(1+a)x_1 \quad (5.110)$$

čímž dostaneme

$$W(x_1) = \frac{dV(x_1)}{dt} \leq -(1+a)x_1^2 + a x_1^2 = -x_1^2 \quad (5.111)$$

Na základě navrženého řízení (5.110) určíme přepínací rozhraní, které bude v tomto případě představovat přímkou

$$z = x_2 + (1+a)x_1 = 0 \quad (5.112)$$

Derivací tohoto vztahu a dosazením stavových rovnic dostaneme

$$\frac{dz}{dt} = \dot{x}_2 + (1+a)\dot{x}_1 = \theta_2 x_2^2 + x_1 + u + (1+a)(x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2) \quad (5.113)$$

Nyní se pokusíme najít řízení  $u$  ve tvaru (5.93), což v našem případě představuje

$$u = u_{eq} + v \quad (5.114)$$

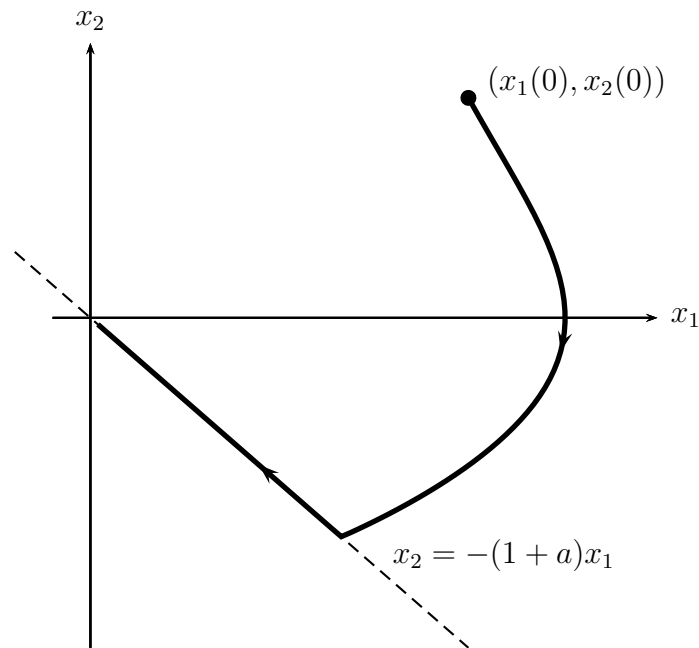
Ekvivalentní řízení  $u_{eq}$  zvolíme tak, aby došlo k eliminaci všech známých členů v rovnici (5.113)

$$u_{eq} = -x_1 - (1+a)x_2 \quad (5.115)$$

Dosazením (5.115) do (5.114) a následně (5.113) dostaneme

$$\frac{dz}{dt} = v + \Delta(\mathbf{x}) \quad (5.116)$$





**Obrázek 5.23:** Stavová trajektorie regulačního děje z příkladu 5.11

kde

$$\Delta(\mathbf{x}) = \theta_2 x_2^2 + (1+a)\theta_1 x_1 \sin x_2 \quad (5.117)$$

Nyní najdeme horní mez pro hodnotu  $|\Delta(\mathbf{x})|$ . Je zřejmé, že bude platit

$$|\Delta(\mathbf{x})| \leq a(1+a)|x_1| + bx_2^2 \quad (5.118)$$

a ve vztahu (5.101) můžeme tedy zvolit

$$\begin{aligned} \beta(\mathbf{x}) &= a(1+a)|x_1| + bx_2^2 + b_0 \quad b_0 > 0 \\ k &= 0 \end{aligned} \quad (5.119)$$

Výsledné řízení pak bude

$$\begin{aligned} u &= u_{eq} - \beta(\mathbf{x}) \operatorname{sign} z = \\ &= -x_1 - (1+a)x_2 - (a(1+a)|x_1| + bx_2^2 + b_0) \operatorname{sign}(x_2 + (1+a)x_1) \end{aligned} \quad (5.120)$$

Průběh regulačního děje je zachycen na obr. 5.23. Trajektorie systému směřuje v první fázi z počátečního stavu k přepínací přímce. V okamžiku, kdy dosáhne přepínací přímky, klouže stav po této přímce směrem k počátku souřadnicového systému.

Při použití metody v klouzavém režimu je třeba zvážit, zda je technicky vhodné provádět rychlé přepínání akční veličiny. V případě, kdy se jedná o řízení pohonů, elektrického vytápění atd., kdy je používáno pulzně-šířkové modulace nezpůsobuje použití uvedené metody potíže (přepínání relé v podstatě nahradí pulzně-šířkovou modulaci). V případě, kdy akční členy mají mechanickou povahu jako např. ventily, není takovéto řízení vhodné zejména z důvodu možnosti neúměrného opotřebení akčních členů.

Řízení v klouzavém režimu, tak jak bylo odvozeno v této kapitole, vede obvykle k takové činnosti systému, kdy dochází k přepínání relé v podstatě s nekonečnou frekvencí. Je zřejmé, že použitý matematický model nemůže reprezentovat žádný reálný fyzikální systém, což bude dále diskutováno v kapitole 6.1. V reálné aplikaci pak bude docházet k přepínání relé s periodou danou technickými prostředky (frekvenční pásmo elektronických obvodů, vzorkovací frekvence při zpracování na mikroprocesoru...). V důsledku toho nebude trajektorie systému přesně sledovat přepínací rozhraní, ale bude kolem něj s vysokou frekvencí kmitat, což není obvykle přijatelné (opotřebení, hluk). Existují metody tzv. řízení v klouzavém režimu s diskrétním časem, které tento problém eliminují, nicméně jejich složitost značně překračuje rozsah studovaného předmětu a nebudeme se jimi dále zabývat. Problémem spojeným s řízením v klouzavém režimu je i fakt, že i po dosažení počátku stavové roviny dochází k neustálému přepínání akční veličiny.

Uvedené problémy jsou spojeny s tím, že regulační obvod obsahuje nelinearitu s nespojitostí - relé. V praktických aplikacích pak často dokážeme dosáhnout přijatelnějších výsledků použitím aproximace reléové charakteristiky spojitou funkcí. Jednou z možných aproximací je Ambrosinova aproximace popsaná vztahem

$$y = y_{max} \frac{x}{|x| + \delta} \quad (5.121)$$

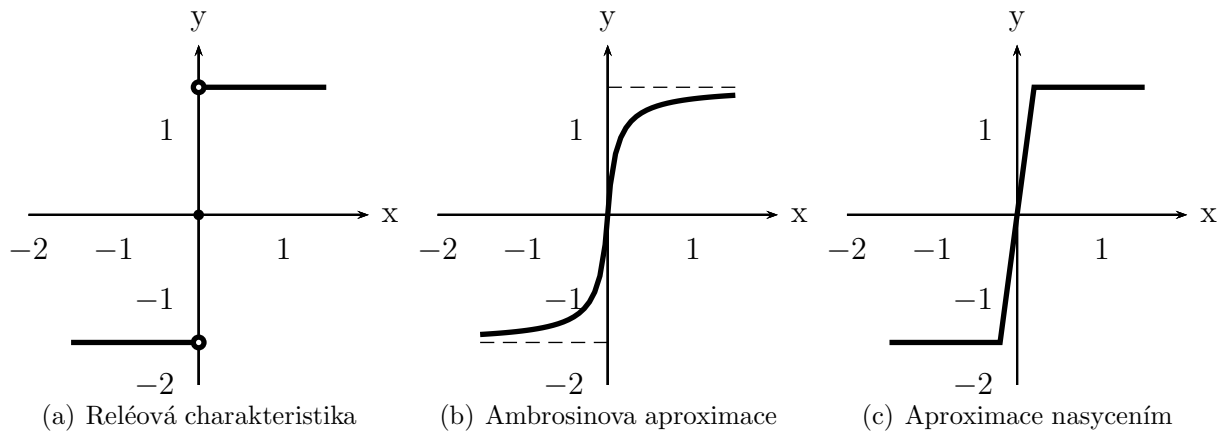
jejíž průběh je zobrazen na obr. 5.24(b). Pro  $\delta \rightarrow 0$  se pak blíží reléové charakteristice. Z důvodu jednoduché realizace však často používáme aproximaci nasycením obr. 5.24(c) s velkým zesílením  $K$  v proporcionalní oblasti. Pro  $K \rightarrow \infty$  se opět blížíme reléové charakteristice.

Při použití aproximace reléové charakteristiky spojitou funkcí dojde k odstranění kmitání systému. Jistou nevýhodou je však to, že stavová trajektorie nebude sledovat přesně námi zvolené přepínací rozhraní, ale bude se pohybovat v určité oblasti v jeho okolí. V případě aproximace nasycením má tato oblast ostré hranice a je tím užší, čím větší zesílení v proporcionalní oblasti použijeme. Při použití Ambrosinovy aproximace nejsou hranice přesně definované, přičemž s klesající hodnotou  $\delta$  bude trajektorie lépe sledovat přepínací rozhraní. Volba zesílení  $K$  nebo parametru  $\delta$  je otázkou kompromisu mezi odstraněním kmitání a přesností sledování přepínacího rozhraní a většinou se provádí experimentálně pomocí simulací.

### 5.4.3 Shrnutí kapitoly 5.4

Při řízení v klouzavém režimu dosáhneme toho, že trajektorie systému se bude pohybovat po přepínacím rozhraní. To představuje velice výhodnou vlastnost, protože tvar přepínacího rozhraní můžeme předem zvolit a tak vlastně definovat podobu trajektorie systému během regulačního děje.

Zajímavá je rovněž skutečnost, že během návrhu regulátoru byly zohledněny i neurčitosti hodnot parametrů řízeného systému tak, že navržený regulátor je funkční v předem daném intervalu jejich možných hodnot. Řízení v klouzavém režimu tak představuje jednu z možných metod tzv. *robustního řízení*.



**Obrázek 5.24:** Aproximace reléové charakteristiky spojitou funkcí

#### 5.4.4 Kontrolní otázky pro kapitolu 5.4

1. Musí být znám pro návrh regulátoru pro řízení v klouzavém režimu přesný model řízeného systému?
2. Čím je určen průběh stavové trajektorie systému, pokud se nachází v klouzavém režimu?
3. Jak probíhá regulační děj pokud je použit regulátor pro řízení v klouzavém režimu?
4. Proč nahrazujeme relé nasycením s velkým zesílením?

Správné odpovědi jsou uvedeny v dodatku A.

#### 5.4.5 Řešené příklady pro kapitolu 5.4

**Příklad 5.12** Předpokládejme servomechanismus popsaný rovnicemi

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \omega_m \\ \frac{d\omega_m}{dt} &= \frac{C}{JR_a} [-C\omega_m + u] \end{aligned} \quad (5.122)$$

kde konstanta stroje  $C$  je neměnná a budeme předpokládat, že její hodnotu známe. Moment setrvačnosti  $J$  a odpor kotvy  $R_a$  se může měnit, přičemž budeme předpokládat, že  $J \geq \hat{J}$  a  $R_a \geq \hat{R}_a$ , kde  $\hat{J}$  a  $\hat{R}_a$  jsou nominální hodnoty. Za uvedených předpokladů chceme najít řízení, které převede systém do počátku stavové roviny.

Rovnice můžeme upravit do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \omega_m \\ \frac{d\omega_m}{dt} &= a[-C\omega_m + u] \\ a &= \frac{C}{JR_a} \end{aligned} \quad (5.123)$$

Z předpokladů uvedených v zadání je zřejmé, že bude platit je zřejmé, že bude platit  $a \leq \hat{a}$ , kde  $\hat{a}$  je nominální hodnota parametru  $a$ . Rovnice převedeme do standardního tvaru pro metodu návrhu klouzavého režimu

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \omega_m \\ \frac{d\omega_m}{dt} &= \hat{a} \left[ u + \frac{a - \hat{a}}{\hat{a}} u - \frac{Ca}{\hat{a}} \omega_m \right] \end{aligned} \quad (5.124)$$

V prvním kroku navrhne stabilizující řízení pro systém  $\dot{y} = \omega_m$ , kde řídicím vstupem je nyní  $\omega_m$ . Nejjednodušší možné řízení je

$$\omega_m = -Ky \quad K > 0 \quad (5.125)$$

Rozdíl mezi skutečnou a požadovanou hodnotou  $\omega_m$  je

$$z = \omega_m + Ky = 0 \quad (5.126)$$

čímž je současně určena přepínací přímka. Derivací podle času a dosazením upravený stavových rovnic pak dostaneme

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\omega_m}{dt} + K \frac{dy}{dt} = \hat{a} \left[ u + \frac{a - \hat{a}}{\hat{a}} u + \frac{K - Ca}{\hat{a}} \omega_m \right] \quad (5.127)$$

řízení zvolíme ve tvaru  $u = u_{eq} + \frac{v}{\hat{a}}$ ,  $u_{eq} = 0$ . Po dosazení do rovnice (5.127) pak dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v + \frac{a - \hat{a}}{\hat{a}} v + (K - Ca)\omega_m = v + \Delta \\ \Delta &= \frac{a - \hat{a}}{\hat{a}} v + (K - Ca)\omega_m \end{aligned} \quad (5.128)$$

Nyní najdeme horní mez hodnoty  $|\Delta|$

$$|\Delta| \leq |\delta_a| |v| + |K - Ca| |\omega_m| \quad (5.129)$$

Vzhledem k tomu, že  $|\delta_a| = \left| \frac{a - \hat{a}}{\hat{a}} \right| < 1$  odpovídá nerovnost pro  $\Delta$  tvaru (5.97), kde  $k = \delta_a$  a  $\rho = |K - Ca| |\omega_m|$ . V další fázi řešení musíme určit  $\beta > \rho$ , čemuž v našem případě odpovídá

$$\beta = |K - Ca| \omega_{max} \quad (5.130)$$

kde  $\omega_{max}$  je předpokládaná maximální možná úhlová rychlost motoru. Pro řízení  $v$  pak dostaneme z (5.101)

$$v = -\frac{\beta}{1 - k} \text{sign } z = -\frac{|K - Ca| \omega_{max}}{1 - |\delta_a|} \text{sign}(Ky + \omega_m) \quad (5.131)$$

Po dosazení získáme podobu řízení  $u$

$$u = -\frac{|K - Ca| \omega_{max}}{\hat{a}(1 - |\delta_a|)} \text{sign}(Ky + \omega_m) = -\frac{|K - Ca| \omega_{max}}{\hat{a} - |a - \hat{a}|} \text{sign}(Ky + \omega_m) \quad (5.132)$$

Vzhledem k tomu, že předpokládáme  $a < \hat{a}$ , platí

$$\begin{aligned} u &= -\frac{|K - Ca|\omega_{max}}{a} \text{sign}(Ky + \omega_m) = -\left|\frac{K}{a} - C\right| \omega_{max} \text{sign}(Ky + \omega_m) = \\ &= -|KTC - C| \omega_{max} \text{sign}(Ky + \omega_m) = -|KT - 1|C\omega_{max} \text{sign}(Ky + \omega_m) \end{aligned} \quad (5.133)$$

kde  $T = \frac{JR_a}{C^2}$ .

Z odvození regulátoru pro klouzavý režim je patrné, že činnost regulátoru zůstane zachována i pokud zvětšíme hodnotu přepínané části akční veličiny. V našem případě můžeme tedy zvolit řízení ve tvaru

$$u = -U \text{sign}(Ky + \omega_m) \quad U \geq |KT - 1|C\omega_{max} \quad (5.134)$$

což odpovídá závěrům dosaženým během řešení reléového řízení servomechanismu v kapitole 5.3.2. Všimněme si, že pro úspěšné dokončení návrhu by musela být známá horní mez časové konstanty  $T$  a tedy i parametrů  $J$  a  $R_a$ .

**Příklad 5.13** Pohyb kyvadla je možné obecně popsat rovnicemi ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -a \sin(x_1 + \delta_1) - bx_2 + cu \end{aligned} \quad (5.135)$$

kde parametrem  $\delta_1$  můžeme ovlivnit žádanou polohu kyvadla. Budeme předpokládat, že parametry systému mají nominální hodnoty  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{c}$  a že platí  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $0 < c \leq \hat{c}$ . Hledáme řízení, které bude zajišťovat stabilitu systému i při změně parametrů.

Stavové rovnice převedeme do standardního tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\hat{a} \sin(x_1 + \delta_1) - \hat{b}x_2 + \hat{c}[u + \delta(x_1, x_2, u)] \\ \delta(x_1, x_2, u) &= \frac{1}{\hat{c}}[-(a - \hat{a}) \sin(x_1 + \delta_1) - (b - \hat{b})x_2 + (c - \hat{c})u] \end{aligned} \quad (5.136)$$

V prvním kroku budeme hledat řízení systému

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad (5.137)$$

prostřednictvím vstupu  $x_2$ . Nejjednodušší řízení, které zajistí, že stav  $x_1$  bude směřovat k nule je

$$x_2 = -\mu x_1 \quad \mu > 0 \quad (5.138)$$

při jehož použití bude hodnota  $x_1$  exponenciálně klesat (bude se chovat jako setrvačný členek prvního řádu). Přepínacím rozhraním tedy bude přímka  $x_2 = -\mu x_1$  a odchylka od tohoto rozhraní je

$$z = x_2 + \mu x_1 \quad (5.139)$$

Derivací podle času a dosazením upravených stavových rovnic dostaneme

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx_2}{dt} + \mu \frac{dx_1}{dt} = -\hat{a} \sin(x_1 + \delta_1) - \hat{b}x_2 + \hat{c}[u + \delta(x_1, x_2, u)] + \mu x_2 \quad (5.140)$$

Řízení budeme hledat ve tvaru

$$u = u_{eq} + \frac{v}{\hat{c}} \quad (5.141)$$

kde ekvivalentní řízení  $u_{eq}$  zvolíme tak, aby byly eliminovány známé členy ve vztahu (5.140)

$$u_{eq} = \frac{1}{\hat{c}}[\hat{a} \sin(x_1 + \delta_1) + \hat{b}x_2 - \mu x_2] \quad (5.142)$$

Po dosazení do (5.140) dostaneme

$$\frac{dz}{dt} = v + \hat{c}\delta\left(x_1, x_2, u_{eq} + \frac{v}{\hat{c}}\right) = v + \Delta(x_1, x_2, u) \quad (5.143)$$

a tedy

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, x_2, u) &= \hat{c}\delta\left(x_1, x_2, u_{eq} + \frac{v}{\hat{c}}\right) = \\ &= -(a - \hat{a}) \sin(x_1 + \delta_1) - (b - \hat{b})x_2 + (c - \hat{c})\left(u_{eq} + \frac{v}{\hat{c}}\right) = \\ &= -(a - \hat{a}) \sin(x_1 + \delta_1) - (b - \hat{b})x_2 + \frac{c - \hat{c}}{\hat{c}}[\hat{a} \sin(x_1 + \delta_1) + \hat{b}x_2 - \mu x_2 + v] = \\ &= \frac{c - \hat{c}}{\hat{c}}v + \left(-a + \frac{c}{\hat{c}}\hat{a}\right) \sin(x_1 + \delta_1) + \left(-b + \frac{c}{\hat{c}}\hat{b} - \mu \frac{c - \hat{c}}{\hat{c}}\right) x_2 \leq \\ &\leq \left|\frac{c - \hat{c}}{\hat{c}}\right| |v| + \left|-a + \frac{c}{\hat{c}}\hat{a}\right| + \left|-b + \frac{c}{\hat{c}}\hat{b} - \mu \frac{c - \hat{c}}{\hat{c}}\right| |x_2| \end{aligned} \quad (5.144)$$

Nyní musíme určit horní meze neznámých členů na základě znalosti možných hodnot parametrů  $a, b, c$

$$\begin{aligned} K &\geq \left|\frac{c - \hat{c}}{\hat{c}}\right| \\ K_1 &\geq \left|-a + \frac{c}{\hat{c}}\hat{a}\right| \\ K_2 &\geq \left|-b + \frac{c}{\hat{c}}\hat{b} - \mu \frac{c - \hat{c}}{\hat{c}}\right| \end{aligned} \quad (5.145)$$

Vzhledem k předpokladům v zadání lze najít takovou hodnotu  $K$ , že platí  $K < 1$ . Pak můžeme napsat

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, x_2, u) &\leq K|v| + K_1 + K_2|x_2| = K|v| + \rho \\ \rho &= K_1 + K_2|x_2| \end{aligned} \quad (5.146)$$

Nyní hledáme hodnotu  $\beta \geq \rho + b_0$   $b_0 > 0$ , čemuž vyhovuje

$$\beta = K_1 + K_2|x_2| + b_0 \quad b_0 > 0 \quad (5.147)$$

a dosazením za  $\beta$  a  $K$  do vztahu (5.101) dostaneme část řízení  $v$ . Pro výsledné řízení  $u$  pak platí

$$\begin{aligned} u &= u_{eq} + \frac{v}{\hat{c}} = \\ &= \frac{1}{\hat{c}} \left[ \hat{a} \sin(x_1 + \delta 1) + \hat{b}x_2 - \mu x_2 - \frac{K_1 + K_2|x_2| + b_0}{1 - K} \operatorname{sign}(x_2 + \mu x_1) \right] \end{aligned} \quad (5.148)$$

Během regulačního děje systém nejdříve dosáhne přepínací přímky  $x_2 = -\mu x_1$  a následně se bude po ní pohybovat směrem k počátku stavové roviny s dynamikou odpovídající setrvačnému članku prvního řádu.

### 5.4.6 Neřešené příklady pro kapitolu 5.4

**Příklad 5.14** Řízený systém je popsán stavovými rovnicemi ve standardním tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= b \sin x_1 - 3x_2 + u \end{aligned} \quad (5.149)$$

kde  $b$  je neznámý parametr s hodnotou  $-1 < b < 1$ . Navrhněte regulátor pro řízení v klouzavém režimu, který převede systém z libovolného počátečního stavu do stavu  $x_1 = x_2 = 0$ .

## 6 Modelování a simulace nelineárních systémů

Modelování a simulace nelineárních systémů je spojeno s některými komplikacemi spojenými s otázkou řešitelnosti soustavy nelineárních diferenciálních rovnic a s vlastnostmi numerických metod použitých k řešení. O některých z nich se zmíníme v této kapitole.

### 6.1 Řešitelnost modelu nelineárního systému

#### 6.1.1 Motivace

Při studiu lineárních systémů jsme se nemuseli zabývat otázkou řešitelnosti stavových rovnic. U nelineárních systémů je situace složitější. Zanedbání problematiky řešitelnosti nelineárních rovnic pak může vést k chybné interpretaci simulačních výsledků. V následující části proto nastíníme problematiku řešitelnosti soustavy nelineárních diferenciálních rovnic.

#### 6.1.2 Ověření řešitelnosti popisu nelineárního systému

V případě lineárních dynamických systémů popsaných soustavou lineárních diferenciálních rovnic

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \quad (6.1)$$

není nutné se otázkou řešitelnosti zabývat. Je to dáno tím, že soustava lineárních diferenciálních rovnic má vždy řešení a není tedy možné sestavit neřešitelný model.

U nelineárních systémů je situace poněkud složitější. Pro soustavu nelineárních diferenciálních rovnic není obecně zajištěna existence funkce, která je jejím řešením. Řešitelnost soustavy diferenciálních rovnic lze určit pomocí následující věty:

**Věta 6.1** *Nechť je dána Cauchyova počáteční úloha*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.2)$$

*v oblasti  $G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  a čísla  $a, b$  taková, že funkce  $\mathbf{f}$  je spojitá na množině  $R = \{(\mathbf{x}, t) \in G \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq b, \|t - t_0\| \leq a\}$ . Označme*

$$M = \max_{(\mathbf{x}, t)} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\| \quad \alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \quad (6.3)$$

*Pak existuje řešení Cauchyovy počáteční úlohy definované a spojitě diferencovatelné na intervalu  $\langle t_0 - \alpha, t_0 + \alpha \rangle$ .*

Uvedená věta je podmínkou postačující, nikoli nutnou. Její splnění tedy zaručuje existenci řešení, řešení však může existovat i v případě jejího nesplnění. Vzhledem k její komplikovanosti ji většinou v technické praxi nepoužíváme a řešitelnost sestavené soustavy nelineárních diferenciálních rovnic nevyšetřujeme. Můžeme se pak dopustit vážného pochybení, které je často označováno jako „problém dvojité chyby“.

Každý reálný fyzikální systém na přivedené vstupní signály nějakým způsobem odpoví - neexistuje situace, že by byl reálný systém „neřešitelný“ a neexistovala tak jeho žádná reakce na vstupní signály. Neřešitelná soustava nelineárních rovnic může tedy vzniknout pouze v důsledku chybného sestavení modelu, který dostatečně nevystihuje významné vlastnosti původního systému. Vzniklý „neřešitelný“ model se pak snažíme řešit obvykle výpočtem na číslicovém případně analogovém počítači. Tím realizujeme neřešitelný model na jiném fyzikálním systému, přičemž realizace neodpovídá zcela přesně původnímu modelu (vlastnosti numerických metod u číslicového počítače, dynamické vlastnosti operačních zesilovačů u analogového počítače). Počítač, jako fyzikální systém, dá určité řešení. Toto řešení se ale může značně lišit od skutečného chování původního řešeného systému.

Pozorným prostudováním věty 6.1 o řešitelnosti soustavy nelineárních rovnic si všimneme, že problémy s řešitelností přináší výskyt nespojitosti v nelineární funkci. Problematický tedy může být výskyt nelinearity jako relé, tření a dalších, které obsahují nějakou nespojitost. U systémů obsahujících jen nelinearity, které neobsahují žádné body nespojitosti, jako nasycení, necitlivost a podobně, problém s řešitelností nevzniká. To samozřejmě neznamená, že při řešení není nutné pečlivě volit vhodnou numerickou metodu.

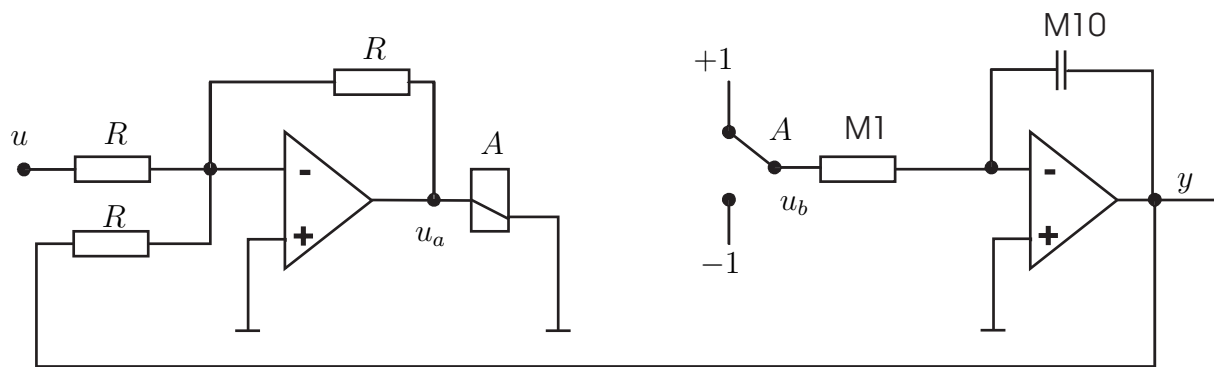
Celou problematiku vzniku „dvojitá chyba“ si nejlépe vysvětlíme na příkladu.

**Příklad 6.1** *Vznik neřešitelného modelu*

Uvažujme zapojení s operačními zesilovači, které je zakresleno na obr. 6.1. Pokusme se nyní sestavit model (soustavu diferenciálních rovnic) pro uvedené zapojení. Relé popíšeme ideální releovou charakteristikou podle rovnice (3.43) a dostáváme

$$u_a = -u - y \quad (6.4)$$





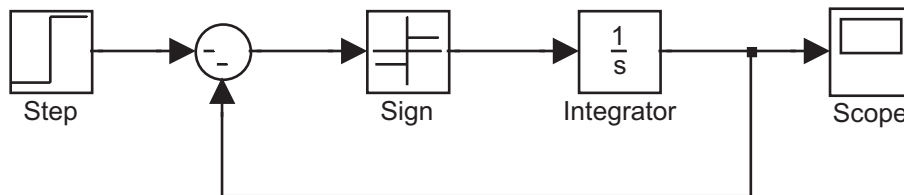
Obrázek 6.1: Zapojení s operačním zesilovačem

$$y = - \int_0^t u_b dt \quad (6.5)$$

$$u_b = \begin{cases} 1 & u_a < 0 \\ -1 & u_a \geq 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} -1 & -u - y < 0 \\ 1 & -u - y \geq 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

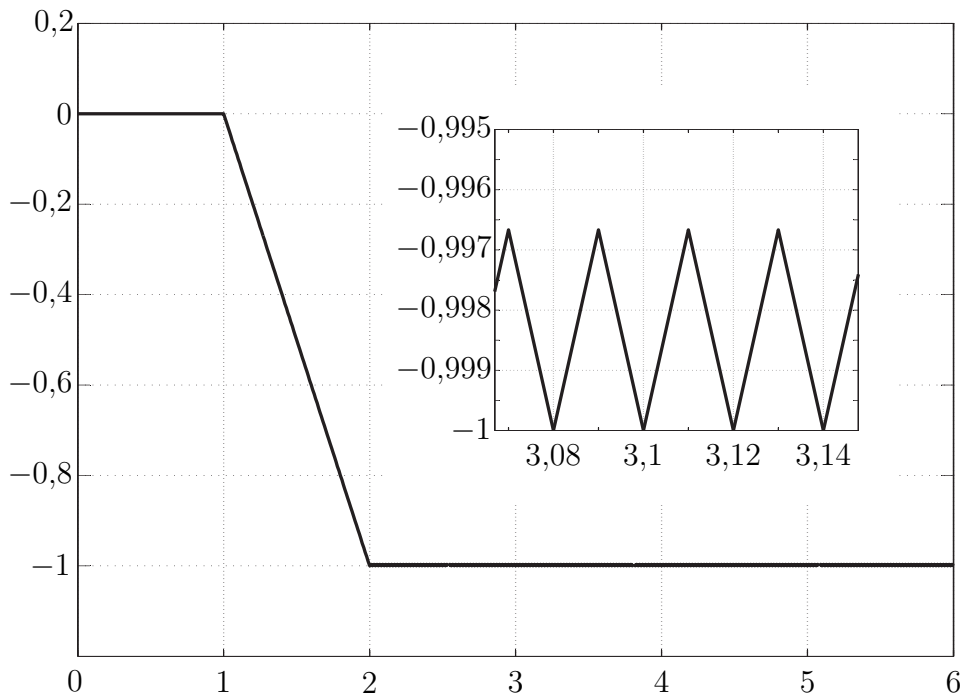
Dostáváme model, který nyní zkusíme řešit v prostředí Matlab-Simulink. Modelovací schema je uvedeno na obrázku 6.2.



Obrázek 6.2: Model zapojení s operačním zesilovačem

Jako vstupní signál uvažujeme jednotkový skok v čase 1s. Simulace byla provedena s použitím integrační metody třetího řádu s pevným krokem výpočtu 0,01s. Odezva systému je vykreslena na obr. 6.3. Z detailního výřezu je patrné, že výsledek simulace ukazuje na kmity v oblasti kolem ustálené hodnoty  $-1$ . Zajímavé nyní bude ověřit vliv použité integrační metody a kroku integrace. Pro dvě různé integrační metody a rozdílnou volbu kroku je srovnání zachyceno na obr. 6.4. Je zřejmé, že amplituda kmitů závisí na zvolené integrační metodě. Všimněme si rovněž, že perioda kmitů odpovídá zvolenému kroku výpočtu. Zvolená numerická metoda vždy ovlivňuje přesnost řešení. V našem případě však spíše „určuje“ významné vlastnosti nalezeného řešení.

Proveďme nyní jednoduchý „myšlenkový pokus“ pro odhad chování modelovaného systému. Předpokládejme, že se systém nachází ve stavu  $y = -1$  a na vstupu působí

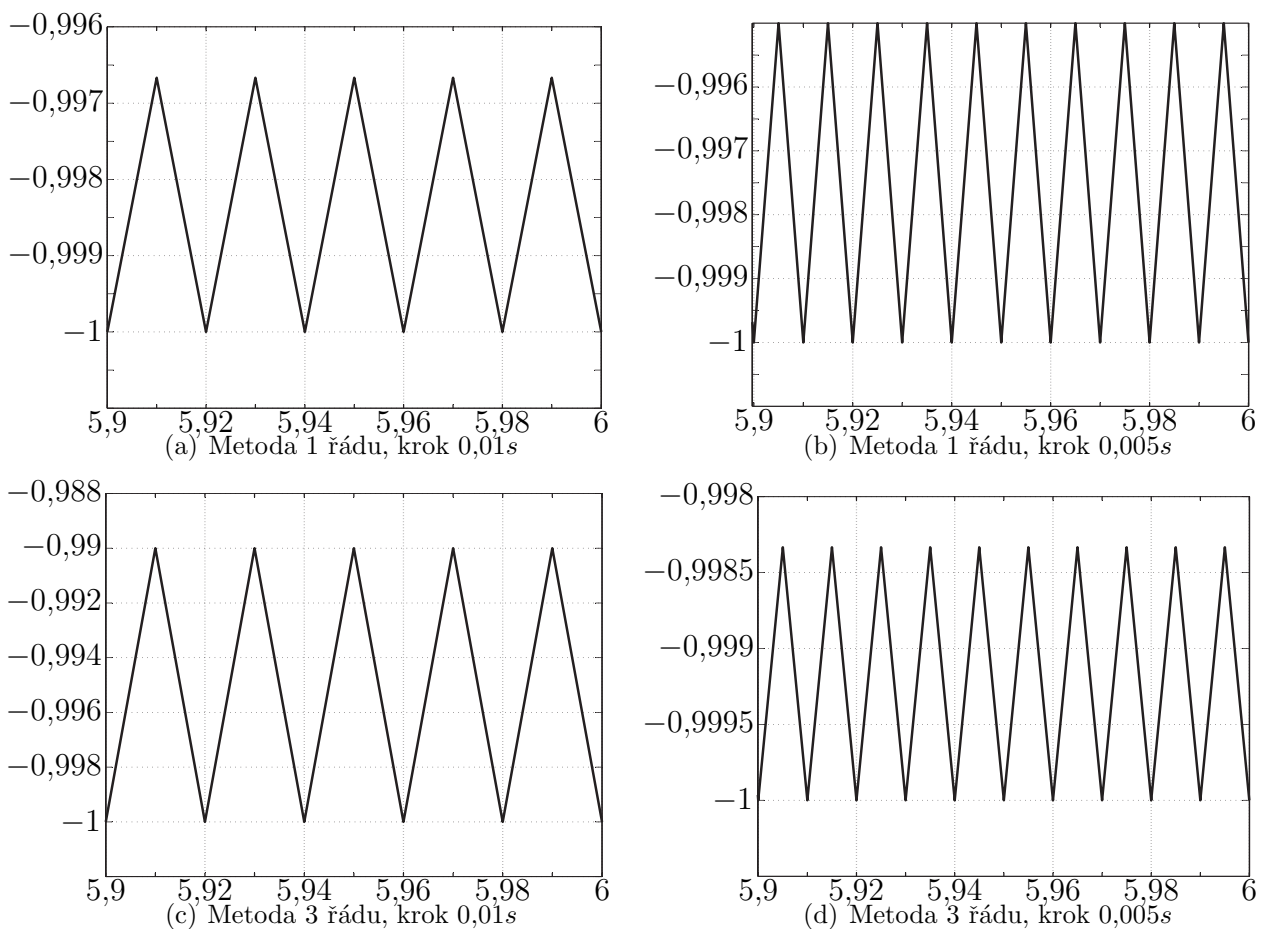


**Obrázek 6.3:** Odezva na jednotkový skok

konstantní signál  $u = 1$ . Z rovnice (6.7) je zřejmé, že derivace  $\frac{dy}{dt}$  je kladná a hodnota  $y$  bude růst směrem ke kladné hodnotě. Po uplynutí časového intervalu  $\tau \rightarrow 0$  hodnota  $y$  naroste o kladnou hodnotu  $\Delta y \rightarrow 0$ . Nicméně nyní již bude platit  $-u - y < 0$ , kdy podle (6.7) bude derivace  $\frac{dy}{dt}$  záporná a hodnota  $y$  začne klesat. Za čas  $\tau \rightarrow 0$  klesne o hodnotu  $\Delta y \rightarrow 0$  zpět na původní velikost  $y = -1$ . I když není uvedený myšlenkový pokus formálně z matematického hlediska správný, lze dospět k závěru, že očekávaný průběh veličiny  $y$  bude obsahovat kmity o nekonečné frekvenci (k přepínání směru derivace bude docházet s periodou  $\tau \rightarrow 0$ ). Takovému chování však neodpovídá žádná časová funkce ve smyslu, jak je z matematického hlediska pojem funkce chápán. Lze tedy tvrdit, že uvažovaná nelineární diferenciální rovnice nemá řešení. Vzhledem k tomu, že při  $u = 1$  obsahuje rovnice (6.7) pro  $y = -1$  nespojitost, je zřejmé, že neexistuje žádné okolí stavu  $y = -1$ , na kterém by byly splněny podmínky věty 6.1 a tedy závěr, že rovnice nemá řešení s ní není ve sporu.

Jak však mohla tato situace nastat? První chyba spočívá v modelu nevhodně zvoleném pro danou úlohu. Rovnice (6.7) není vhodným matematickým modelem pro zapojení z obr. 6.1. Skutečná frekvence kmitů bude totiž v daném případě ovlivněna řadou dalších faktorů - hystereze a necitlivost relé (v důsledku konstrukčního řešení relé bude vždy přítomna, byť v malé míře) a rovněž mechanické vlastnosti jazýčku relé, který bude mít také svoji dynamiku. Druhou chybou pak byla snaha o numerické řešení úlohy, pro které řešení neexistuje. Výsledek pak byl závislý zcela na použité numerické metodě a vůbec nevyjadřoval chování původního systému.

Jak již bylo řečeno dříve, určení řešitelnosti obecné soustavy nelineárních diferenciálních rovnic je problematické a často i nemožné. Neexistuje jednoznačný postup, jak se chybám



**Obrázek 6.4:** Vliv integrační metody a kroku výpočtu na výsledek simulace

obdobného charakteru zaručeně vyhnout. Je tedy třeba pečlivě zvážit možná zjednodušení reality při sestavování matematického popisu (nesmíme zanedbat pro danou úlohu podstatné vlastnosti systému) a rovněž kontrolovat výsledky simulačních výpočtů v návaznosti na jejich fyzikální interpretaci.

### 6.1.3 *Shrnutí kapitoly 6.1*

V případě nelineárních systémů musíme velice opatrně interpretovat výsledky simulací. Vzhledem k tomu, že v praxi často neprovádíme ověření řešitelnosti sestaveného modelu nelineárního systému, mohou být výsledky simulací zatíženy značnými chybami. Důraz je třeba klást především na nezanedbání dynamických vlastností, které jsou vzhledem k povaze řešené úlohy podstatné.

### 6.1.4 *Kontrolní otázky pro kapitolu 6.1*

1. znamená nesplnění Cauchyovy podmínky neřešitelnost popisu nelineárního systému?
2. v čem spočívá nebezpečí „dvojitá chyba“?

3. čím je často způsobena neřešitelnost modelu?
4. jak budou ovlivněny simulační podmínky v případě simulace neřešitelného popisu?

Správné odpovědi jsou uvedeny v dodatku A.

## 6.2 Simulace nelineárních systémů v prostředí Matlab Simulink

### 6.2.1 *Motivace*

Bude doplněno v budoucí verzi

### 6.2.2 Odstranění algebraické smyčky

Bude doplněno v budoucí verzi

### 6.2.3 Realizace nelineárních bloků

Bude doplněno v budoucí verzi

### 6.2.4 *Shrnutí kapitoly 6.2*

Bude doplněno v budoucí verzi

### 6.2.5 *Kontrolní otázky pro kapitolu 6.2*

1. Bude doplněno v budoucí verzi
- 2.
- 3.
- 4.

Správné odpovědi jsou uvedeny v dodatku A.

## 7 Identifikace řízených objektů

### 7.1 *Motivace*

Pokud chceme navrhnout kvalitní řídicí algoritmus a vhodně zvolit jeho parametry, je třeba znát vlastnosti řízeného objektu. Úloha zjištění struktury a parametrů systému se nazývá identifikace. Důležitým pravidlem během identifikace je snaha neodhadovat to, co již známe. Je tedy použit veškerou apriorní informaci o vlastnostech systémů. Z tohoto pohledu můžeme identifikované systémy rozdělit do třech skupin:

- „*bílá skříňka*“ („*white-box*“) – model systému je zcela znám, jeho strukturu a parametry dokážeme určit na základě matematicko-fyzikální analýzy objektu.

- „šedá skříňka“ („*gray-box*“) – máme pouze částečnou apriorní znalost chování systému. Strukturu lze určit fyzikálním modelováním na základě fyzikálních znalostí o systému. Parametry modelu jsou neznámé a je nutné je vhodnou metodou identifikovat.
- „černá skříňka“ („*black-box*“) – v tomto případě nemáme žádné informace o vnitřní struktuře systému. Během identifikace musíme zvolit vhodnou strukturu modelu a vypočítat jeho parametry.

V případě lineárních systémů existuje obecně použitelný model ve tvaru operátorového přenosu a proto jsme schopni obvykle poměrně snadno provést identifikaci systému typu „*black-box*“. Na druhou stranu volba struktury modelu pro identifikaci nelineárních systémů bývá natolik komplikovaná, že ji musíme většinou odvodit na základě fyzikálních vlastností systému a provést jen výpočet parametrů modelu – jedná se tedy o identifikaci systému s charakteristikou „*gray-box*“.

Identifikační metody lze rozdělit podle přístupu k výpočtu parametrů na dvě základní skupiny:

- *deterministické* – založeny na deterministických modelech systémů, parametry se hledají na základě minimalizace odchylky mezi měřenými a simulovanými daty
- *stochastické* – vycházejí ze stochastických modelů, parametry modelu jsou vypočteny na základě vyhodnocení transformace statistických vlastností signálu po průchodu identifikovaným systémem.

V dalším výkladu se zaměříme na základní možnosti deterministické identifikace modelů lineárních a nelineárních systémů.

## 7.2 Metoda nejmenších čtverců

Jednou z nejběžněji používaných metod identifikace dynamických systémů je tak zvaná *metoda nejmenší čtverců*. Její použití je vhodné pouze pro lineární systémy, případně pro systémy, které je možné dobře linearizovat v okolí pracovního bodu.

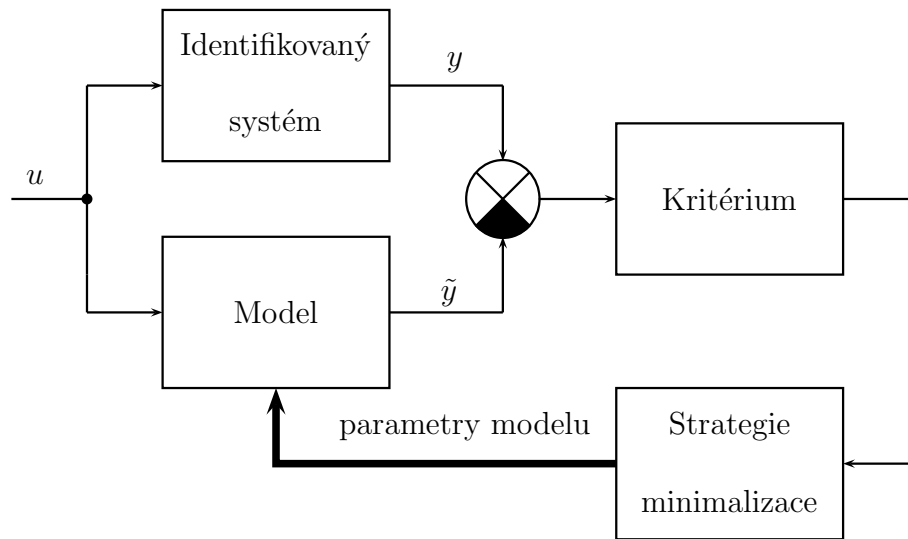
Pro vysvětlení metody budeme nejdříve uvažovat lineární statický systém

$$y_i = \varphi_i^T \boldsymbol{\theta} \quad (7.1)$$

kde  $\varphi_i$  je vektor vstupních proměnných a  $\boldsymbol{\theta}$  je vektor parametrů. Výstup  $y_i$  je tedy tvořen lineární kombinací vstupních hodnot  $\varphi_i$ . Pokud chceme popsat závislost mezi více výstupními hodnotami  $y_i$  a příslušnými vstupními vektory  $\varphi_i$ , lze celý systém zapsat ve tvaru

$$\mathbf{y} = \Phi \boldsymbol{\theta} \quad (7.2)$$

kde  $\mathbf{y} = [y_N, y_{N-1}, \dots, y_1]^T$  a  $\Phi = [\varphi_N, \varphi_{N-1}, \dots, \varphi_1]^T$ . Je zřejmé, že parametry systému budou jednoznačně určeny jenom tehdy, když délka vektoru  $\mathbf{y}$  a tím i počet řádků matice  $\Phi$  bude roven počtu parametrů ve vektoru  $\boldsymbol{\theta}$ . Parametry systému pak dokážeme určit



Obrázek 7.1: Princip identifikace parametrů systému

řešením soustavy lineárních rovnic (7.2). Pokud máme k dispozici více dat, dostáváme přeuredenou soustavu lineárních rovnic, která obecně nemusí mít žádné řešení.

Při identifikaci parametrů použijeme tedy jiný postup, než přímé řešení soustavy rovnic (7.2). Budeme předpokládat, že máme k dispozici model systému

$$\tilde{\mathbf{y}} = \Phi \tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (7.3)$$

kde  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  je odhad parametrů systému. Pokud porovnáme skutečnou hodnotu výstupu systému  $\mathbf{y}$  s odhadem vypočteným modelem  $\tilde{\mathbf{y}}$ , dostaneme chybu odhadu

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y} = \mathbf{y} - \Phi \boldsymbol{\theta} = \Phi(\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \quad (7.4)$$

Čím bude odchylka  $\boldsymbol{\varepsilon}$  „menší“, tím budou parametry modelu  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  blíže skutečným hodnotám  $\boldsymbol{\theta}$ . Musíme však ještě zvolit vhodné kritérium, kterým budeme hodnotit „velikost“ odchylky  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Běžně používaným kritériem je součet kvadrátů odchylek

$$V(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (7.5)$$

podle kterého rovněž metoda nese název. Pokusíme se provést minimalizaci zvoleného kritéria. Kritérium můžeme upravit do tvaru

$$\begin{aligned} V(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\mathbf{y} - \Phi \tilde{\boldsymbol{\theta}}]^T [\mathbf{y} - \Phi \tilde{\boldsymbol{\theta}}] = \frac{1}{2} [\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Phi^T \Phi \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Phi^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \Phi \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{y}^T \mathbf{y}] = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} [\tilde{\boldsymbol{\theta}} - (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y}]^T (\Phi^T \Phi) [\tilde{\boldsymbol{\theta}} - (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y}]}_{\text{pozitivně semidefinitní forma při minimalizaci bude nulová}} + \underbrace{\frac{1}{2} [\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y}]}_{\text{neobsahuje } \tilde{\boldsymbol{\theta}} \text{ není co minimalizovat}} \end{aligned} \quad (7.6)$$

pozitivně semidefinitní forma  
při minimalizaci bude nulová

neobsahuje  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$   
není co minimalizovat

Minimalizace kritéria je tedy dosaženo pro

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} - (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (7.7)$$

čímž dostáváme odhad parametrů

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y} \quad (7.8)$$

Nyní se pokusíme získaný výsledek přenést do oblasti lineárních dynamických systémů. Předpokládejme, že systém s jedním vstupem a jedním výstupem je popsán operátorovým přenosem

$$F(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (7.9)$$

Výstup systému v  $k$ -tém kroku je pak dán vztahem

$$y(k) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_n u(k-n) - a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_n y(k-n) \quad (7.10)$$

Platí tedy

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\theta} \quad (7.11)$$

kde  $\mathbf{y} = [y(k), y(k-1), \dots, y(k-N+1)]^T$ ,

$\boldsymbol{\theta} = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n]^T$  a

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} -y(k-1) & -y(k-2) & \dots & -y(k-n) & u(k-1) & u(k-2) & \dots & u(k-n) \\ -y(k-2) & -y(k-3) & \dots & -y(k-n-1) & u(k-2) & u(k-3) & \dots & u(k-n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y(k-N) & -y(k-N-1) & \dots & -y(k-n-N+1) & u(k-N) & u(k-N-1) & \dots & u(k-n-N+1) \end{bmatrix}$$

Matice  $\boldsymbol{\Phi}$  má  $N$  řádků a  $2n$  sloupců, kde  $N$  je počet zpracovávaných vzorků a  $n$  je řád systému. Vektor  $\boldsymbol{\theta}$  obsahuje celkem  $2n$  parametrů a proto, jak již bylo řečeno dříve, musí mít matice  $\boldsymbol{\Phi}$  alespoň  $N \geq 2n$  řádků, tak aby bylo možné jednoznačně vypočítat parametry systému. Z toho rovněž vyplývá, že musíme mít k dispozici alespoň  $2n$  měření vstupu a výstupu systému. Vzhledem k tomu, že rovnice (7.11) je shodná s rovnicí (7.2), řešíme vlastně stejnou úlohu, jako v případě statického systému. Pokud sestavíme obsah matic tak, jak je uvedeno v (7.11), můžeme odhad parametrů systému vypočítat pomocí vztahu (7.8).

Na základě vztahu (7.8) tedy dokážeme vypočítat odhad parametrů během jednoho výpočetního kroku (samozřejmě za předpokladu, že máme matice naplněné potřebnými údaji). Z tohoto důvodu bývá uvedený postup nazýván *jednorázová metoda nejmenších čtverců*. I když vztah pro výpočet parametrů je formálně velmi jednoduchý, praktické použití této metody je často problematické. Je třeba si uvědomit, že počet řádků matice  $\boldsymbol{\Phi}$  odpovídá počtu zpracovávaných vzorků a při výpočtu (7.8) jsme pak často nuceni vypočítat inverzi matice velkého rozměru. Další problém spočívá ve skutečnosti, že při příchodu dalšího vzorku vstupu a výstupu nejsme schopni využít výsledku předchozího kroku a je třeba provést výpočet znovu.

Je zřejmé, že by bylo velmi zajímavé najít algoritmus, který by dokázal v každém výpočetním kroku využít odhadu parametrů vypočtených dříve, přičemž nově příchozí hodnoty vstupu a výstupu umožní zpřesnění odhadu.

Pokud uvažujeme matice ve tvaru  $\mathbf{y} = [y_N, y_{N-1}, \dots, y_1]^T$  a  $\Phi = [\varphi_N, \varphi_{N-1}, \dots, \varphi_1]^T$ , lze vztah (7.8) zapsat ve tvaru

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_N = \left[ \sum_{i=1}^N \varphi_i \varphi_i^T \right]^{-1} \left[ \sum_{i=1}^N \varphi_i y_i \right] \quad (7.12)$$

Označme

$$\mathbf{P}_N = \left[ \sum_{i=1}^N \varphi_i \varphi_i^T \right]^{-1} \quad (7.13)$$

kde  $N$  je počet zpracovaných vzorků. Lehce si všimneme, že matici  $\mathbf{P}$  můžeme počítat rekurentním vztahem

$$\mathbf{P}_N^{-1} = \mathbf{P}_{N-1}^{-1} + \varphi_N \varphi_N^T \quad (7.14)$$

Rovněž lze snadno ukázat, že platí

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_N &= \mathbf{P}_N \left[ \sum_{i=1}^{N-1} \varphi_i y_i + \varphi_N y_N \right] = \mathbf{P}_N \left[ \mathbf{P}_{N-1}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N-1} + \varphi_N y_N \right] = \\ &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N-1} + \mathbf{P}_N \varphi_N \left[ y_N - \varphi_N^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N-1} \right] \end{aligned} \quad (7.15)$$

Celý výpočet odhadu, pak shrneme do následujících vztahů

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_N &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N-1} + \mathbf{K}_N \varepsilon_N \\ \mathbf{K}_N &= \mathbf{P}_N \varphi_N \\ \varepsilon_N &= y_N - \varphi_N^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N-1} \\ \mathbf{P}_N^{-1} &= \mathbf{P}_{N-1}^{-1} + \varphi_N \varphi_N^T \end{aligned} \quad (7.16)$$

Všimněme si, že na rozdíl od jednorázové metody nyní pracujeme s maticemi podstatně menších rozměrů (Matice  $\mathbf{P}$  má rozměr  $2n \times 2n$ , kde  $n$  je řád systému). Výpočet odhadu parametrů v  $N$ -tém kroku vychází z odhadu parametrů v kroku  $N-1$ , přičemž je upřesněn pomocí nově příchozích hodnot. Jedná se o rekurzivní výpočet a proto se tato metoda běžně označuje jako *rekurzivní* nebo také *průběžná metoda nejmenších čtverců*. Inverze matice, je výpočetně náročná operace. V našem případě můžeme použít lema o inverzi matice (C.8) a tomuto výpočtu se vyhnout. Po úpravě rovnic (7.16) dostaneme

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_N &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_{N-1} + \mathbf{K}_N \varepsilon_N \\ \mathbf{K}_N &= \mathbf{P}_N \varphi_N \\ \varepsilon_N &= y_N - \varphi_N^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{N-1} \\ \mathbf{P}_N &= \mathbf{P}_{N-1} - \mathbf{P}_{N-1} \varphi_N \varphi_N^T \mathbf{P}_{N-1} / [1 + \varphi_N^T \mathbf{P}_{N-1} \varphi_N] \end{aligned} \quad (7.17)$$

Rovnice stále obsahují dělení, nicméně tentokrát se již nejedná o inverzi matice, protože výsledkem maticového výrazu ve jmenovateli je skalární číslo. Lze ukázat, že z důvodu dobré konvergence řešení je vhodné volit počáteční hodnotu matice  $\mathbf{P}_0$  jako diagonální



s velkými hodnotami na diagonále. Při zahájení výpočtu si musíme rovněž uvědomit, že první použitelný odhad parametrů dostaneme až po provedení tolika kroků, kolik parametrů identifikujeme. Pro přenos  $n$ -tého řádu tedy dostaneme použitelný odhad až po  $2n$  krocích.

Výsledek průběžné metody nejmenších čtverců v  $N$ -tém kroku odpovídá jednorázové metodě počítané z  $N$  měření. Pokud je  $N$  značně velké, bude metoda pomalu reagovat na případné změny parametrů identifikované soustavy. Je to způsobeno tím, že všechny zpracovávané vzorky jsou uvažovány se stejnou vahou a tedy nově příchozí hodnoty mají relativně malou váhu vzhledem k rozsáhlému souboru předchozích dat. Při praktickém použití se tento problém řeší použitím tak zvaného *exponenciálního zapomínání*. Místo kritéria (7.5), které uvažuje všechny vzorky se stejnou vahou, použijeme kritérium

$$V(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^N \lambda^{i-1} \varepsilon_i^2 \quad (7.18)$$

kde  $\lambda$  je koeficient zapomínání, který volíme  $\lambda < 1$  (obvykle přibližně 0,95). Vidíme, že váha odchylek, s jakou jsou zahrnuty v kritériu, v tomto případě s rostoucím „stářím“ exponenciálně klesá. Při použití tohoto kritéria je pak možné odvodit vztahy pro výpočet odhadu parametrů ve tvaru

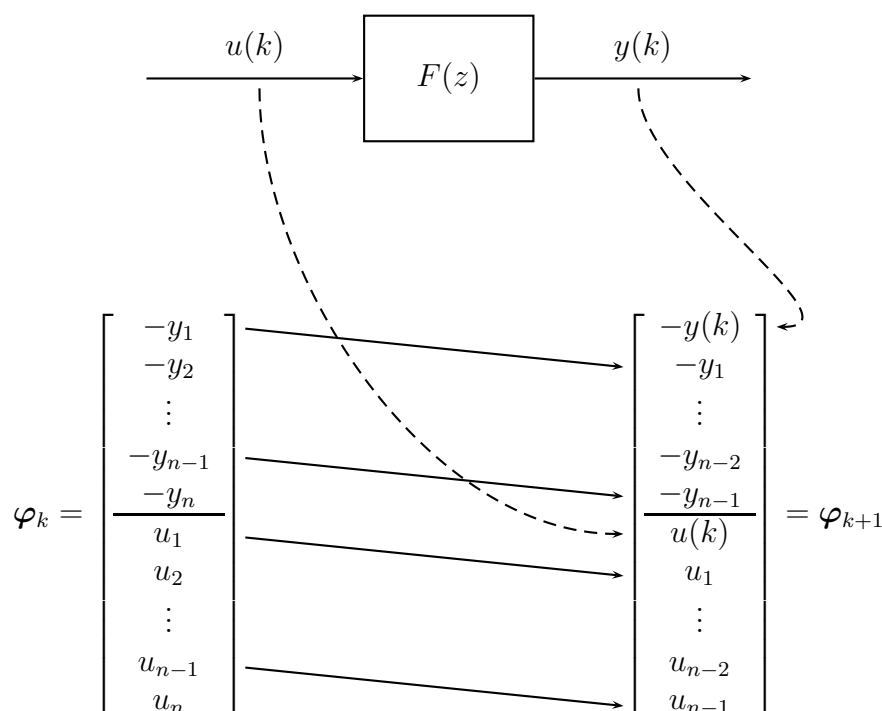
$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_N &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_{N-1} + \mathbf{K}_N \varepsilon_N \\ \mathbf{K}_N &= \mathbf{P}_N \boldsymbol{\varphi}_N \\ \varepsilon_N &= y_N - \boldsymbol{\varphi}_N^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{N-1} \\ \mathbf{P}_N &= (\mathbf{P}_{N-1} - \mathbf{P}_{N-1} \boldsymbol{\varphi}_N \boldsymbol{\varphi}_N^T \mathbf{P}_{N-1} / [\lambda + \boldsymbol{\varphi}_N^T \mathbf{P}_{N-1} \boldsymbol{\varphi}_N]) / \lambda \end{aligned} \quad (7.19)$$

Způsob plnění dat do vektoru  $\boldsymbol{\varphi}$  je znázorněn na obr. 7.2. V každém kroku provedeme posun starých dat ve vektoru, přičemž na uvolněné pozice zapíšeme aktuální hodnotu vstupu a záporně vzatou hodnotu výstupu. Během identifikace systému je nutné zajistit, aby vstup systému byl dostatečně „bohatý“ na změny. V opačném případě řešíme špatně podmíněnou úlohu (matice  $\Phi$  se blíží singulární matici). Metoda nejmenších čtverců rovněž může selhat, pokud provádíme identifikaci systému řízeného ve zpětnovazebním regulačním obvodu, nebo když na výstupu soustavy působí poruchový signál. V literatuře [9, 11] lze nalézt modifikace uvedené metody, které umožňují potlačení zmíněných problémů.

### 7.3 Identifikace nelineárních systémů

Identifikace parametrů nelineárních systémů představuje mnohem složitější problém než identifikace lineárních systémů. Vzhledem k tomu, že nelineární systémy není možné obecně popsat relativně jednoduchou strukturou, jakou je např. operátorový přenos, je identifikace nelineárního „black-box“ modelu velmi komplikovaná. Zaměříme se tedy pouze na identifikaci takových systémů, kde je struktura modelu známá („gray-box“ model). Model nelineárního dynamického systému můžeme obecně uvažovat ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, \boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \quad (7.20)$$



**Obrázek 7.2:** Příprava dat pro rekurzivní metodu nejmenších čtverců

kde  $\boldsymbol{\theta}$  je vektor parametrů systému, případně ve tvaru s diskretním časem

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}_d(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k, \boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{g}_d(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k, \boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \quad (7.21)$$

Předpokládejme, že máme k dispozici množinu hodnot výstupu systému  $\{\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(N)\}$ . Pokud známe strukturu modelu, můžeme simulací určit množinu hodnot jeho výstupu  $\{\tilde{\mathbf{y}}(1, \boldsymbol{\theta}), \tilde{\mathbf{y}}(2, \boldsymbol{\theta}), \dots, \tilde{\mathbf{y}}(N, \boldsymbol{\theta})\}$  odpovídající vektoru parametrů  $\boldsymbol{\theta}$  a působení stejného vstupního signálu jako v případě identifikovaného systému.

Je zřejmé, že budeme hledat takový vektor parametrů  $\boldsymbol{\theta}$ , kdy data získaná z modelu budou odpovídat datům měřeným na reálném objektu. Jako kritérium shody můžeme zvolit kvadratickou formu

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^N (y(k) - \tilde{y}(k, \boldsymbol{\theta}))^T \mathbf{W}_k (y(k) - \tilde{y}(k, \boldsymbol{\theta})) \quad (7.22)$$

kde  $\mathbf{W}_k$  je pozitivně definitní matice, která může určovat váhu jednotlivých dat. Úloha identifikace parametrů pak přechází obdobně jako u metody nejmenších čtverců na problém hledání parametrů modelu minimalizujících hodnotu kritéria

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}) \quad (7.23)$$

Minimalizaci kritéria nelze v tomto případě vypočítat obvykle analyticky, jak to bylo provedeno v případě lineárního systému. Pro nalezení minima kritéria musíme použít

vhodnou numerickou metodu. Metod pro hledání minima funkce existuje celá řada, z nichž mezi často používané patří např. Gauss–Newtonova metoda, Levenberger–Marquardtova metoda nelineárních nejmenších čtverců [10] a různé další gradientní metody. Z hlediska použití jsou velmi zajímavé rovněž tak zvané metody přímého hledání minima z nichž se blíže seznámíme s metodou *Nelder–Mead* [12, 10].

Metoda *Nelder–Mead* pro hledání minima funkce  $f(\mathbf{x})$  je založena na geometrických úpravách simplexu v prostoru parametrů funkce. Pod pojmem simplex v  $n$ -rozměrném prostoru rozumíme útvar složený z  $n + 1$  vrcholů, jejich spojnic (hran) a oblastí vymezených těmito spojnicemi (ploch). V jednorozměrném prostoru má simplex podobu úsečky, v dvojrozměrném trojúhelníku, v trojrozměrném čtyřlístěnu. Geometrická představa ve vícerozměrném prostoru je pak poněkud obtížnější.

Před započítím iteračního výpočtu musíme vytvořit počáteční simplex. Za tímto účelem musíme zvolit počáteční odhad parametrů – tento počáteční odhad představuje jeden z vrcholů simplexu. Zbývajících  $n$  vrcholů lze zvolit v podstatě libovolně, obvykle se volí tak, že provedeme posunutí prvního vrcholu ve směru jednotlivých os souřadnicového systému. Během iterací pak provádíme úpravy simplexu – reflexe, expanze, kontrakce, smrštění. Každá z operací je ovlivněna jedním z parametrů metody  $\rho, \chi, \gamma, \sigma$ . Parametry musí splňovat podmínky  $\rho > 0, \chi > 1, 0 < \gamma < 1, 0 < \sigma < 1$ . Standardní nastavení, které je v podstatě univerzální, je

$$\begin{aligned}\rho &= 1 \\ \chi &= 2 \\ \gamma &= \frac{1}{2} \\ \sigma &= \frac{1}{2}\end{aligned}\tag{7.24}$$

V každém iteračním kroku řídíme následujícím algoritmem:

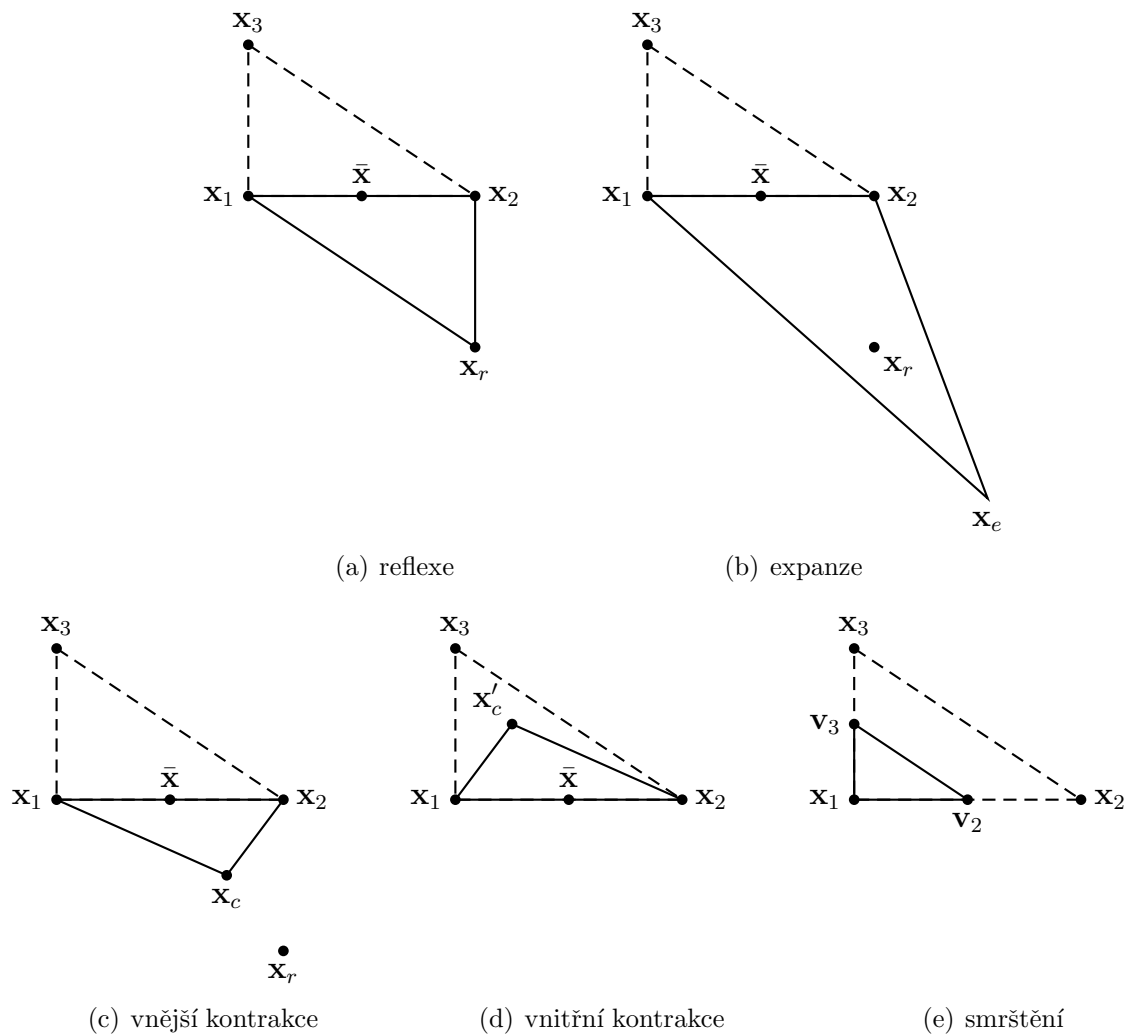
1. **Seřazení** – označíme vrcholy simplexu  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n+1}$  tak, že platí  $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_{n+1}$ , kde  $f_i = f(\mathbf{x}_i)$ .  $\mathbf{x}_1$  tedy odpovídá z hlediska minimalizace funkce  $f$  „nejlepšímu“ a  $\mathbf{x}_{n+1}$  „nejhoršímu“ bodu.
2. **Reflexe** – zrcadlový obraz  $\mathbf{x}_r$  vypočteme pomocí

$$\mathbf{x}_r = \bar{\mathbf{x}} + \rho(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{n+1})\tag{7.25}$$

kde  $\bar{\mathbf{x}}$  je těžiště  $n$  nejlepších vrcholů

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i\tag{7.26}$$

Zjistíme hodnotu  $f_r = f(\mathbf{x}_r)$ . Pokud platí  $f_1 \leq f_r < f_n$ , nahradíme vrchol  $\mathbf{x}_{n+1}$  vrcholem  $\mathbf{x}_r$  a iteraci ukončíme. V opačném případě pokračujeme krokem 3.



Obrázek 7.3: Úpravy simplexu při minimalizaci funkce metodou Nelder–Mead

3. **Expanze** – pokud platí  $f_r < f_1$  vypočteme bod  $x_e$  podle vztahu

$$x_e = \bar{x} + \chi(x_r - \bar{x}) \quad (7.27)$$

a vyhodnotíme  $f_e = f(x_e)$ . Jestliže není podmínka  $f_r < f_1$  splněna, pokračujeme krokem 4. Pokud  $f_e < f_r$ , nahradíme vrchol  $x_{n+1}$  vrcholem  $x_e$  a iteraci ukončíme. Pokud  $f_e \geq f_r$ , nahradíme vrchol  $x_{n+1}$  vrcholem  $x_r$  a iteraci ukončíme.

4. **Kontrakce** – pokud platí  $f_r \geq f_n$  provedeme kontrakci mezi  $\bar{x}$  a lepším z bodů  $x_{n+1}$  a  $x_r$ . V opačném případě pokračujeme krokem 5.

a) **Vnější** – jestliže platí  $f_n \leq f_r < f_{n+1}$ , vypočteme

$$x_c = \bar{x} + \gamma(x_r - \bar{x}) \quad (7.28)$$

a hodnotu  $f_c = f(x_c)$ . Pokud  $f_c \leq f_r$ , nahradíme vrchol  $x_{n+1}$  vrcholem  $x_c$  a ukončíme iteraci. V opačném případě pokračujeme krokem 5.

b) **Vnitřní** – pokud platí  $f_r \geq f_{n+1}$ , vypočteme

$$\mathbf{x}'_c = \bar{\mathbf{x}} - \gamma(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{n+1}) \quad (7.29)$$

a hodnotu  $f'_c = f(\mathbf{x}'_c)$ . Pokud  $f'_c < f_{n+1}$ , nahradíme vrchol  $\mathbf{x}_{n+1}$  vrcholem  $\mathbf{x}'_c$  a ukončíme iteraci. V opačném případě pokračujeme krokem 5.

5. **Smrštění** – definujeme  $n$  nových vrcholů

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_1 + \sigma(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1) \quad i = 2, 3, \dots, n+1 \quad (7.30)$$

a sestavíme nový simplex s vrcholy  $x_1, v_2, v_3, \dots, v_{n+1}$ .

Na obr. 7.3 můžeme vidět grafickou podobu jednotlivých změn simplexu pro úlohu v dvojrozměrném prostoru (systém má dva parametry), přičemž podoba výchozího simplexu je vykreslena čárkovaně. Iterace opakujeme, dokud není dosaženo ukončovacích podmínek. Ukončení výpočtu obvykle provedeme, jakmile klesne velikost simplexu pod zvolenou velikost. Podmínku ukončení iterací pak můžeme formulovat jako

$$\max_{2 \leq i \leq n+1} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1\| \leq \epsilon \max(1; \|\mathbf{x}_1\|) \quad (7.31)$$

kde  $\epsilon$  je zvolená tolerance. Stejně jako u ostatních numerických metod pro hledání minima funkce i metoda Nelder–Mead nezajišťuje nalezení globálního minima. Z tohoto důvodu je velmi důležité zvolit počáteční odhad parametrů v blízkosti skutečného minima kritéria.

Metoda Nelder–Mead je dostupná v prostředí systému Matlab jako funkce *fminsearch*. Její volání v základní podobě je

```
x = fminsearch(@myfun, x0, options, data)
```

Funkce vrací vektor hodnot proměnných  $x$ , pro které dochází k minimalizaci funkce. V základním tvaru má funkce dva parametry. První představuje funkci, která má být minimalizovaná a představuje M-file s definicí funkce

```
function f = myfun(x,data)
f = ...           % Výpočet hodnoty funkce v bodě x
```

Vektor  $x0$  obsahuje počáteční odhad polohy minima, od kterého je zahájen iterační výpočet. Dále je možné volání rozšířit o nepovinné parametry. Struktura *options* slouží k ovlivnění vlastností výpočtu. Její sestavení je provedeno voláním funkce

```
options = optimset('param1',value1,'param2',value2,...)
```

kde řetězec *param* označuje jméno parametru a *value* jeho hodnotu. Možné typy zadaných parametrů jsou:

- *DisplayLevel* – úroveň hlášení během výpočtu: 'off' – žádná hlášení; 'iter' – hlášení během každé iterace; 'final' – zobrazení jen konečného výsledku; 'notify' (standardní hodnota) – zobrazení hlášení jen pokud výpočet nekonverguje.
- *FunValCheck* – zjišťuje, zda jsou hodnoty vrácené minimalizovanou funkcí platné: 'on' – vypíše hlášení, pokud hodnota vrácená minimalizovanou funkcí je komplexní číslo, Inf nebo NaN; 'off' (standardní hodnota) – nezobrazuje varování.
- *MaxFunEvals* – maximální počet vyhodnocení minimalizované funkce.
- *MaxIter* – maximální počet iterací.
- *OutputFcn* – uživatelská funkce, která bude vyvolána během každé iterace. Umožňuje např. průběžné vypisování mezivýsledků minimalizace.
- *TolFun* – tolerance funkční hodnoty. Pokud je změna funkční hodnoty minimalizované funkce mezi dvěma iteracemi menší než zvolená hodnota, dojde k ukončení výpočtu.
- *TolX* – tolerance proměnných  $x$ . Pokud dojde mezi dvěma iteracemi k menší změně proměnných  $x$  než zvolená hodnota, je výpočet ukončen.

Poslední uvedený nepovinný parametr *data* je předán minimalizované funkci, jak je zobrazeno u volání funkce *myfun*, čímž je umožněno zpracování dalších dat mimo proměnné použité k minimalizaci funkce.

Další detaily použití funkce *fminsearch* lze nalézt v dokumentaci a nápovědě systému Matlab.

V případě použití funkce *fminsearch* v úloze identifikace dynamického systému, musíme vytvořit funkci *myfun* tak, aby vracela hodnotu kritéria pro parametry modelu dané vektorem  $x$ , což si ukážeme na příkladě.

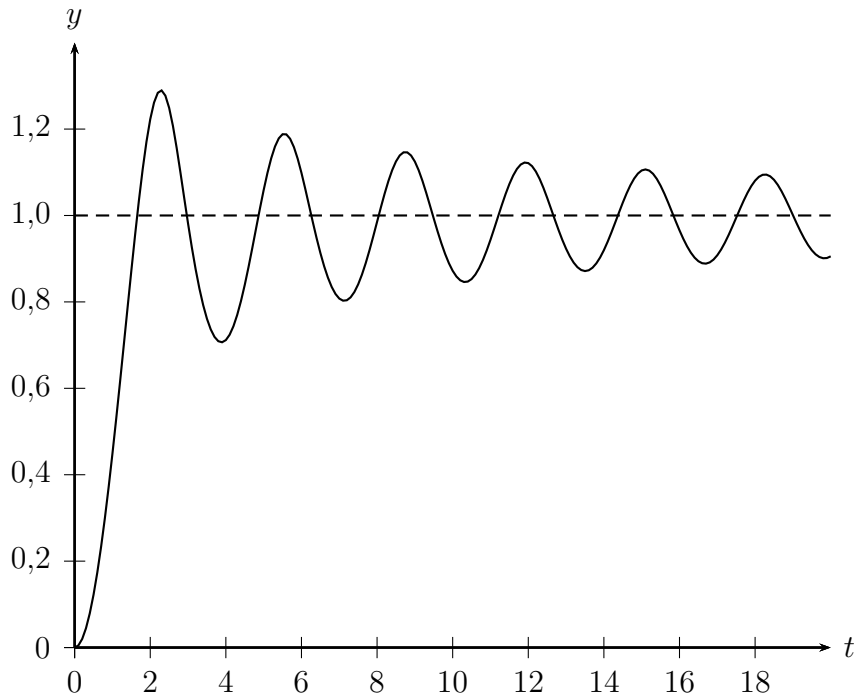
**Příklad 7.1** Předpokládejme, že reálný fyzikální systém je popsán stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1|x_1|^3 - x_2\sqrt{|x_2|^3} + u \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{7.32}$$

kde na vstup  $u$  přivedeme v čase  $t = 0$ s jednotkový skok, což odpovídá modelu na obr. 7.5.

Systém budeme dále považovat za „gray-box“, což znamená, že máme k dispozici měření jeho vstupu a výstupu obr. 7.4, známe rovněž jeho vnitřní strukturu, nicméně jeho parametry jsou neznámé a chceme je identifikovat. Jeho popis má pak tvar

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1|x_1|^{a_1} - x_2|x_2|^{a_2} + u \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{7.33}$$

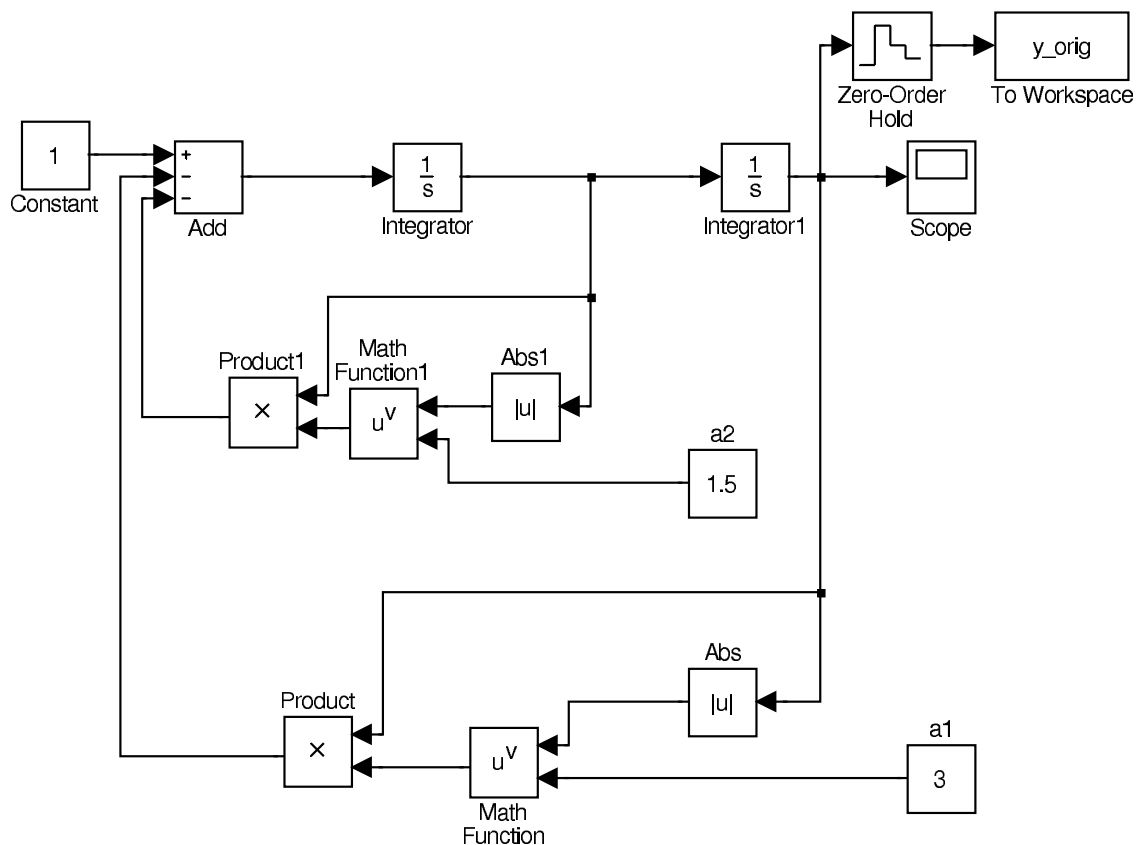


**Obrázek 7.4:** Výstup systému z příkladu 7.1

kde  $a_1, a_2$  jsou neznámé parametry. Za tímto účelem připravíme simulační schéma obr. 7.6, které strukturou odpovídá identifikovanému systému obr. 7.5, avšak obsahuje neznámé parametry.

Dále musíme zvolit kritérium shody mezi výstupem systému a modelem. Toto kritérium můžeme v našem případě zvolit jako sumu kvadrátů odchylek. Hodnotu kritéria budeme počítat funkcí `fkrit`, jejíž obsah je uveden níže.

```
function f=fkrit(a,y_orig) %a=[a1 a2]...parametry modelu,
                        %y_orig...výstup identifikovaného systému
load_system('model');
set_param('model/a1','Value',mat2str(a(1))); %nastavení parametrů modelu
set_param('model/a2','Value',mat2str(a(2)));
try
    sim('model'); %spuštění simulace modelu model.mdl,
                %výstup systému je uložen v proměnné y
    f=(y-y_orig)'*(y-y_orig); %suma kvadrátů odchylek
                                %mezi výstupem systému y_orig a modelem y
catch
    f=10000; %hodnota kritéria, pokud dojde k chybě simulace
            %- nastává při vyhodnocení neurčitého výrazu 0^0
end;
```



Obrázek 7.5: Model systému z příkladu 7.1 v prostředí Matlab-Simulink – *origsys.mdl*

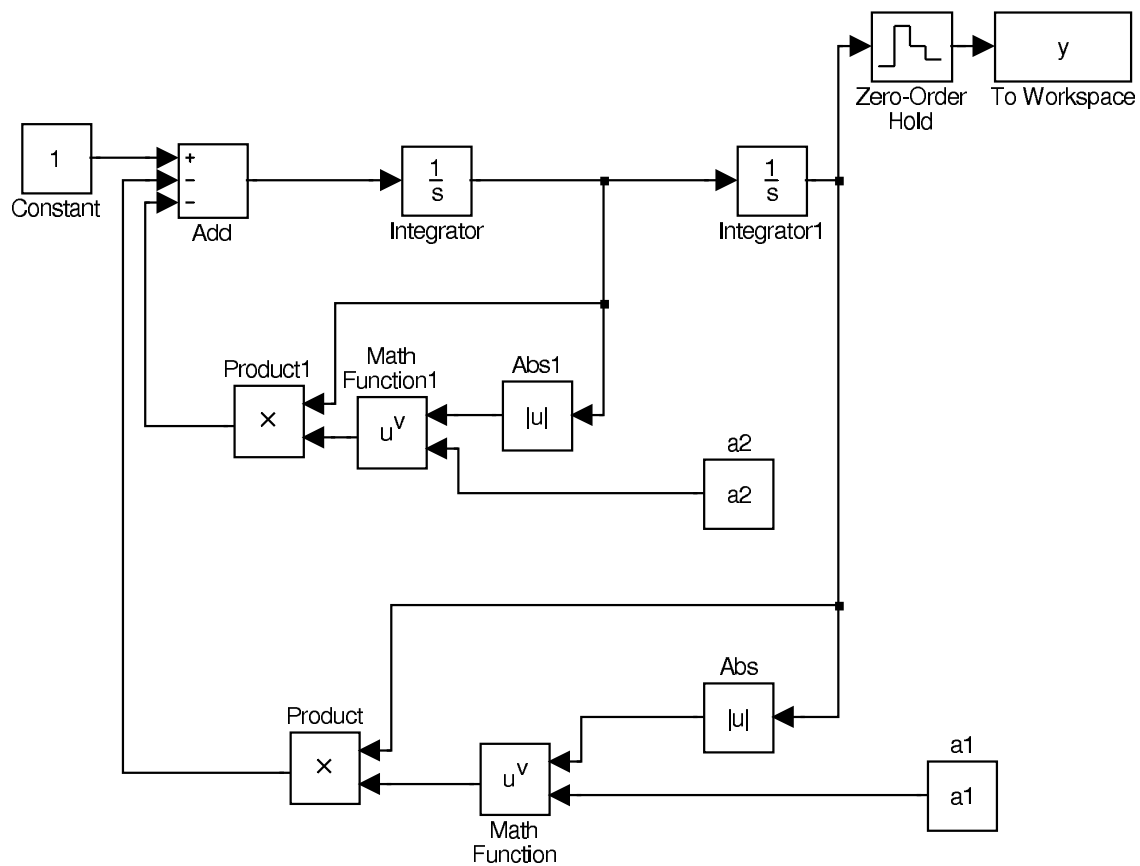
Nyní nám již zbývá provést minimalizaci kritéria. K tomu použijeme funkci `fminsearch`, jak je ukázáno dále

```
sim('origsys'); %výpočet výstupu identifikovaného systému do proměnné y
a0=[1 1]; %počáteční odhad parametrů a1=1, a2=1
%provedení minimalizace funkce fkrit
fminsearch(@fkrit,a0,optimset('Display','iter','MaxFunEvals',100000,
    'MaxIter',100000,'TolFun',1e-4,'TolX',1e-4),y_orig)
```

Po spuštění výpočtu dostaneme

Iteration	Func-count	min f(x)	Procedure
0	1	4.95392	
1	3	4.82562	initial simplex
2	5	4.5494	expand
3	7	4.1524	expand
4	9	3.51067	expand
5	11	2.66777	expand





**Obrázek 7.6:** „Gray-box“ model systému z příkladu 7.1 v prostředí Matlab-Simulink – *model.mdl*

6	13	2.45097	reflect
7	15	2.45097	contract inside
8	17	2.30605	reflect
9	19	2.30605	contract inside
10	20	2.30605	reflect
11	22	2.30605	contract inside
12	24	2.30392	reflect
13	26	2.1766	expand
14	28	2.1132	expand
15	30	1.77689	expand
16	32	1.51	expand
17	34	0.645111	expand
18	36	0.442696	expand
19	37	0.442696	reflect
20	39	0.287909	contract inside
21	41	0.287909	contract inside

22	43	0.0652901	expand
23	45	0.0652901	contract inside
24	47	0.037702	reflect
25	49	0.034588	reflect
26	51	0.00745213	reflect
27	53	0.00387292	contract inside
28	55	0.00387292	contract inside
29	57	0.000951637	contract inside
30	59	0.000517011	contract inside
31	61	0.000517011	contract inside
32	63	0.000108506	contract inside
33	65	6.932e-005	contract inside
34	67	6.932e-005	contract inside
35	69	8.40888e-006	contract inside
36	71	8.40888e-006	contract inside
37	73	8.40888e-006	contract inside
38	75	2.05396e-006	contract inside
39	77	1.58942e-006	contract inside
40	79	8.89055e-007	contract inside
41	81	3.60643e-007	contract inside
42	83	2.66278e-007	contract inside
43	85	5.98496e-008	contract inside
44	87	5.98496e-008	contract inside
45	89	5.0802e-008	contract outside

Optimization terminated:

the current x satisfies the termination criteria using OPTIONS.TolX of 1.000000e-003 and F(X) satisfies the convergence criteria using OPTIONS.TolFun of 1.000000e-003

ans =

3.0002    1.5001

*Hodnota identifikovaných parametrů je tedy  $a_1 = 3,0002$  a  $a_2 = 1,5001$ , přičemž tento výsledek se velmi dobře shoduje se skutečnými parametry systému. Během výpočtu proběhlo celkem 89 vyhodnocení kritéria. Konečná hodnota kritéria (suma kvadrátů odchylek výstupu modelu a identifikovaného systému) je  $5,0802 \cdot 10^{-8}$ . Vzhledem k tomu, že hodnota kritéria je velmi malá, lze předpokládat, že se nám podařilo najít řešení v těsné blízkosti globálního minima a výpočet tedy byl úspěšný.*

Je zřejmé, že nastíněný způsob identifikaci parametrů nelineárního systému je blízká spíše jednorázové metodě nejmenších čtverců. Při praktickém použití musíme dobře volit

počáteční odhad parametrů, který může mít značný vliv na konvergenci metody. Praktické použití minimalizačního algoritmu Nelder–Mead ukazuje, že jsme často schopni identifikovat parametry složitých nelineárních systémů, které mohou obsahovat i nespojitě nelineární charakteristiky (např. reléová charakteristika). Obecně však nelze nalezení minima garantovat.

## 7.4 *Shrnutí kapitoly 7*

Kvalitní identifikace modelu řízeného systému je jednou z podmínek úspěšného návrhu řízení. Seznámili jsme se se základními možnostmi deterministických metod identifikace parametrů lineárních a nelineárních dynamických systémů. Uvedené algoritmy lze prakticky použít spíše v jednoduchých aplikacích. V řadě případů je třeba řešit úlohu identifikace parametrů systému řízeného v uzavřené regulační smyčce, případně eliminovat vliv poruchových signálů, nebo odhadovat dopravní zpoždění. Algoritmy pro takové úlohy lze najít v literatuře [11, 9] a budou diskutovány v rámci předmětu magisterského studia Modelování a identifikace.

## 7.5 *Kontrolní otázky pro kapitolu 7*

1. Jaký je zásadní rozdíl mezi identifikací „gray–box“ a „black–box“ systému?
2. Co vyjadřuje koeficient zapomínání u průběžné metody nejmenších čtverců?
3. Lze použít minimalizační metodu Nelder–Mead pro identifikaci lineárních systémů?
4. Je při použití metody Nelder–Mead nutné znát přesně hodnotu kritériální funkce pro dané parametry modelu?

Správné odpovědi jsou uvedeny v dodatku A.

## 8 *Závěr*

Studium nelineárních systémů představuje velice rozsáhlou oblast. V rámci učebního textu Regulace a řízení II jsme se seznámili se základními přístupy pro analýzu a syntézu regulačních obvodů s nelineárními členy. Chování nelineárních systémů je rozmanité stejně jako reálné prostředí, které reprezentují. V rozsahu daném studiem předmětu Regulace a řízení II není možné postihnout všechny specifické vlastnosti nelineárních systémů, které často vyžadují hledání individuálního řešení pro danou úlohu. Ukázali jsme si však základní postupy umožňující analýzu chování i poměrně složitých nelineárních dynamických systémů, přičemž na základě získaných poznatků dokážeme v řadě případů i navrhnout vhodný řídicí algoritmus. Pro detailnější pochopení studované problematiky lze pak doporučit literaturu uvedenou v literárních odkazech.

## A Odpovědi na kontrolní otázky

### A.1 Odpovědi na otázky vstupního testu

$$1. f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x_0} \frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

$$2. f(x) = \frac{1}{2}b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$$

$$\text{kde } b_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

3. c)

4. a),d)

5. a)

6. b)

7. d)

### A.2 Odpovědi na otázky kapitoly 2

1. Pro nelineární systémy princip superpozice neplatí.
2. Laplaceova transformace a tedy i operátorový přenos využívá principu superpozice, který pro nelineární systémy neplatí. Popis nelineárního systému operátorovým přenosem není tedy možný.
3. Frekvenční charakteristika souvisí s pojmem frekvenčního přenosu. Ten lze pomocí Fourierovy transformace nalézt jen pro systémy, u kterých platí princip superpozice. Frekvenční charakteristiku pro nelineární systém tedy není možné sestavit.
4. Stabilita nelineárních dynamických systému závisí nejen na struktuře a parametrech systému, ale i na průběhu vstupních signálů a počátečních podmínkách. Znalost samotné struktury systému tak k určení stability nestačí.

### A.3 Odpovědi na otázky kapitoly 3

1. Relé s hysterezí
2. Násobení konstantou je operace lineární, v případě násobení dvou nebo více signálů se jedná o operaci nelineární.
3. Použijeme první dva členy Taylorovy řady - obsahující nultou (absolutní člen) a první derivaci.
4. Statický bez paměti

## A.4 Odpovědi na otázky kapitoly 4.1

1. Rovnovážný stav (singulární bod) a mezní cyklus.
2. Položíme derivace stavových veličin rovny nule a řešíme obecně soustavu nelineárních algebraických rovnic.
3. Může existovat více, případně i nekonečně mnoho rovnovážných stavů.
4. Izolovaný ustálený stav je takový, v jehož  $\varepsilon$ -okolí se nenachází žádný další ustálený stav.

## A.5 Odpovědi na otázky kapitoly 4.2

1. Linearizaci můžeme provádět v okolí libovolně zvoleného stavu. S ohledem na skutečnost, že lineární náhrada dobře aproximuje původní systém jen v okolí pracovního bodu, obvykle jako tento bod volíme právě ustálený stav.
2. Ne, lineární náhrada založená na Taylorově rozvoji vypovídá o chování původního systému jen v blízkém okolí pracovního bodu.
3. Prvky Jacobiho matice jsou tvořeny podle vztahu (4.37)
4. Systémy po částech lineární jsou nelineární systémy, jejichž popis je vždy v určitém intervalu hodnot stavových veličin a vstupů lineární. Lze je tedy popsat množinou lineárních modelů, mezi kterými přecházíme na základě srovnání stavových a vstupních veličin s prahovými hodnotami.

## A.6 Odpovědi na otázky kapitoly 4.3

1. Izoklina je křivka spojující body stavové roviny, ve kterých má tečna k trajektorii stejnou směrnici.
2. Uzel, sedlo, ohnisko, střed.
3. Vhodný tvar je  $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = f(x_1, x_2)$ . Trajektorii systému pak nazýváme fázová trajektorie.
4. Je to možné jen v případech, kdy se nám podaří vhodnými substitucemi převést systém na neřízený.

## A.7 Odpovědi na otázky kapitoly 4.4

1. Výstup nelineární části lze rozložit do Fourierovy řady a lineární část má charakter dolní propusti.
2. Zjistíme odezvu nelineární části na harmonický signál, určíme sinusovou a kosinusovou složku první harmonické frekvence. Ty pak dělíme amplitudou vstupního signálu.

3. V obecném případě závisí na amplitudě, frekvenci a velikosti stejnosměrné složky vstupního harmonického signálu.
4. Použijeme Nyquistovo kritérium stability modifikované tak, že kritický bod  $(-1, 0)$  přesuneme do bodu odpovídajícímu meznímu cyklu.

### A.8 Odpovědi na otázky kapitoly 4.5

1. První metoda vyžaduje analytické řešení trajektorie, obvykle provedené pomocí linearizace. Druhá metoda je založena na hledání Ljapunovovy funkce, nevyžaduje přímo výpočet trajektorie.
2. Ljapunovova funkce musí být pozitivně definitní a její časová derivace negativně definitní.
3. Nalezení Ljapunovovy funkce je podmínkou postačující, nikoli nutnou pro dosažení stability. Nenalezení Ljapunovovy funkce tedy nevyvrací možnost stability systému.
4. Ne, pojem asymptotické stability vychází z představy, kdy se trajektorie s časem blíží rovnovážnému stavu.

### A.9 Odpovědi na otázky kapitoly 5.1

1. „Wind-up“ jev vzniká pouze pokud regulátor obsahuje integrační složku. U regulačních obvodů s PD regulátorem tedy tento jev nenastává.
2. „Wind-up“ jev se snažíme potlačit, protože způsobuje prodloužení regulačního děje.
3. Parametry regulátoru jsou upraveny v důsledku změny pracovního bodu, která je vyvolána zadáním nové žádané hodnoty.
4. Metoda „gain-scheduling“ je vhodná především pro systémy, kde dochází jen k pomalým změnám žádané hodnoty. Rychlé změny žádané hodnoty mohou způsobit zhoršení dynamiky regulačního děje a případně i vyvolat nestabilitu.

### A.10 Odpovědi na otázky kapitoly 5.2

1. Ne, lineární náhrada může mít nižší řád než původní systém.
2. Není, pro zpětnovazební linearizaci musíme mít k dispozici většinou i hodnoty stavových proměnných.
3. Transformace vstupu a transformace stavu.
4. Vnitřní dynamika je část dynamiky systému, která neovlivňuje vstupně – výstupní chování systému.

### A.11 Odpovědi na otázky kapitoly 5.3

1. Vznik kmitů lze omezit zavedením pásma necitlivosti a případně i použitím zpětné vazby od rychlosti změny regulační odchylky.
2. Velikost hystereze lze snížit zavedením zpětné vazby z výstupu nelinearity na její vstup.
3. Při řízení v klouzavém režimu dochází k takovému přepínání řízení, kdy se stav systému pohybuje po přepínací křivce.
4. Návrh reléového regulátoru lze provést na základě analýzy stability systému Ljapunovovou metodou.

### A.12 Odpovědi na otázky kapitoly 5.4

1. Pro návrh je třeba znát strukturu systému a alespoň meze, ve kterých se pohybují parametry systému.
2. Průběh stavové trajektorie v klouzavém režimu je dán tvarem přepínacího rozhraní, po kterém se trajektorie pohybuje.
3. V první fázi dochází k přibližování stavu systému k přepínacímu rozhraní, kterého je dosaženo v konečném čase. Následně se stav systému pohybuje po přepínacím rozhraní.
4. Aproximace reléové charakteristiky spojitou funkcí odstraňuje kmitání stavu řízeného systému kolem přepínacího rozhraní.

### A.13 Odpovědi na otázky kapitoly 6.1

1. neznamená, Cauchyova podmínka je podmínkou postačující, ne nutnou.
2. první chyba - sestavení neřešitelného modelu, druhá chyba - realizace neřešitelného modelu fyzikálním systémem
3. zanedbáním z hlediska řešené úlohy podstatných dynamických vlastností systému
4. simulační výsledky budou vypovídat spíše o vlastnosti použité numerické metody, než o chování řešeného systému

### A.14 Odpovědi na otázky kapitoly 6.2

1. Bude doplněno v budoucí verzi
- 2.
- 3.
- 4.

### A.15 Odpovědi na otázky kapitoly 6.2

1. V případě „gray–box“ systému předem známe strukturu modelu na základě fyzikálních vlastností systémů, identifikujeme tedy jen parametry modelu. U systému typu „black–box“ neznáme nejen parametry, ale ani vnitřní strukturu systému. Vhodnou strukturu modelu musíme tedy zvolit.
2. Koeficient zapomínání určuje, jak klesá váha jednotlivých vzorků vstupu a výstupu systému s časem.
3. Ano lze. Obecně platí, že každá metoda použitelná pro nelineární systémy může být aplikována na lineární systém.
4. Hodnotu kritériální funkce není nutné znát zcela přesně. Stačí, pokud ji vyhodnotíme s takovou přesností, že dokážeme rozhodnout, pro který vrchol simplexu nabývá největší hodnotu.



## B Výsledky neřešených příkladů

### Výsledek příkladu 3.5

$$f_{lin}(x_1, x_2) = 2x_1 + 0,125x_2 - 0,5$$

### Výsledek příkladu 4.7

$$x_0 = 0, x_0 = -3$$

### Výsledek příkladu 4.8

- $u = 1$  – mezní cyklus
- $u < 1$  – rovnovážný stav  $x_1 = u, x_2 = 0$

### Výsledek příkladu 4.13

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

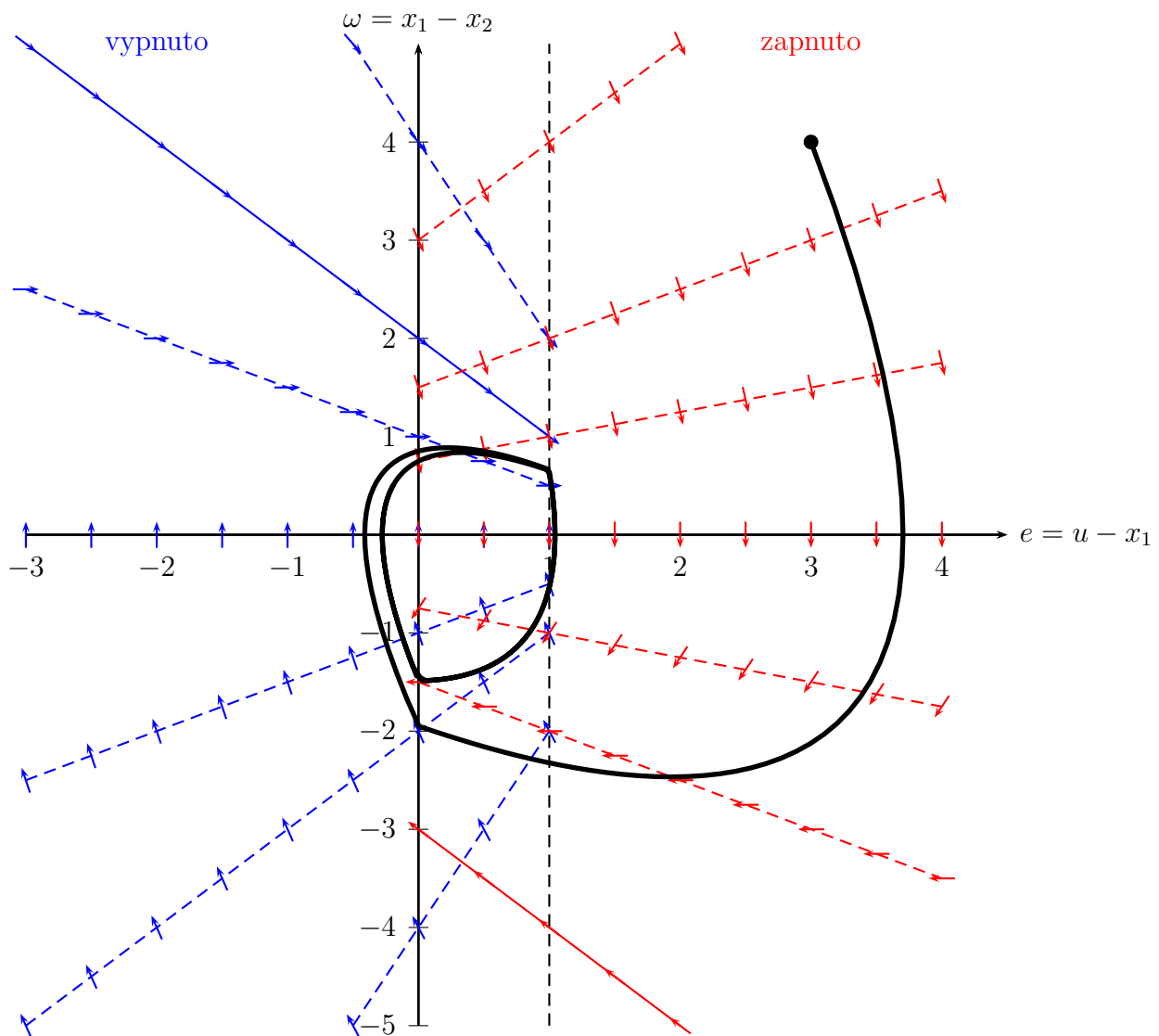
### Výsledek příkladu 4.14

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -u$$

### Výsledek příkladu 4.31

Mezní cyklus neexistuje.

## Výsledek příkladu 4.32

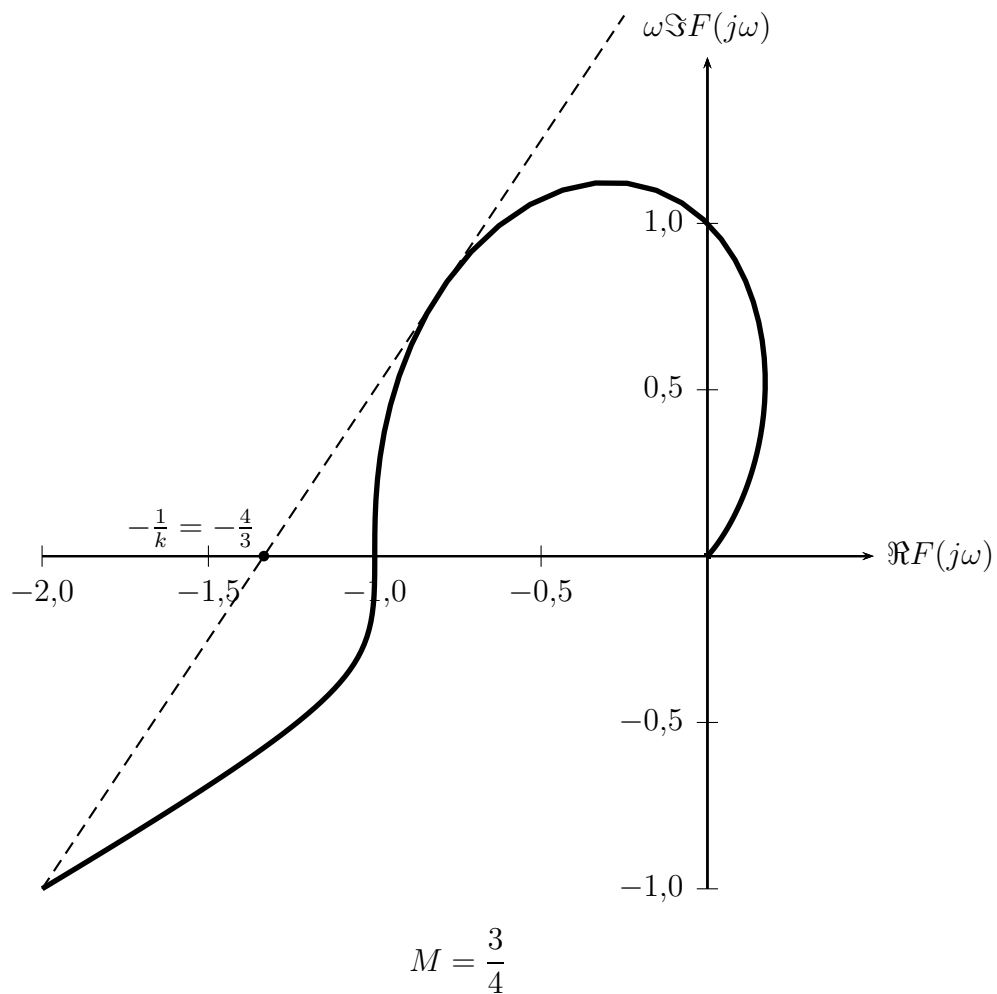


## Výsledek příkladu 4.41

$$N_e(A) = 1 + \frac{3}{8}A^2$$

## Výsledek příkladu 4.42

$$\omega = \omega_0 \quad A = \frac{\sqrt{2}KD}{\pi\xi\omega_0} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\pi\xi\omega_0\delta}{KD}\right)^2}}$$

**Výsledek příkladu 4.58****Výsledek příkladu 4.59**

- $a < 0$  – stabilní
- $a > 0$  – nestabilní
- $a = 0$  – nelze rozhodnout

**Výsledek příkladu 4.60**

Systém je lokálně asymptoticky stabilní, jedna z možných nalezených Ljapunovových funkcí je  $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ .

**Výsledek příkladu 5.8**

a) Linearizace je dosaženo transformací vstupu  $u = \frac{1}{\sin x_1}(v - x_1^2)$ .

b) Linearizaci provedeme transformací vstupu  $u = \frac{1}{4x_1 \sin x_1}(v - 12x_2x_3 - 4x_1^3 - 4x_1x_2)$ .

Podmínka platnosti linearizace je v obou případech  $x_1 \neq k\pi$ .

**Výsledek příkladu 5.9**

a) Linearizaci lze provést transformací vstupu  $u = \frac{1}{4x_2}(v - 6x_2^2 - 4x_1x_3 - 8x_3^2 - 4x_1^2x_2)$ .  
Podmínka platnosti je  $x_2 \neq 0$ .

b) Vzhledem k tomu, že lineární náhrada je druhého řádu a původní systém třetího řádu, linearizovaný systém obsahuje vnitřní dynamiku.

**Výsledek příkladu 5.14**

$u = (3 - K)x_2 - \text{sign}(Kx_1 + x_2)$ , kde  $K > 0$

## C Vybrané pojmy z matematiky

### C.1 Vlastní čísla matice

**Definice C.1** *Nechť  $\mathcal{A}$  je lineární transformace reprezentovaná maticí  $\mathbf{A}$ . Jestliže existuje vector  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n \neq \mathbf{0}$  takový, že platí*

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \quad (\text{C.1})$$

*pro určité skalární číslo  $\lambda$ , pak  $\lambda$  se nazývá vlastní číslo matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{X}$  je odpovídající vlastní vektor matice  $\mathbf{A}$ .*

Rovnici (C.1) můžeme upravit do tvaru

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (\text{C.2})$$

Z Cramerova pravidla pak vyplývá, že nenulové řešení této soustavy lineárních rovnic existuje, jen pokud platí

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (\text{C.3})$$

Rovnici (C.3) nazýváme *charakteristická rovnice* matice  $\mathbf{A}$  a polynom

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \quad (\text{C.4})$$

*charakteristickým polynomem* matice  $\mathbf{A}$ . Vlastní čísla tedy vypočteme řešením charakteristické rovnice (C.3) jako kořeny charakteristického polynomu (C.4).

### C.2 Definitnost funkce

**Definice C.2** *Předpokládejme, že skalární funkce  $f(\mathbf{x})$  je definovaná na oboru  $\mathbb{R}^n$  a je dána oblast  $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$ . Pak funkce  $f(\mathbf{x})$  je v oblasti  $\mathbb{S}$*

- *pozitivně definitní, pokud  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{S} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow f(\mathbf{x}) > 0 \quad \wedge \quad f(\mathbf{0}) \geq 0$*
- *pozitivně semidefinitní, pokud  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{S} \quad f(\mathbf{x}) \geq 0$*
- *negativně definitní, pokud  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{S} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow f(\mathbf{x}) < 0 \quad \wedge \quad f(\mathbf{0}) \leq 0$*
- *negativně semidefinitní, pokud  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{S} \quad f(\mathbf{x}) \leq 0$*
- *indefinitní, pokud  $\exists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{S} \quad f(\mathbf{x}_1) < 0 < f(\mathbf{x}_2)$*

**Věta C.1** *Pokud je funkce  $f(\mathbf{x})$  pozitivně definitní, je funkce  $-f(\mathbf{x})$  negativně definitní. Pokud je funkce  $f(\mathbf{x})$  pozitivně semidefinitní, je funkce  $-f(\mathbf{x})$  negativně semidefinitní. Pokud je funkce  $f(\mathbf{x})$  indefinitní, je funkce  $-f(\mathbf{x})$  rovněž indefinitní.*

### C.3 Kvadratická forma

**Definice C.3** Nechť  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  je vektor a matice  $\mathbf{A}$  je symetrická  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ . Pak funkce  $Q(\mathbf{x})$

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}; \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle \quad (\text{C.5})$$

je kvadratická forma

**Definice C.4** Kvadratická forma  $Q(\mathbf{x})$  je

- pozitivně definitní, pokud platí  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow Q(\mathbf{x}) > 0 \quad \wedge \quad Q(\mathbf{0}) = 0$
- pozitivně semidefinitní, pokud platí  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad Q(\mathbf{x}) \geq 0$

**Definice C.5** Nechť  $Q(\mathbf{x})$  je kvadratická forma určená maticí  $\mathbf{A}$ . Pak matice  $\mathbf{A}$  je

- pozitivně definitní právě když je  $Q(\mathbf{x})$  pozitivně definitní
- pozitivně semidefinitní právě když je  $Q(\mathbf{x})$  pozitivně semidefinitní
- negativně definitní právě když je  $-Q(\mathbf{x})$  pozitivně definitní
- negativně semidefinitní právě když je  $-Q(\mathbf{x})$  pozitivně semidefinitní

**Věta C.2** Matice  $\mathbf{A}$  je

- pozitivně definitní právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná
- pozitivně semidefinitní právě když jsou všechna její vlastní čísla nezáporná
- negativně definitní právě když jsou všechna její vlastní čísla záporná
- negativně semidefinitní právě když jsou všechna její vlastní čísla nekladná

**Věta C.3 Sylvestrovo kritérium**

Nechť  $Q(\mathbf{x})$  je kvadratická forma určená maticí  $\mathbf{A}$ . Pak kvadratická forma  $Q(\mathbf{x})$  je

- pozitivně definitní právě když  $\forall k = 1, 2, \dots, n \quad \det([a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq k}) > 0$
- pozitivně semidefinitní právě když  $\forall k = 1, 2, \dots, n \quad \det([a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq k}) \geq 0$
- negativně definitní právě když  $\forall k = 1, 2, \dots, n \quad (-1)^k \det([a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq k}) > 0$

### C.4 Inverze matice

**Věta C.4** Pro matici inverzní k matici  $\mathbf{A}$  platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} \quad (\text{C.6})$$

**Věta C.5** Inverzi matice s rozměry  $2 \times 2$  lze vypočítat podle vztahu

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

**Věta C.6** Lema o inverzi matice

$$[\mathbf{A} + \mathbf{BCD}]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1} \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{DA}^{-1} \quad (\text{C.8})$$

## C.5 Divergence

**Definice C.6** Divergence  $\nabla\mathbf{F}$  vektorového pole  $\mathbf{F}$  je dána vztahem

$$\nabla\mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{F} dx \quad (\text{C.9})$$

kde  $S$  představuje povrch objemového elementu  $V$

**Věta C.7** Divergence vektorového pole  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$  je

$$\nabla\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{C.10})$$

## C.6 Vztahy pro goniometrické funkce

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad (\text{C.11})$$

$$\cos(n\alpha) = 2 \cos \alpha \cos[(n-1)\alpha] - \cos[(n-2)\alpha] \quad (\text{C.12})$$

$$\cos \arcsin x = \sqrt{1-x^2} \quad (\text{C.13})$$

## Reference

- [1] Razím, M., Štecha, J.: Nelineární systémy. ČVUT Praha, 1997.
- [2] Šolc, F.: Teorie automatického řízení II. VUT Brno, 1991.
- [3] Šolc, F.: Teorie automatického řízení III. VUT Brno, 1988.
- [4] Khalil, H.K.: Nonlinear Systems. Prentice Hall, 1996.
- [5] Gelb, A., Velde, W.: Multiple-input Describing Functions and Nonlinear System Design. McGraw-Hill, 1968.
- [6] Slotine, J., Weiping, L.: Applied Nonlinear Control. Pearson Education, 1990.
- [7] Weisstein, E. W.: MathWorld—A Wolfram Web Resource.  
<http://mathworld.wolfram.com>
- [8] Horáček, P.: Systémy a modely. ČVUT Praha, 2001.
- [9] Soderstrom, T., Stoica, P.: System Identification. Prentice Hall, 1989.
- [10] Press, W.H.: Numerical Recipes in C. Cambridge University Press, 1992.  
<http://lib-www.lanl.gov/numerical/bookcpdf.html>
- [11] Ljung, L.: System Identification: Theory for the User. Prentice Hall, 1987.
- [12] Wright, M.H.: Direct search methods: Once scorned, now respectable, Proceedings of the 1995 Dundee Biennial Conference in Numerical Analysis.



## Názvosloví

$\ddot{x}$  druhá derivace veličiny  $x$  podle času  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$\dot{x}$  derivace veličiny  $x$  podle času  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

$\Im$  imaginární část

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  skalární součin vektorů  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$

$\mathbf{x}_0$  hodnota rovnovážného stavu systému

$\omega$  úhlová frekvence

$\Re$  reálná část

$\varepsilon$ -okolí bodu  $\mathbf{x}_0$  je množina všech bodů  $\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon; \varepsilon > 0\}$

$f$  frekvence

$g$  tíhové zrychlení

## Rejstřík

- algebraická
  - smyčka, 194
- Ambrosinova aproximace, 184
- anti wind-up, 156
- aproximace
  - Ambrosinova, 184
  - reléové charakteristiky, 184
- asymptotická stabilita
  - globální, 121
  - lokální, 120
- Bendixsonův teorém, 75
- bimetalový regulátor, 167
- bod
  - singulární, 32
- Cauchyova podmínka, 190
- Četajevova věta, 142
- charakteristická rovnice, 219
- charakteristický polynom, 219
- charakteristika
  - frekvenční, 106
- cyklus
  - mezní, 34
  - nestabilní, 35
  - polostabilní, 35
  - stabilní, 35
- definitní
  - funkce
    - negativně, 219
    - pozitivně, 219
  - kvadratická forma
    - pozitivně, 220
  - matice
    - negativně, 220
    - pozitivně, 220
- divergence, 221
- dynamické mazání, 52
- dynamický systém, 28
- dynamika
  - vnitřní, 162
- ekvivalentní
  - přenos, 91, 92
  - zesílení, viz zisk
  - zisk, 92
- exaktní zpětnovazební linearizace, 158
  - vstup – stav, 159
  - vstup – výstup, 161
- fázová
  - rovina, 60
  - trajektorie, 60
- frekvenční charakteristika, 106
- funkce
  - definitní
    - negativně, 219
    - pozitivně, 219
  - fminsearch, 203
  - indefinitní, 219
  - Ljapunovova, 133
  - Lyapunovova, 125
  - semidefinitní
    - negativně, 219
    - pozitivně, 219
- gain-scheduling, 151
- globální
  - stabilita
    - asymptotická, 121
- harmonická
  - linearizace, 34
  - rovnováha, 34, 95
- Harmonická linearizace, 91
- hystereze, viz vůle v převodech
- identifikace
  - metoda
    - nejmenších čtverců, 195
    - nelineárních systémů, 199
    - neparametrická, 194
    - parametrická, 194
- indefinitní
  - funkce, 219

- index
  - Jordanovy křivky, 77
  - Poincaréův, 78
- indexový teorém, 77
- interpolace
  - Lagrangeova formule, 16
- inverze matice, 220
- isokliny, 46, 56
- Jacobián, *viz* Jacobiho matice
- Jacobiho matice, 40, 133
- jev
  - wind-up, 156
- Jordanův kanonický tvar, 70
- Jordanova křivka, 77
- křivka
  - Jordanova, 77
- kanonický tvar
  - Jordanův, 70
- Krasovského metoda, 133
- kritérium
  - Sylvestrovo, 220
- kriterium
  - Nyquistovo, 96
  - Popovovo, 137
- kvadratická
  - forma, 220
    - pozitivně definitní, 220
    - pozitivně semidefinitní, 220
- Lagrangeova interpolace, *viz* interpolace
- linearizace
  - harmonická, 34, 91
  - metoda nejmenších čtverců, 17
  - Taylorova řada, 16, 39
  - zpětnovazební, 158
    - vstup – stav, 159
    - vstup – výstup, 161
- Ljapunovova
  - funkce, 125
  - metoda
    - druhá, 122
    - přímá, 122
    - první, 122
  - teorie stability, 119
- Ljapunovova funkce, 133
- lokální
  - stabilita
    - asymptotická, 120
    - rovnovážného stavu, 119
- matice
  - definitní
    - negativně, 220
    - pozitivně, 220
  - inverzní, 220
  - Jacobiho, 40, 133
  - semidefinitní
    - negativně, 220
    - pozitivně, 220
- mazání
  - dynamické, 52
- metoda
  - bodových transformací, 81
  - ekvivalentních přenosů, 91
  - gain–scheduling, 151
  - harmonické rovnováhy, 95
  - isoklin, 46, 56
  - Krasovského, 133
  - minimalizace
    - Nelder–Mead, 201
  - nejmenších čtverců, *viz* linearizace, 195
    - jednorázová, 197
    - průběžná, 198
    - rekurzivní, 198
    - zapomínání, 199
  - variabilního gradientu, 135
- mezní cyklus, 34
  - nestabilní, 35
  - polostabilní, 35
  - stabilní, 35
- mimimalizace
  - Nelder–Mead, 201
- nasycení, 24
- necitlivost, 25
- negativně
  - definitní
    - funkce, 219

- matice, 220
- semidefinitní
  - funkce, 219
  - matice, 220
- nelinearita
  - bez paměti, *viz* systém bez paměti
  - nasycení, *viz* nasycení
  - necitlivost, *viz* necitlivost
  - relé, *viz* relé
  - bezpaměti
    - tření, *viz* tření
  - s pamětí, *viz* systém s pamětí
  - relé, *viz* relé
  - vůle v převodech, *viz* vůle v převodech
  - statická, *viz* systém bez dynamiky
  - tření, 52
- nestabilní
  - uzel, 72
- Nyquistovo kritérium, 96
- ohnisko
  - nestabilní, 73
  - stabilní, 73
- přímka
  - Popovova, 139
- přenos
  - ekvivalentní, 91, 92
- podmínka
  - Cauchyova, 190
  - rovnováhy
    - střídavé, 102
    - stejnoseměrné, 102
- Poincaré-Bendixsonův teorém, 76
- Poincaréův index, 78
- polynom
  - charakteristický, 219
- Popovův teorém, 139
- Popovova přímka, 139
- Popovovo kritérium, 137
- portrét
  - stavový, 56
- pozitivně
  - definitní
    - funkce, 219
  - kvadratická forma, 220
  - matice, 220
  - semidefinitní
    - funkce, 219
    - kvadratická forma, 220
    - matice, 220
  - praktická stabilita, 121
  - princip superpozice, *viz* superpozice
  - řada
    - Taylorova, 39
  - regulátor
    - bimetalový, 167
  - relé, 22, 25–27
    - aproximace, 184
    - bez hystereze, 25
    - třístavové, 26
    - s hysterezí, 22, 26
    - třístavové, 27
  - reléové
    - systémy, 165
  - řešitelnost dif. rovnic, 190
  - řízení
    - bang-bang, 165
    - on-off, 165
    - robustní, 184
    - sliding mode, *viz* klouzavý režim
    - v klouzavém režimu, 173
  - robustní
    - řízení, 184
  - rovina
    - fázová, 60
  - rovnice
    - charakteristická, 219
  - rovnovážný stav, 32
    - izolovaný, 33
    - nestabilní, 32
    - stabilní, 32
  - rovnováha
    - harmonická, 34, 95
    - střídavá, 102
    - stejnoseměrná, 102
  - sedlo, 72
  - semidefinitní

- funkce
  - negativně, 219
  - pozitivně, 219
- kvadratická forma
  - pozitivně, 220
- matice
  - negativně, 220
  - pozitivně, 220
- simplex, 201
- singulární bod, 32
- smyčka
  - algebraická, 194
- střídavá rovnováha, 102
- střed, 73
- stabilita, 118
  - globální
    - asymptotická, 121
  - kritérium
    - Popovovo, 137
    - Ljapunovova, 119
  - lokální
    - asymptotická, 120
    - rovnovážného stavu, 119
  - praktická, 121
  - v malém, 119
  - ve velkém, 121
- stabilní
  - uzel, 72
- statický systém, *viz* systém bez dynamiky
- stav
  - rovnovážný, 32
    - izolovaný, 33
    - nestabilní, 32
    - stabilní, 32
  - ustálený, 31
- stavová trajektorie, 31
- stavový portrét, 56
- stejnoseměrná rovnováha, 102
- superpozice, 12
- Sylvestrovo kritérium, 220
- systém
  - bez dynamiky, 15
  - bez paměti, 15
  - dynamický, *viz* dynamický systém
  - lineární
    - po částech, 42
  - s pamětí, 22
    - relé s hysterezí, 22
    - vůle v převodech, 22
  - statický, *viz* systém bez dynamiky
- tření, 27, 52
- Taylorova řada, *viz* linearizace, 39
- teorém
  - Bendixsonův, 75
  - indexový, 77
  - o asymptotické stabilitě
    - globální, 130
    - lokální, 128
  - o lokální stabilitě, 126
  - Poincaré-Bendixsonův, 76
  - Popovův, 139
- teorie
  - stability
    - Ljapunovova, 119
- trajektorie
  - fázová, 60
  - průmět, 31
  - stavová, 31
- trajektorie systému
  - druhého řádu řádu, 54
    - lineárních, 69
  - prvního řádu, 46
- transformace
  - posouvající póly, 141
  - tvaru nelinearity, 142
- ustálený stav, 31
- uzel
  - dikritický
    - nestabilní, 72
    - stabilní, 72
  - nestabilní, 72
  - stabilní, 72
- vůle v převodech, 22, 25
- věta
  - o nestabilitě
    - Četajevova, 142

- druhá Ljapunovova, 144
- první Ljapunovova, 143
- vlastní
  - číslo, 219
  - vektor, 219
- vnitřní
  - dynamika, 162
- wind-up
  - jev, 156
  - potlačení, 156
- zesílení
  - ekvivalentní, viz zisk
- zisk
  - ekvivalentní, 92
- zpětnovazební
  - linearizace, 158
  - vstup – stav, 159
  - vstup – výstup, 161