OPTIMÁLNE SYSTÉMY PODĽA KVADRATICKÉHO KRITÉRIA (patria tam MIMO systémy)

→ získame analytický výsledok pre MIMO lin. systémy s premenlivými koeficientami

Formulácia problému:

1. Uvažujme systém v tvare:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned}} \quad (1)$$

$u(t)$ je neohraničené; $y_{ref}(t)$ – vektor ref. trajektórie

2. Definujme odchýlku: $\boxed{e(t) = y_{ref}(t) - \underbrace{y(t)}_{\text{vektor výstupu}}}$ (2)

3. Funkcionál: $J(u) = \frac{1}{2}\langle \underbrace{e(T), Fe(T)}_{③} \rangle +$

$$+ \int_{t_0}^{T} [\langle \underbrace{e(t), Q(t)e(t)}_{①} \rangle + \langle \underbrace{u(t), R(t)u(t)}_{②} \rangle]\, dt \quad (3)$$

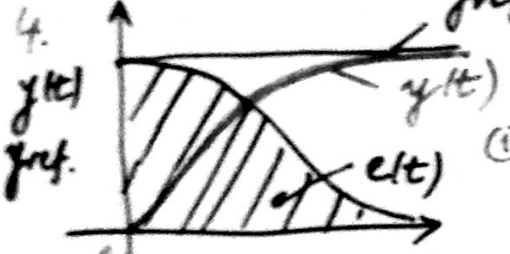
T – pevne zadaný čas; F_{zo} – pozitívne semidefinitná matica $(m \times m)$

$Q(t)$ – pozit. semidef. matica $(m \times m)$ } diagonálne

$R(t)$ – pozit. definitná matica $(r \times r)$; } matice

$\langle\rangle$ – skalárny súčin vektorov

4. Fyzikálny význam funkcionálu:



① $\boxed{L_e = \frac{1}{2}\langle e(t)\, Q\, e(t) \rangle}$ → kvadratická forma odchýlky $e(t)$ → minimalizuje sa kvadratická regulačná plocha

prvkov vektora

② $\boxed{L_u = \langle u(t), R u(t) \rangle}$ → kvadrat. forma →

L_u vyjadruje energiu riadenia vstupných veličín

③: $\boxed{\frac{1}{2}\langle e(T), Fe(T)\rangle}$ → zaručuje, že odchýlka $e(t)$ bude malá nielen v prechodovom stave, ale aj v čase T.

<u>Úloha</u>: akým spôsobom vybrať matice F, $Q(t)$, $R(t)$ → nájsť u_{opt}, ktoré minimalizuje funkcionál (3).

A. $\boxed{\text{PROBLÉM REGULÁTORA STAVU}}$

1. Uvažujme systém: $\dot{x} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$ (4)
$y = C \cdot x(t)$

2. Funkcionál: $J_1(u) = \frac{1}{2}\langle x(T), F x(T)\rangle +$
$+ \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \langle x(t), Q(t) x(t)\rangle + \langle u(t), R(t) \cdot u(t)\rangle] \, dt$ (5)

3. V porovnaní s funkcionálom J: $C \equiv E$;
$y \equiv x(t)$; $y_{ref} \equiv 0$; $e(t) = y_{ref} - y(t) = -x(t)$

4. Táto úloha má veľký praktický význam
→ SV od <u>stavových veličín</u> $\equiv$ s výstupnými veličinami

5. meradlom odchýlky je stavová veličina → 0

6. T – pevný, u – nie je obmedzené; systém (4) má byť prevedený z $x(0) = x_0$ → $x(T) \in R^n$
$(x(T) \stackrel{!}{=} 0)$.

⇓

úloha s pevným časom a voľným pravým koncom

D ⑦ Ak vypočítame také riadenie $u(t)$, že systém (4) bude STABILNÝ ⇒ u_{opt} minimalizuje $J_1(u)$; ⇒
⇒ ani odchýlka od y_{ref} a ani zložky $u(t)$ (kt. nie sú obmedzené) nemôžu byť extrémne veľké
(veľkosť závisí od prvkov matíc $Q(t)$, $R(t)$)

v našom prípade máme zadané :

$$\boxed{x(t_0) = x_0 \; ; \; p(T) = p_T}$$ 2n podmienok

8. Aplikujeme Pontrjag. princíp minima → Hamiltonián

$$\boxed{H = \underbrace{\tfrac{1}{2}\langle x, Qx\rangle + \tfrac{1}{2}\langle u, Ru\rangle}_{o} + \langle Ax, p\rangle + \langle Bu, p\rangle} \quad (5)$$

9. Kovektor $p(t)$ je riešením DR :

$$\boxed{\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)} = -Q(t)x(t) - A'_{(t)}p(t)} \quad (6)$$

Pozdĺž optimálnej trajektórie $x(t)$ musí platiť :

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial u(t)} = 0 \Rightarrow R(t)u(t) + B'(t).p(t) = 0} \quad (7)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{u(t) = -R^{-1}(t)\, B'(t)\, p(t)} \quad (8)$$

?

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = R \geq 0 \text{ pozit. def.}$$

$\Rightarrow$ H v u nadobúda MINIMUM.

10. Vzťah (8) dosadíme do rovnice systému (1)

$$\boxed{\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) - B(t).R^{-1}(t)\,B'(t).\,p(t)}$$

vzťah (8) dosadíme do združeného systému (6) :

$$\boxed{\dot{p}(t) = -Q(t).x(t) - A'(t).\,p(t)}$$

$\Rightarrow$ 2n rovníc (dajú sa riešiť analyticky) :

$$x(t_0) = x_0 \; ; \; p(T) = \frac{\partial}{\partial x(T)} \frac{1}{2}\langle x(T), F x(t)\rangle$$ okrajové podm.

$$p(T) = F x(T)$$

Pozn. Ak J_1 má iba integr. časť $\Rightarrow$ $p(T) \overset{!}{=} 0$.

11. Predpokladajme, že $\boxed{x(t) \text{ a } p(t)}$ sú viazané vzťahom: $\boxed{p(t) = K(t) \cdot x(t)}$ $t \in \langle t_0, T \rangle$ (9)

$K(t) \equiv (n/n)$;

derivovaním (9):

$$\dot{p}(t) = \dot{K}(t) \cdot x(t) + K(t) \cdot \dot{x}(t) \quad (10)$$

12. Dosadením $\boxed{p(t) = K(t) \cdot x(t)}$ do systému (1) a (10):

$$\dot{x}(t) = [A - B \cdot R^{-1} B' K] x(t)$$

$$\dot{p}(t) = \dot{K} x(t) + K \cdot \underbrace{[A - BR^{-1}B'] x(t)}_{\dot{x}(t)}$$

13.
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}(t) = [\dot{K} + K \cdot A - K \cdot B \cdot R^{-1} B' K] x(t) \quad (11a) \\ \dot{p}(t) = [-Q - A'K] x(t) \quad (11b) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

porovnaním (11a) a (11b) a s uvážením, že $x(t)$ je riešenie $\dot{x}(t) = A x(t) - B \cdot R^{-1} B' p(t)$

$$\dot{K}(t) + K(t) \cdot A(t) - \underbrace{K(t) B(t) R^{-1}(t) B' K(t)}_{S} = -Q(t) - A'(t) K(t)$$

$$\boxed{\dot{K}(t) = -K(t) A(t) - K(t) \cdot B(t) R^{-1}(t) B'(t) K(t) - Q(t) - A' K(t)} \quad (12)$$

RICCATIHO DR

$$\boxed{\dot{K} = -K \cdot A - A'K + K B R^{-1} B' K - Q}$$

14. nakoľko v predpoklade $p(t) = K(t) \cdot x(t)$

platí aj: $\boxed{p(T) = K(T) \cdot x(T)}$ (13);

ale $p(T) = F \cdot x(T) \Rightarrow \boxed{F(T) \cdot x(T) = K(T) \cdot x(T)}$

$$\Downarrow$$

(13) $\boxed{K(T) = F(T)}$ toto je okrajová podmienka pre RICCATIHO DR (12)

$p(t) = K(t)\,x(t)$, $t \in (t_0, T) \rightarrow \underbrace{p(T) = K(T)x(T)}$

$\boxed{p(T) = F.\,x(T)}$

podm. transver.

$K(T) - F = 0 \Rightarrow \boxed{K(T) = F}$ (13a)

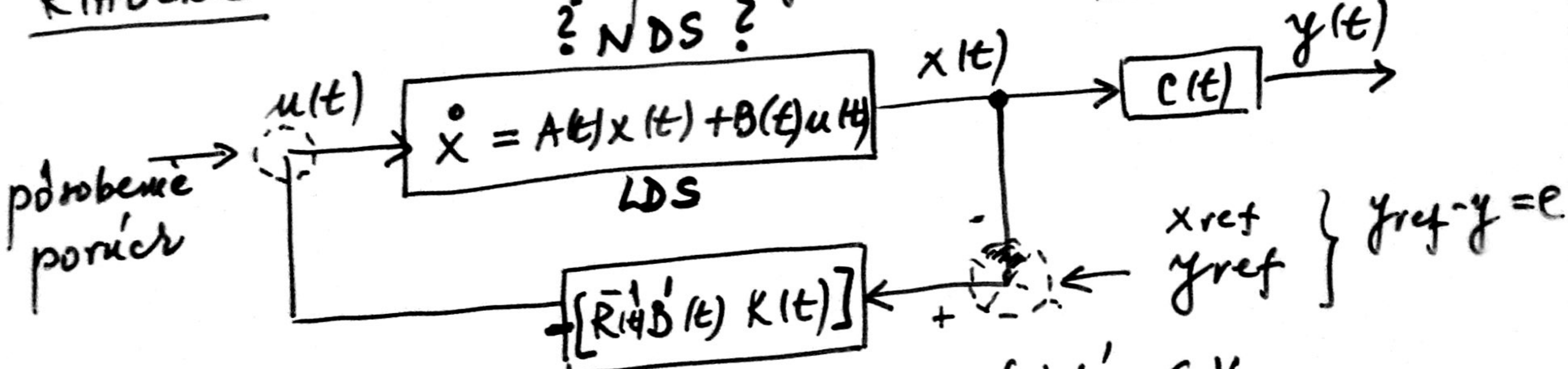
Rovnica (12) – RICCATIHO DR s okrajovou podm. (13a).
Dá sa dokázať, že $K(t)$ je symetrická matica $\boxed{K(t) = K'(t)}$.

15. OPTIMÁLNE RIADENIE : $\boxed{u(t) = -R^{-1}(t)\,B'(t).\,p(t)}$ →

→ nadobúda tvar : $\boxed{u_{opt}(t) = -R^{-1}(t).\,B'(t)K(t).\,x(t)}$ (14)

Predpoklad, že $\boxed{p(t) = K(t).x(t)}$ je správny vtedy, ak $K(t)$ je riešením maticovej DR (12) s okr. podmienkou $\boxed{K(T) = F}$ ⇒ riadenie u_{opt} nazývame SPÄTNOVÄZOBNÉ RIADENIE

! pre reg. stavu ⟺ $\boxed{x(t) \equiv y(t)}$



↓ časovo-závislá SV

Obr. spätnovazobný regulačný obvod

Záver: Pôvodný D systém môže byť (stabilný, kmitavý, nestabilný) → po regulácii s $\boxed{u^*(t) = f(x(t))}$ pre $t \to \infty$ bude odchýlka $x(t) \doteq 0$. Riadenie dovedie DS do stavu asymptotickej stability. Počet rovníc $\boxed{n(n+1)/2}$ sa symetriou matice K znižuje. RICC. DR môžeme riešiť v obrátenom čase $t = T - \tau \Rightarrow \tau = T - t$, $\boxed{dt = -d\tau}$.