

Stavový popis, linearizace

Teorie dynamických systémů

Obsah

1 Úvod	1
2 Příklady	2
3 Domácí úlohy	14
Reference	15

1 Úvod

Stavové rovnice nelineárního systému

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t),\end{aligned}\tag{1}$$

kde první rovnice se nazývá *stavová rovnice* a druhá *výstupní rovnice*. Vektor \mathbf{u} rozměru r je vstupní vektor, \mathbf{x} rozměru n je stavový vektor a \mathbf{y} rozměru m je výstupní vektor. Pokud, předpokládáme stacionární nebo též časově neproměnný (t-invariantní) systém, zapíšeme rovnice (1) ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)).\end{aligned}$$

Stavové rovnice lineárního systému

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t),\end{aligned}\tag{2}$$

kde matice \mathbf{A} rozměru $(n \times n)$ je matice systému, matice \mathbf{B} rozměru $(n \times r)$ je matice řízení a matice \mathbf{C} rozměru $(m \times n)$, \mathbf{D} rozměru $(m \times r)$ jsou výstupní matice. Pokud je model časově proměnný, jsou některé z těchto matic funkcí času $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}(t)$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}(t)$.

★ *Linearizace systému*

V okolí nějaké nominální trajektorie $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ můžeme pravé strany nelineárních rovnic (1) zapsat v Taylorově rozvoji

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = & \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_0 \delta \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)}{\partial \mathbf{u}(t)} \right|_0 \delta \mathbf{u}(t) + \\ & + \left. \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)}{\partial \mathbf{x}^2(t)} \right|_0 (\delta \mathbf{x}(t))^2 + \left. \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)}{\partial \mathbf{u}^2(t)} \right|_0 (\delta \mathbf{u}(t))^2 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

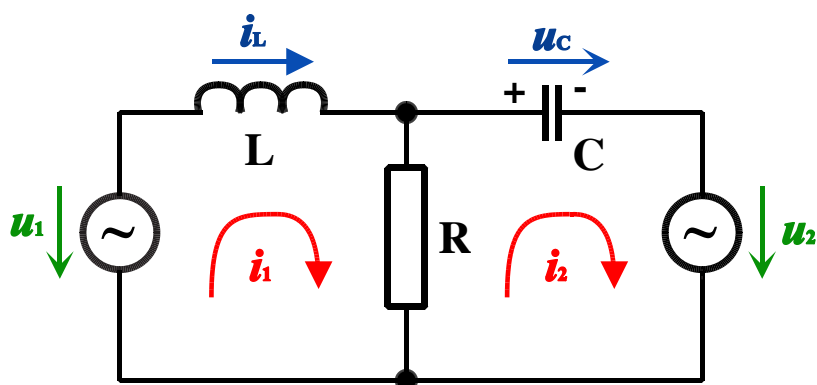
$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = & \mathbf{g}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_0 \delta \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)}{\partial \mathbf{u}(t)} \right|_0 \delta \mathbf{u}(t) + \\ & + \left. \frac{\partial^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)}{\partial \mathbf{x}^2(t)} \right|_0 (\delta \mathbf{x}(t))^2 + \left. \frac{\partial^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)}{\partial \mathbf{u}^2(t)} \right|_0 (\delta \mathbf{u}(t))^2 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Zanedbáme-li kvadratické a vyšší členy v tomto rozvoji, získáme v okolí nominální trajektorie $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ linearizovaný *odchytkový* model (2).

2 Příklady

2.1 Stavový popis lineárních systémů

Příklad 2.1: Uvažujte elektrický obvod podle obr. 1 se dvěma vstupními (nezávislými) veličinami – napětí $u_1(t)$, $u_2(t)$ a dvěma výstupními veličinami – proudy $i_1(t)$, $i_2(t)$. Odpor rezistoru je $R = 1 \Omega$, indukčnost cívky je $L = 0,2\text{H}$ a kapacita kondenzátoru je $C = 100\mu\text{F}$.



Obrázek 1: Elektrický obvod

Určete stavový popis tohoto elektrického systému a nalezněte řešení těchto rovnic pro počáteční podmínku $u_C(0) = u_0$, $i_L(0) = i_0$. Určete přenos tohoto systému za předpokladu nulových počátečních podmínek.

Řešení: Metodou uzlových napětí můžeme pro napětí $u(t)$ v uzlu mezi cívkou a kondenzátorem psát

$$\begin{aligned} -L \frac{di_L(t)}{dt} &= u(t) - u_1(t), \\ u(t) &= R \left(i_L(t) - C \frac{du_C(t)}{dt} \right), \\ u(t) &= u_2(t) + u_C(t). \end{aligned}$$

Po dosazení třetí rovnice do první a druhé, dostaneme soustavu dvou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{di_L(t)}{dt} &= -\frac{1}{L} u_C(t) + \frac{1}{L} u_1(t) - \frac{1}{L} u_2(t), \\ \frac{du_C(t)}{dt} &= \frac{1}{C} i_L(t) - \frac{1}{RC} u_C(t) - \frac{1}{RC} u_2(t). \end{aligned}$$

Nyní zvolme například za stavové proměnné proud cívkou $x_1 = i_L$ a napětí na kondenzátoru $x_2 = u_C$. Stavová rovnice pak vypadá takto

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Protože se proud i_1 rovná proudu cívkou i_L a pro proud i_2 platí

$$i_2(t) = i_L(t) - \frac{u_C(t) + u_2(t)}{R},$$

můžeme zapsat výstupní rovnici systému takto

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Rovnice (5), (6) jsou ve standardním tvaru stavových rovnic popisujících lineární systémy (2). Jejich řešení můžeme nalézt tak, že provedeme Laplaceovu transformaci těchto dvou rovnic, poté vyliminujeme stavový vektor a provedemem zpětnou Laplaceovu transformaci. Obdržíme tak vektor výstupních proudů jako funkci počáteční podmínky stavových proměnných a vektoru vstupních napětí. Také můžeme k řešení využít prostředí Simulink programu Matlab.

My zde však ukážeme numerické řešení pomocí programu Matlab pro vstupní signál

$$u_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 1s \\ 1 & \text{pro } t \geq 1s \end{cases}, \quad u_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 2s \\ 1 & \text{pro } t \geq 2s \end{cases}$$

a pro počáteční podmínky $u_C(0) = 1V$ a $i_L(0) = 0,5A$. Kód pro toto řešení by mohl v Matlabu vypadat následovně.

```
clc; clear; close all;

%----- Parametry elektrického obvodu
R = 1;
L = 0.2;
C = 100E-06;

%----- Matice spojitého systému
A = [0, -1/L; 1/C, -1/(R*C)];
B = [1/L, -1/L; 0, -1/(R*C)];
C = [1, 0; 1 -1/R];
D = [0, 0; 0, -1/R];

%----- Diskretizace s periodou vzorkování Ts pro numerické řešení
Ts = 0.01;
[Ad, Bd, Cd, Dd] = ssdata(c2d(ss(A,B,C,D),Ts));

%----- Počáteční podmínka x0
iL0 = 0.5;
uC0 = 1;
x = [iL0; uC0];

%----- Vstupní signal
u = [zeros(1,100), ones(1,200); zeros(1,200), ones(1,100)];

%----- Řešení stavových rovnic
N = size(u,2);
yh = zeros(size(C,1),N);
xh = zeros(size(A,1),N);
for k = 1 : 1 : N
    y = Cd*x + Dd*u(:,k);

    %--- uložení dat pro vykreslení
    yh(:,k) = y;    xh(:,k) = x;

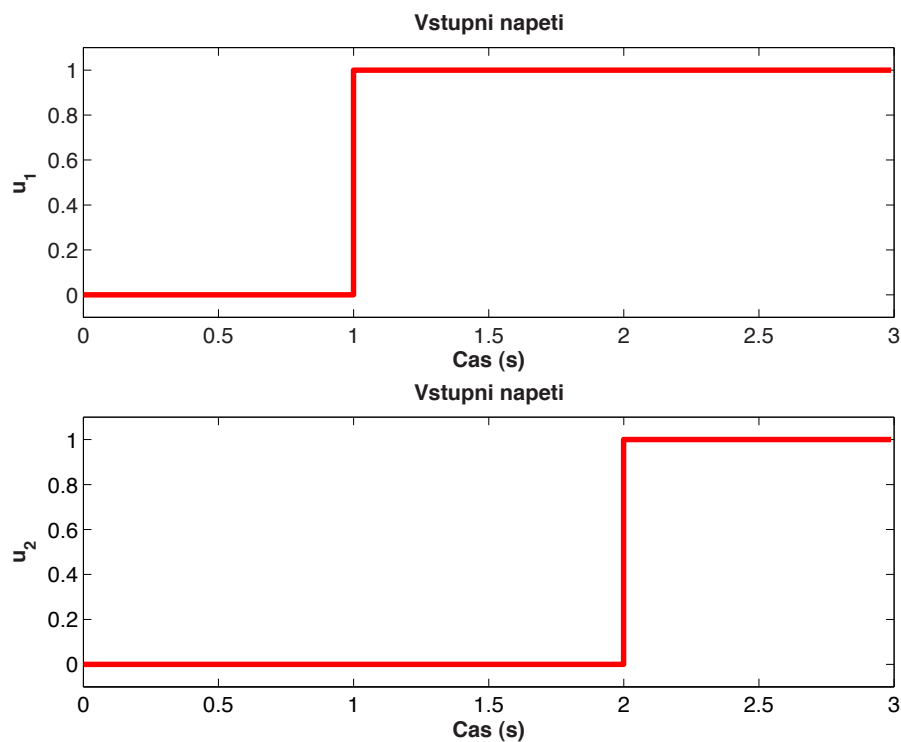
    x = Ad*x + Bd*u(:,k);
end

%----- Vykreslení výsledku
CasovaOsa = (0:1:size(u,2)-1)*Ts;
figure(1);
subplot(2,1,1);
stairs(CasovaOsa,u(1,:))', 'r');
axis([xlim, -0.1 1.1]);
xlabel('Cas - t'); ylabel('u_1'); title('Vstupní napeti');
subplot(2,1,2);
stairs(CasovaOsa,u(2,:))', 'r');
axis([xlim, -0.1 1.1]);
xlabel('Cas - t'); ylabel('u_2'); title('Vstupní napeti');
```

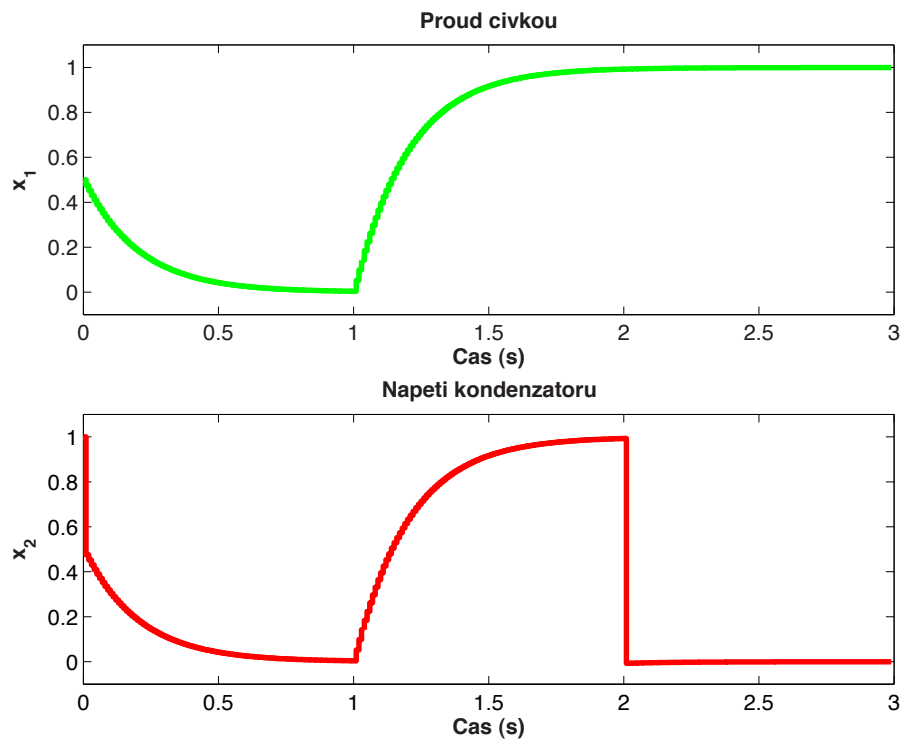
```
figure(2);
subplot(2,1,1);
stairs(Casova0sa,yh(1,:),'r');
axis([xlim, -0.1 1.1]);
xlabel('Cas - t'); ylabel('y_1'); title('Vystupni proud');
subplot(2,1,2);
stairs(Casova0sa,yh(2,:),'r');
axis([xlim, -0.1 1.1]);
xlabel('Cas - t'); ylabel('y_2'); title('Vystupni proud');

%----- Export figury do EPS
print(1, '-depsc2', 'Vstup');
print(2, '-depsc2', 'Vystup');
```

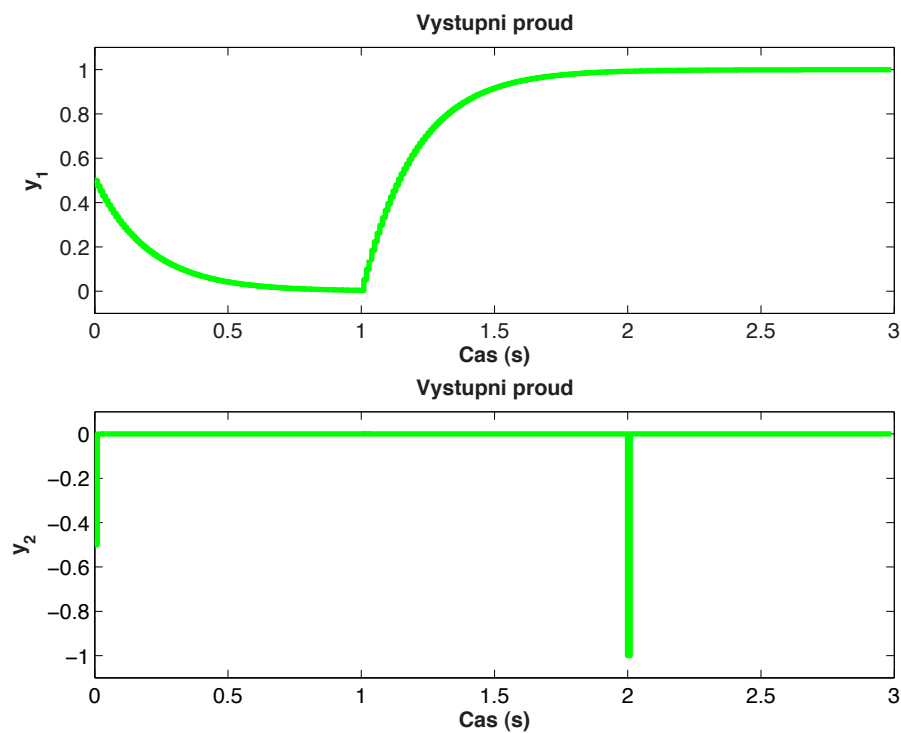
Na obrázcích 2, 3 a 4 jsou zobrazeny postupně průběhy vstupních, stavových a výstupních veličin. Porovnejte tyto výsledky s průběhy získanými pomocí spojitě simulace v prostředí Simulink.



Obrázek 2: Průběh vstupních napětí – $u_1(t)$, $u_2(t)$



Obrázek 3: Průběh stavových veličin – $x_1(t) = i_L(t)$, $x_2(t) = u_C(t)$



Obrázek 4: Průběh výstupních proudů – $y_1(t) = i_1(t)$, $y_2(t) = i_2(t)$

Za předpokladu nulových počátečních podmínek určíme přenos našeho systému pomocí vztahu

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} + \mathbf{D}.$$

Spočítejme nejprve $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$

$$\det \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \right) = s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}.$$

Dále určíme $\operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$

$$\operatorname{adj} \left(\begin{bmatrix} s & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & s + \frac{1}{RC} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} s + \frac{1}{RC} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & s \end{bmatrix}.$$

Výsledný přenos $\mathbf{G}(s)$ tedy je

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{RC} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{L}s + \frac{1}{RCL} & -\frac{1}{L}s \\ \frac{1}{L}s & -\frac{1}{R}s^2 - \frac{1}{L}s \end{bmatrix}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}. \end{aligned}$$

□

Příklad 2.2: Uvažujte stavový popis lineárního, časově neproměnného systému druhého řádu ve tvaru stavových rovnic (2)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{D}u(t). \end{aligned}$$

Napište tyto rovnice pro nový stavový vektor $\mathbf{z}(t) = [z_1(t), z_2(t)]^T$, pro jehož složku platí

$$z_1(t) = k_1 x_1(t), \quad z_2(t) = k_2 x_2(t),$$

kde k_1 a k_2 jsou libovolné nenulové reálné konstanty.

Řešení: Nejprve přepíšeme transformaci stavů do maticového zápisu

$$\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1^{-1} & 0 \\ 0 & k_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}.$$

Nyní dosadíme do původního stavového popisu

$$\begin{bmatrix} k_1^{-1} & 0 \\ 0 & k_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} k_1^{-1} & 0 \\ 0 & k_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} k_1^{-1} & 0 \\ 0 & k_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{D}u(t).$$

Nyní už jen stavovou rovnici vynásobíme zleva transformační maticí a získáme stavový popis pro transformovaný stavový vektor $\mathbf{z}(t) = [z_1(t), z_2(t)]^T$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} k_1^{-1} & 0 \\ 0 & k_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} k_1^{-1} & 0 \\ 0 & k_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{D}u(t).$$

Ověřte správnost transformace simulacemi v Matlabu. □

Příklad 2.3: Uvažujte stavový popis lineárního, časově neproměnného systému druhého řádu ve tvaru stavových rovnic (2). Předpokládejte, že chceme změnit časové měřítko podle vztahu (například z [s] na [ms])

$$\tau = k t,$$

kde k je libovolná nenulová reálná konstanta. Nalezněte stavový popis po této transformaci.

Řešení: Pro čas t platí $t = \tau/k$. Upravujeme tedy stavovou rovnici takto

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(\tau) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(\tau),$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(\tau)}{d\tau} k = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(\tau) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(\tau),$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{k} \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(\tau) + \frac{1}{k} \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(\tau).$$

Výstupní rovnice je

$$\hat{\mathbf{y}}(\tau) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(\tau) + \mathbf{D}\hat{\mathbf{u}}(\tau).$$

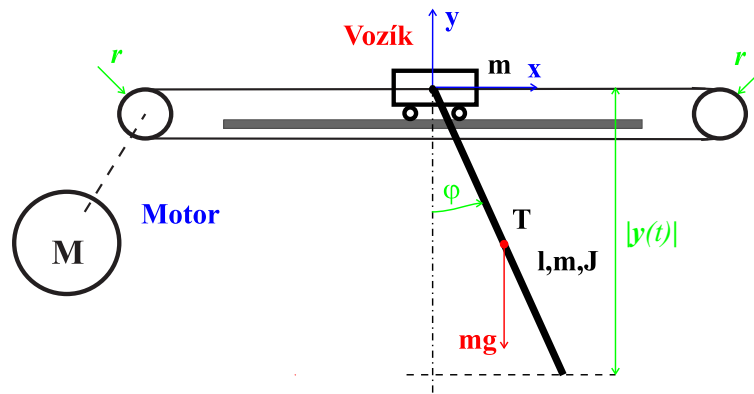
Matice transformovaného systému tedy jsou

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{k} \mathbf{A}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{k} \mathbf{B}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}.$$

Ověřte správnost transformace simulacemi v Matlabu. □

2.2 Linearizace

Příklad 2.4: Model kyvadla na vozíku znázorněný na obr. 5 je mechanický systém s jednou vstupní veličinou (napětí motoru – u) a dvěma výstupními veličinami (poloha vozíku – x , výchylka ramene kyvadla – φ).



Obrázek 5: Kyvadlo na vozíku

Pohyb ramene kyvadla s pohyblivým závěsem můžeme popsat diferenciální rovnicí druhého řádu

$$\ddot{\varphi}(t) + 2\delta\dot{\varphi}(t) + \omega_0^2 \sin \varphi(t) = -\frac{3}{2l} \ddot{x}(t) \cos \varphi(t), \quad (7)$$

kde \ddot{x} [$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$] je zrychlení závěsu kyvadla ve směru osy x , δ [s^{-1}] je koeficient útlumu kmitů a ω_0 [s^{-1}] je vlastní úhlová frekvence kyvadla

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l}},$$

kde g [$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$] je gravitační zrychlení a l [m] je délka ramene kyvadla.

Úhel natočení hřídele ϑ [s^{-1}] stejnosměrného cize buzeného motoru můžeme popsat diferenciální rovnicí třetího řádu

$$\ddot{\vartheta}(t) + \frac{R}{L} \dot{\vartheta}(t) + \frac{k^2}{J_M L} \vartheta(t) = \frac{k}{J_M L} u(t), \quad (8)$$

kde R [Ω] je elektrický odpor motoru, L [H] je indukčnost motoru, J_M [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$] je moment setrvačnosti rotoru a k je konstanta motoru.

Uvažujme, že vozík s motorem se chovají jako tvrdý zdroj polohy (pohyb kyvadla zpětně neovlivňuje pohyb vozíku) a že hmotnost vozíku je zanedbatelná v porovnání se setrvačností rotoru. Pak můžeme použít vztah mezi zrychlením závěsu kyvadla a zrychlením motoru

$$\ddot{x}(t) = r \ddot{\vartheta}(t).$$

Odvoďte stavový popis tohoto systému a proveďte jeho linearizaci v dolní ($\varphi = 0$) a horní ($\varphi = \pi$) poloze kyvadla. Porovnejte (například v simulinku) skutečný (nelineární) model s linearizovaným (odchytkovým) modelem v dolní i horní poloze.

Tabulka 1: Parametry kyvadla na vozíku

Parametr	Hodnota	Rozměr
l	1	m
g	9,81	$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
δ	0,025	s^1
R	1	Ω
L	0,1	H
J_M	10	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
k	1	
r	0,1	m

Řešení: Nejprve pro jednoduchost přeznačíme konstanty v rovnici motoru

$$a_1 = \frac{R}{L}, \quad a_0 = \frac{k^2}{J_M L}, \quad b_0 = \frac{r k}{J_M L}.$$

Nyní zavedeme 5 stavových proměnných:

- $x_1 = x = r \vartheta$ – poloha vozíku,
- $x_2 = \dot{x} = r \dot{\vartheta}$ – rychlost vozíku,
- $x_3 = \ddot{x} = r \ddot{\vartheta}$ – zrychlení vozíku,
- $x_4 = \varphi$ – výchylka ramene kyvadla,
- $x_5 = \dot{\varphi}$ – úhlová rychlost ramene kyvadla.

Stavové rovnice sestavíme tak, že spojíme model motoru a ramene kyvadla.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -a_0 x_2(t) - a_1 x_3(t) + b_0 u(t) \\ \dot{x}_4(t) &= x_5(t) \\ \dot{x}_5(t) &= -\omega_0^2 \sin x_4(t) - 2\delta x_5(t) - \frac{3}{2l} x_3(t) \cos x_4(t) \end{aligned}$$

Zavedeme stavový vektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T$ a zapíšeme tyto stavové rovnice v maticovém zápisu

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_0 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\delta \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\omega_0^2 \sin x_4(t) - \frac{3}{2l} x_3(t) \cos x_4(t) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Výstupní rovnice je

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (10)$$

Tento stavový model je nelineární, respektive jeho poslední rovnice je nelineární. Provedeme tedy nyní linearizaci tohoto modelu ve stacionárních bodech. Ty nalezneme podle rovnice

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}.$$

Řešením této rovnice obdržíme dva stacionární body

$$\mathbf{x}_{0_1} = [0, 0, 0, 0, 0]^T, \quad \mathbf{x}_{0_2} = [0, 0, 0, \pi, 0]^T,$$

které odpovídají dolní, respektive horní, poloze kyvadla.

Zapíšeme-li pátou stavovou rovnici ve tvaru $\dot{x}(t) = f(\mathbf{x}(t), u(t))$, pak Taylorův rozvoj (3) této rovnice můžeme zapsat jako

$$\dot{x}_5(t) = f(\mathbf{x}(t), u(t)) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} + \frac{\partial f(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \Delta \mathbf{x}(t) + \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial \mathbf{x}^2(t)} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \Delta \mathbf{x}^2(t) + \dots$$

Zanedbáme-li v tomto rozvoji kvadratické a vyšší členy, získáme ve stacionárních bodech linearizovaný *odchylový* model

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_5(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} \quad \frac{\partial f}{\partial x_4} \quad \frac{\partial f}{\partial x_5} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{0_i}} \Delta \mathbf{x}(t).$$

Zbývá již jen dosadit za \mathbf{x}_{0_i} a získáme dva stavové popisy pro dva stacionární body. Pro $\varphi_{0_1} = 0$ platí

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_0 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2l} & -\omega_0^2 & -2\delta \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (11)$$

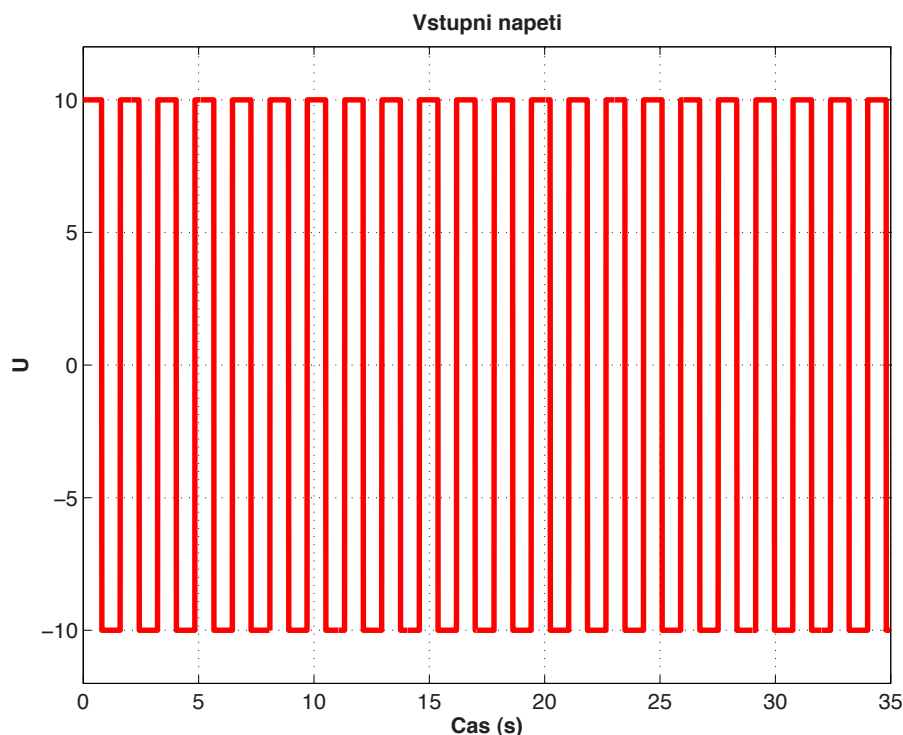
Pro $\varphi_{0_2} = \pi$ platí

$$\Delta \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_0 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2l} & \omega_0^2 & -2\delta \end{bmatrix} \Delta \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (12)$$

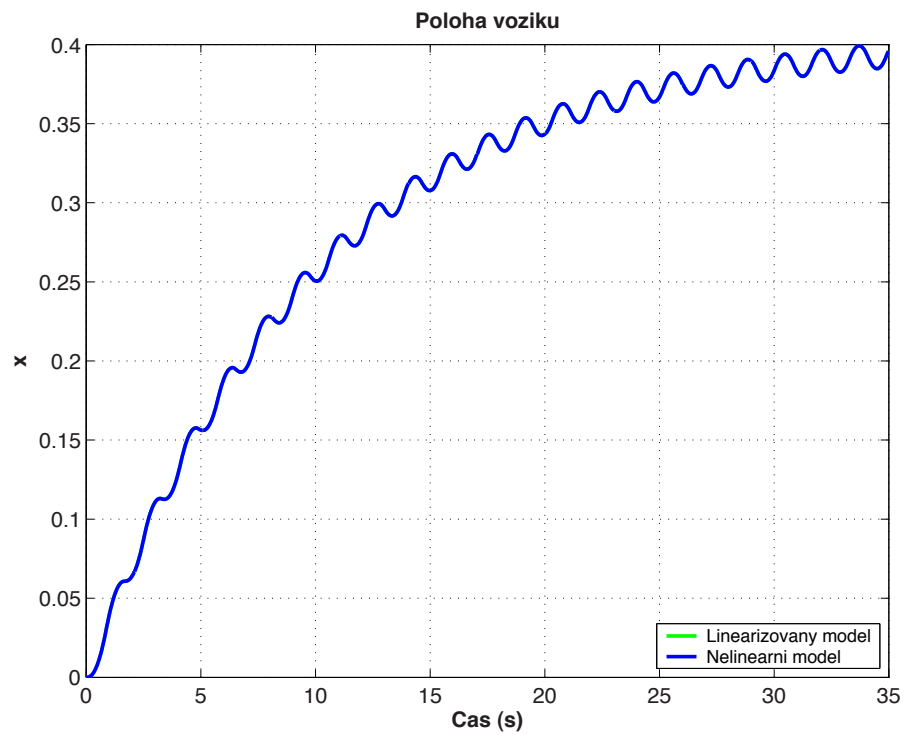
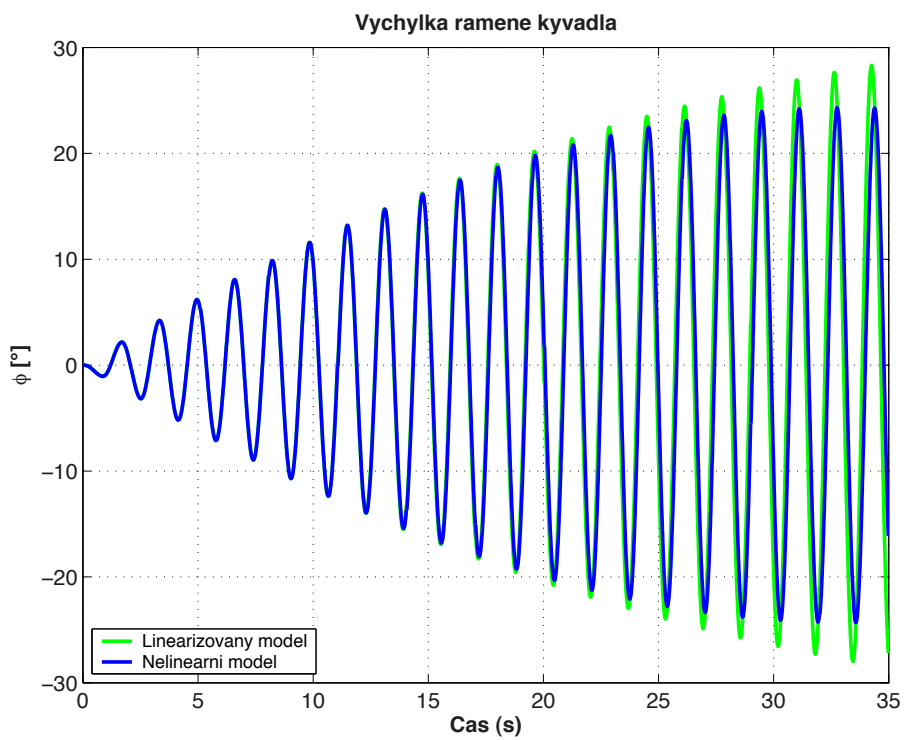
Tyto stavové rovnice jsou spolu s výstupní rovnicí (10) ve standardním tvaru (2).

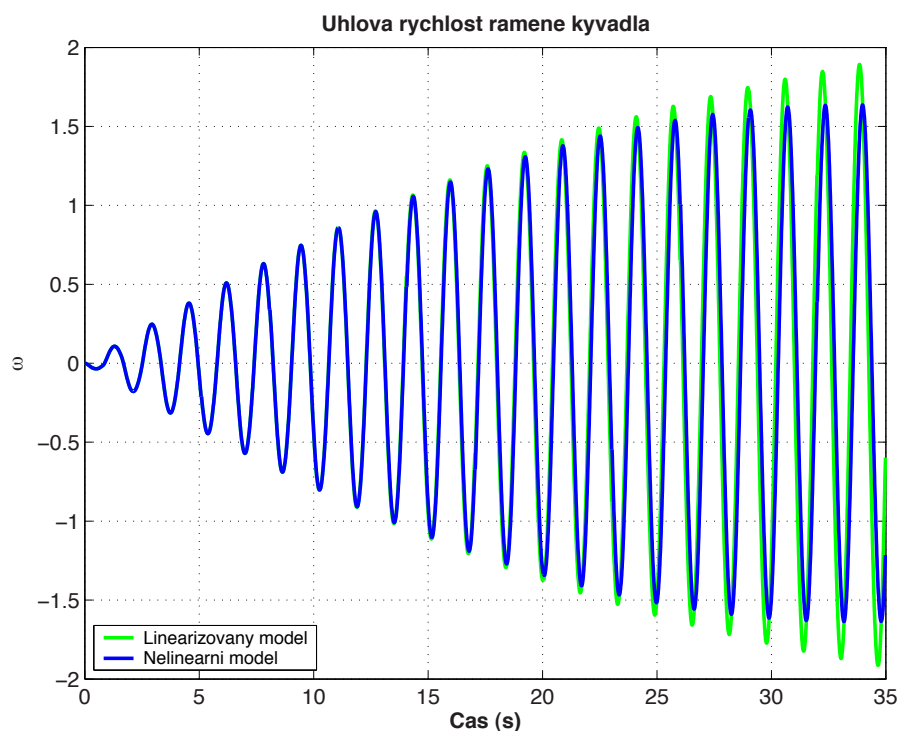
Nyní porovnáme nelineární model s linearizovaným v okolí dolní polohy ramene kyvadla. Pro simulaci byl zvolen obdélníkový signál (viz obr. 6), který postupně rozhoupává kyvadlo. Z obrázků 8 a 9 vidíme, že linearizovaný model je správný pouze v okolí pracovního bodu $\varphi_{0_1} = 0$. Pro velké výchylky je tento model nesprávný, protože jsme v Taylorovu rozvoji zanedbali kvadratické a vyšší členy. Průběh polohy vozíku na obr. 7 je samozřejmě stejný pro oba modely, protože rovnice motoru je lineární.

Porovnejte nelineární model s linearizovaným v okolí horní polohy ramene kyvadla. Zvolte vhodný průběh vstupního napětí (v horní poloze je systém nestabilní).



Obrázek 6: Vstupní napětí motoru – $u(t)$

Obrázek 7: Poloha vozíku – $x(t)$ Obrázek 8: Výchylka ramene kyvadla – $\varphi(t)$

Obrázek 9: Úhlová rychlost ramene kyvadla – $\omega(t)$

□

3 Domácí úlohy

Příklad 3.1: V elektrickém obvodu na obr. 1 (příklad 2.1) zaměňte cívku s kondenzátorem. Určete stavový popis tohoto elektrického systému a nalezněte řešení těchto rovnic pro počáteční podmínku $u_C(0) = u_0$, $i_L(0) = i_0$. Určete přenos tohoto systému za předpokladu nulových počátečních podmínek. Proveďte simulace tohoto modelu.

Příklad 3.2: Uvažujte elektrický obvod, kde je ke zdroji napětí $u(t)$ (vstup systému) připojen v sérii rezistor s elektrickým odporem R a kondenzátor s kapacitou C . Určete stavový popis tohoto elektrického systému. Nalezněte řešení tohoto modelu pro počáteční podmínku $u_C(0) = u_0$. Určete přenos tohoto systému za předpokladu nulových počátečních podmínek.

Příklad 3.3: Uvažujte elektrický obvod, kde je ke zdroji napětí $u(t)$ (vstup systému) připojen v sérii rezistor s elektrickým odporem R a cívka s indukčností L . Zvolte za stavovou proměnnou elektrický proud $i(t)$, který protéká rezistorem a určete stavový popis tohoto elektrického systému. Nalezněte řešení tohoto modelu pro počáteční podmínku $i_L(0) = i_0$. Určete přenos tohoto systému za předpokladu nulových počátečních podmínek.

Příklad 3.4: Předpokládejte zjednodušený model popisující vývoj populace dravců a obětí v nějaké uzavřené oblasti

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + 0,01 x_1(t) x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) - 0,01 x_1(t) x_2(t),\end{aligned}$$

kde x_1 je množství dravců a x_2 je množství obětí. Vykreslete fázový portrét (využijte funkci `stateportrait.m` viz [2]) tohoto nelineárního modelu. Nalezněte rovnovážné stavy tohoto modelu. Proveďte linearizaci v těchto rovnovážných stavech a rozhodněte o stabilitě. Porovnejte lineární a nelineární model.

Reference

- [1] ŠTECHA, J. a HAVLENA, V.; *Teorie dynamických systémů*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1999.
- [2] ROUBAL, J., HURÁK, Z. a HROMČÍK, M.; *Teorie dynamických systémů* [online]. Poslední revize 2006-03-01 [cit. 2006-03-01], (<http://dce.felk.cvut.cz/tds/>).