PROBLÉM REGULÁTORA STAVU $\leftrightarrow$ a ČASOVO - INVARIANTNÉ SYSTÉMY

R9 - ONS - 1
Kvalita riadenia

1. Predpokladajme, že matice $\underbrace{A(t), B(t)}_{LIN.\ DS}$, $R(t), Q(t)$ sú konšt a $\boxed{F=0}$.

2. Formulácia úlohy OR $\rightarrow$ nech je daný LTI DS:

$$\boxed{\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)} \qquad (1) \quad LDS(PB)$$

a funkcionál:

$$\boxed{J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} [\langle x(t), Q\,x(t)\rangle + \langle u(t), R\,u(t)\rangle]\,dt} \qquad (2)$$

$\Downarrow$

optimálne riadenie je dané vzťahom:

$$\boxed{u(t) = -R^{-1}B'K \cdot x(t)} \qquad (3)$$

, K je konšt. matica $(n \times n)$, ktorá je

riešením nelineárnej maticovej alg. rovnice: (4) a

$$\boxed{-K \cdot A - A'K + KBR^{-1}B'K - Q = 0} \qquad (4)$$

optimálna trajektória $x(t)$ je daná riešením lineárneho homogénneho systému:

$$\boxed{\dot{x}(t) = G \cdot x(t)} \qquad (5)$$

, kde $G = \underbrace{A - BR^{-1}B'K}$.

Pozn.: $\rightarrow$ Ak uvažujeme prípad, že $\boxed{T \rightarrow \infty}$, je potrebné žiadať, aby systém (1) bol <u>riaditeľný</u> (to zaručuje <u>konečnú</u> hodnotu funkcionálu (2)).

$\rightarrow$ Ak interval $\langle t_0, T\rangle$ je $\boxed{\text{konečný}}$ $\rightarrow$ <u>riaditeľnosť</u> sa nevyžaduje, pretože na danom intervale je funkcionál (2) <u>konečný</u>.

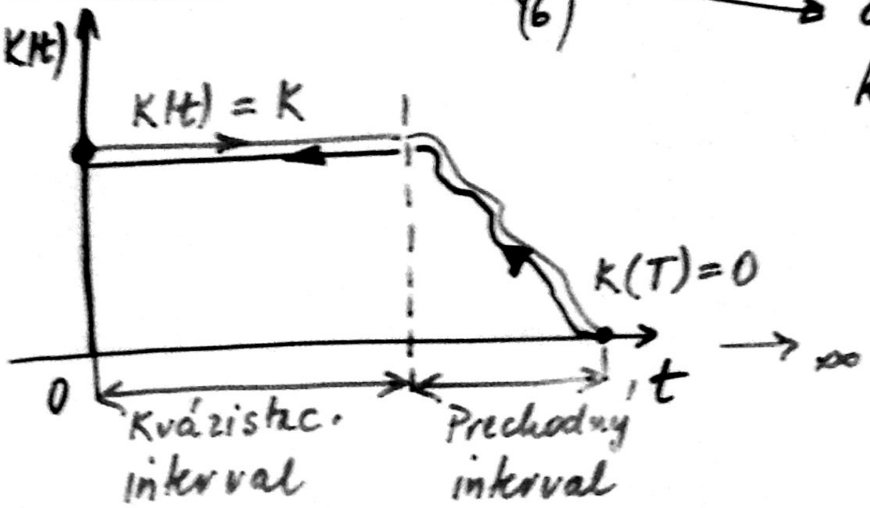
Pre $T \rightarrow \infty$ platí, že matica $F = 0$, nakoľko sa zložky vektora $x(t) \rightarrow 0$.

3. Dá sa dokázať, že matica (K) je ustálená hodnota riešenia RICC. DR:

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} K(t) = K} \quad (6)$$

; okrajová podmienka: $\boxed{K(T)=0}$

→ dostávame SV s konšt. koeficientmi



Porov. Ustálená hodnota maticovej DR (Riccatiho) je riešením algebraickej maticovej rovnice (4).

PROBLÉM REGULÁTORA VÝSTUPU: uvažujeme vtedy, ak nie všetky zložky stavu (x) sú merateľné

1. Uvažujme LTI DS s konšt. koef.:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B.u(t)$$
$$y(t) = C\,x(t) \qquad (7)$$

a funkcionál v tvare:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} \left[\langle y(t), Q\, y(t) \rangle + \langle u(t), R\, u(t) \rangle \right] dt = \quad (8)$$

$y(t) = C.x(t)$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} \left[\langle x(t), C'QC\, x(t) \rangle + \langle u(t), R\, u(t) \rangle \right] dt$$

⇓ regulácia výstupu $\xleftrightarrow{\text{prevedie}}$ regulácia STAVU a platí odvodenie z minulej prednášky 8.

2. Optimálne riadenie $\boxed{u(t) = -R^{-1}B'K\,x(t)}$ (9) !

K(t) je riešením maticovej algebraickej rovnice

$$\boxed{0 = -KA - A'K + K.BR^{-1}B'K - C'QC} \quad (10)$$

$K(t) = C'(t)FC'(t)$

Pozn. Nakoľko rozmer vektora stavu $x(t) \geq$ ako rozmer vektora $y(t) \rightarrow$ musí byť systém pozorovateľný. (Ak A, B, C, Q, R - konšt., $T=\infty$ LTI DS musí byť riaditeľný a pozorovateľný).

PROBLÉM SLEDOVANIA $\rightarrow$ uvažujme problém LQ riadenia (regulátor stavu), avšak uvažujme ladenie na $y_{ref}(t)$:

$$\boxed{e(t) = y_{ref}(t) - \underbrace{C(t) \cdot x(t)}_{y(t)}} \quad (11)$$

1. Zostavíme Hamiltonovu fciu $\rightarrow$ kanonické rovnice:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A(t) & -S(t) \\ \hline -V(t) & -A'(t) \end{array}\right] \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hline W\, y_{ref}(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

kde

$$\left.\begin{aligned} S(t) &= B(t) R^{-1} \cdot B'(t) \\ V(t) &= C'(t) Q(t) C(t) \\ W(t) &= C'(t) \cdot Q(t) \end{aligned}\right\}$$

predpokladáme PP Minima

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow \boxed{u(t) = -R^{-1}(t) B'(t) \cdot p(t)} \rightarrow \dot{x}, \dot{p}$$

2. Pre regulátor stavu sme predpokladali

$$p(t) = K(t) \cdot x(t)$$

$$\boxed{p(t) = K(t) \cdot x(t) - g(t)} \quad (13)$$

3. Po zderivovaní:

$$\dot{p}(t) = \dot{K}(t) \cdot x(t) + K \cdot \dot{x}(t) - \dot{g}(t) \quad (13a)$$

4. Podmienka transverzálnosti:

$$p(T) = \frac{\partial}{\partial x(T)} \left(\left\langle \frac{1}{2} e(T), F e(T) \right\rangle \right) = \underbrace{C'(T) F C(T)}_{(13c)} x(t) - \underbrace{C'(T) F}\, y_{ref}(t)$$

5. Optimálne riadenie je dané:

$$\boxed{u(t) = R^{-1}(t)\,B'(t)\,[\,g(t) - K(t)\,x(t)\,]} \qquad (14) \qquad \to \frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

kde $K(t)$ je riešením rovnice:

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A'(t)K(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t) - C'(t)Q(t)C(t) \qquad (15)$$

s okrajovou podmienkou: $\boxed{K(T) = C'(T)\,F\,C(T)}$

6. Vektor $g(t)$ je riešením LD vektorovej rovnice:

$$\dot{g}(t) = -[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t)]'\,g(t) - C'(t)Q(t)y_{ref}(t)$$

s okrajovou podmienkou: $\boxed{g(T) = C'(T)\,F\,y_{ref}(T)}$

7. $$u(t) = -R^{-1}(t)B'(t).p(t) = $$
$$= \underbrace{-R^{-1}(t)\,B'(t).\,K(t)}_{①}\,x(t) + \underbrace{R^{-1}(t)\,B'(t)}_{②}.\,g(t) \qquad (14a)$$

① spätnoväzobná zložka

② zložka, kt. zabezpečí, že $y(t)$ bude sledovať $y_{ref}(t)$ (počíta sa OFF-line)

($y_{ref} = 0 \Rightarrow g(t) = 0$) ② člen vypadáva

8. Optimálna trajektória sa vypočíta:

$$\dot{x}(t) = [\underbrace{A - BR^{-1}B'K}_{G}]\,x(t) + \underbrace{BR^{-1}B'}_{S}\,g(t) \qquad (16)$$

PP: $x(0) = x_0$

Reg. stavu: $y_{ref} = 0$, PP $\neq 0$

Reg. sledovania $y_{ref} \to$ daná, PP $\stackrel{!}{=} 0$

Z doposiaľ uvedeného ⇒ spätné väzby v prípade problému SLEDOVANIA (výstup $y(t)$ má sledovať známu ref. trajektóriu $y_{ref}(t)$) sú rovnaké ako pri <u>REGULÁTORE VÝSTUPU</u> ≡ matica $K(t)$ nezávisí od $y_{ref}(t)$.

<u>Pozn.</u> Pre výpočet $g(t)$ je potrebná znalosť $\boxed{y_{ref}(t)}$ na intervale (t_0, T) → vypočítame $g(t)$ na základe známeho $y_{ref}(t)$ v obrátenom čase a vypočítanej matice $K(t)$ → pre $T \to \infty$ riešime rovnako ako pri REGULÁTORE STAVU.

Ak OS je <u>LTI</u> ⇒ A, B, C, Q, R ≡ konšt. matice
⇒ matica $K(t)$ bude riešením <u>alg.</u> Ricc. rovnice:

$$\dot{x}(t) = [\underbrace{A - BR^{-1}B'K}_{G}]\,x(t) + \underbrace{BR^{-1}B'}_{S}\,g(t) \quad (17) \to \text{URO}$$

kde $g(t)$: $\dot{g}(t) = -[A - BR^{-1}B'K]'g(t) + C'Q\,y_{ref}\,,\ g(T)=0$

(18) K – vypočítané y_{ref} – známe

resp.
$$\dot{x}(t) = G\,x(t) + S\,g(t)\,; \quad S = BR^{-1}B'$$
$$G = [A - BR^{-1}B'K]$$
$$\dot{g}(t) = -G'g(t) - W\,y_{ref}\,; \quad W = C'Q$$

Ak (18) riešime v obrátenom čase, okrajová podm. $g(T)$ sa stane poč. podmienkou $g(t)$ a pre ustálenú hodnotu platí: $\boxed{g = -(G')^{-1}W\,y_{ref}}$

! Ak y_{ref} nepoznáme ⇒ $g(t)$ sa počíta ON-LINE.