

↓  
 Využite iteračných metód pre riešenie problému  
 spätnoväzobného optimálneho riadenia

- Algoritmy riadenia NDS-ROBOTOV môžeme v zásade rozdeliť na kinematické a dynamicke.
- Kinematické algoritmy → neuvažujú explicitne dynamiku robota; predpokladá sa, že generované požadované časové priebehy dráhy, rýchlosťi, zrychlenia sú exaktne sledované servomechanizmami.
- Dynamicke metódy riadenia → vychádzajú z modelu dynamiky robota a pre určenie POR akbo SOR využívajú známe metódy TAR (Model BASED Control)  
Ciel: Aplikačia algoritmov POR a SOR na riadenie NDS-robot.

### 7.1 Popis NDS-robot

- uvažujeme robot s kinematickou štruktúrou (str. 146 - obr. 5.13), ktorého model dynamiky v stavovom priestore má tvar:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{m_b}{m_r} x_1(t) \cdot x_4^2(t) + \frac{K_1}{m_r} \cdot u_1(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = -\frac{2m_b x_1(t) \cdot x_2(t) \cdot x_4(t)}{I_{23} + m_b x_4^2(t)} + \frac{K_2}{I_{23} + m_b x_4^2(t)} \cdot u_2(t)$$

} (7.1)

$$\text{kde } m_b = m_2 + m_1; \quad m_r = m_{rr} + m_b + m_{21}$$

$m_2 = 35 \text{ kg}$  - hmotnosť závažia,

$m_1 = 52 \text{ kg}$  - hmotnosť úchopovej hlavice a ramena

$m_{rr}$  - redukovaná hmotnosť elektromotora prenosov,

$m_{21}$  - hmotnosť motorov v ramene a časti ramena,

$K_1, K_2$  - konštanty akčných veličín

$$I_{23} = I_r + (m_2 + m_3 + m_4) \cdot r_0^2, \quad I_r \text{ - redukovaný moment zotváracnosti}$$

Výber stavových veličín:

$$x_1(t) = r [\text{m}] \quad ; \quad x_2(t) = \frac{dr}{dt} [\text{m.s}^{-1}]$$

$$x_3(t) = \varphi [\text{rad}] \quad ; \quad x_4(t) = \frac{d\varphi}{dt} [\text{rad.s}^{-1}]$$

$r \rightarrow$  výška ramena;  $\varphi$  - otocenie ramena ( $0, 2\pi$ )

Pozn. ( Matematický model robota - dve NDR druhého rádu  $\rightarrow$  počet rovníc  $\approx$  počet stupňov volnosťi )

## 7.2. NÁVRH ALGORITMU SLEDOVANIA OPTIMÁLNEJ TRAJEKTÓRIE POHYBU ROBOTA (OPTIMAL TRACKING PROBLEM)

FORMULÁCIA PROBLÉMU :

- úlohu OR NDS - robotas s 2 stupňami volnosťi, ktorého matematický model je vyjadrený v stave-vom priestore budeme riešiť algoritmom spätnoväzobného optimálneho riadenia (SOR), ktorý využíva teóriu OR s kvadratickým kritériom
- návrh deterministického regulačora podľa kvadratického kritériu vychádzia zo znalosti :

- optimálnej trajektorie pohybu —  $\bar{x}^*(t)$  | P7-3  
 → optimálneho časového priebehu riadiacej  
veličiny —  $\bar{u}^*(t)$ , ktoré boli vypočítané pre  
 robot algoritmom PROGRAMOVÉHO OPTIMÁLNEHO  
RIADENIA (POR) ;

### 7.3. PROGRAMOVÉ OPTIMÁLNE RIADENIE ROBOTA

Úloha → určiť optimálne riadenie  $\bar{u}^*(t)$ , ktoré dy-  
 namický systém (7.1) prevedie z počiatocného stavu  
 $\bar{x}_0$  do koncového stavu  $\bar{x}_T$ , pričom ako kritérium  
 optimálneho riadenia uvažujeme funkcionál

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T w(t) \cdot u(t) dt \quad (7.2)$$

- Ak použijeme princíp maxima, uvedenú úlohu prevedieme na dvojbodovú okrajovú úlohu :

$\dot{x}(t) = f [\bar{x}(t), \bar{p}(t)] ;$	$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$	(7.3)
$\dot{p}(t) = g [\bar{x}(t), \bar{p}(t)] ;$	$\bar{x}(T) = \bar{x}_T$	

- Riešenie tejto úlohy spočíva v nájdení vektora počiatocných podmienok korektora  $\bar{p}(t_0)$ .

Podrobnejší popis metódy (CF) a návrh algoritmu POR s využitím korekčných funkcií (Pred. 6).

$\bar{x}(0) = 0 ; \bar{x}(T) = [0.2, 0, 0.2, 0]^T$  zvolený funkcionál :  $J = \frac{1}{2} \int_0^T (u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt$

PP  
Výsledky simulácií sú graficky zadzorené  
(str. 147 - obr. 5.44) - TOAS → skriptá

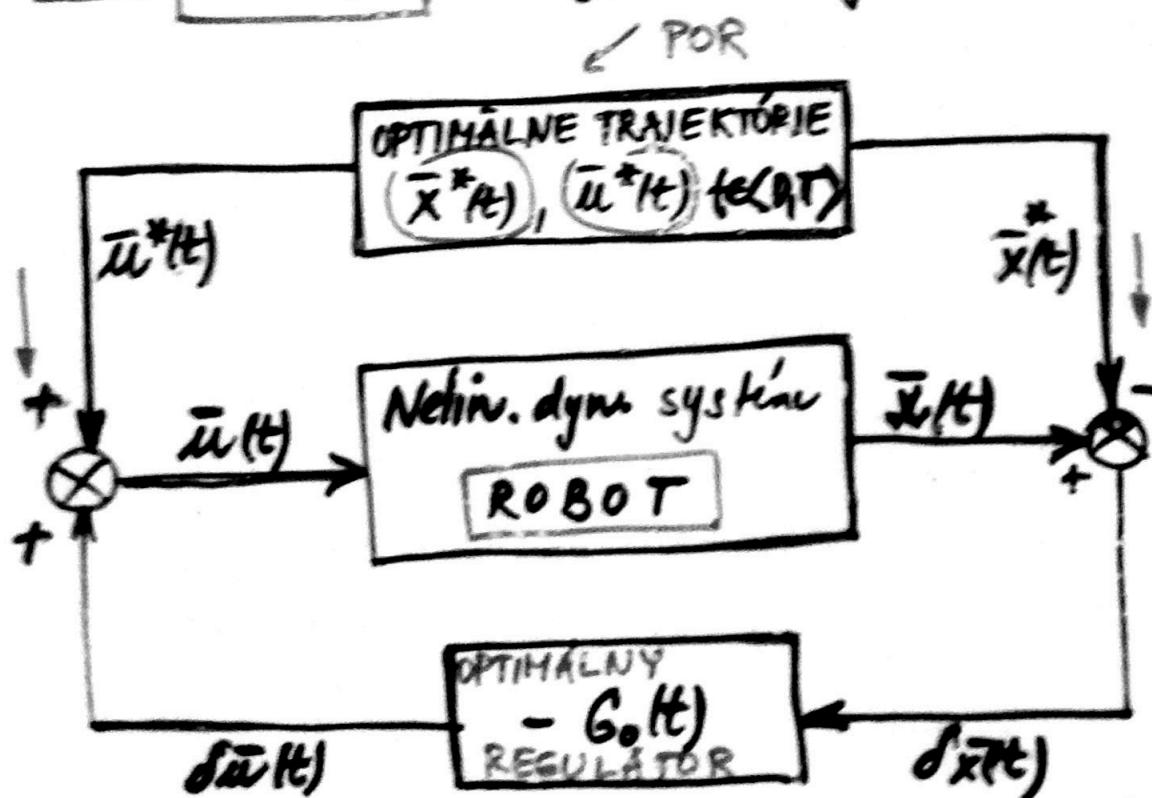
<http://cyberneticsmws.fei.tuke.sk> → Optimálne riadenie DS s využitím HWS → pozrieť stránku.

$$x_1^*(t) = k^*(t), \quad x_2^*(t) = v^*(t), \quad \dot{x}_3(t) = \psi^*(t), \quad x_4^*(t) = \omega^*(t)$$

časové príbehy programového optimálneho riadenia  
+  $\mu_1^*(t)$  a  $\mu_2^*(t)$

#### 7.4. OPTIMALNE SPÄTNOVÁZOBNÉ RIADENIE (SOR)

- pri reálnych priemyselných robotoch, kde nie je splnený predpoklad o konštantnosti parametrov (nepresnosť modelu), je nutné určiť také riadenie  $\bar{u}(t)$ , ktoré zabezpečí pohyb DS (robot)  $\bar{x}(t)$  v určitom okoli optimálnej trajektórie  $\bar{x}^*(t)$  → vypočítanie z POR



Všeobecnejšia  
štruktúra  
SOR  
cieľ riadenia  
→  
želané ~  
optimálne  
trajektórie

Z uvedeného vyplýva, že skutočný vstup – riadenie  $\bar{u}(t)$  do riadeného systému je rôzny od nominálneho vstupu  $\bar{u}^*(t)$ . Definujeme nasledovné vzťahy

① vektor odchýlky stavu  $d\bar{x}(t)$

$$d\bar{x}(t) = \bar{x}(t) - \bar{x}^*(t) \quad (7.4)$$

kde  $\bar{x}(t)$  je skutočný stav NDS

$\bar{x}^*(t)$  je požadovaný stav systému ~ optimálne trajektorie pohybu vypočítané POR

② vektor korekcie riadenia  $d\bar{u}(t)$

$$d\bar{u}(t) = \bar{u}(t) - \bar{u}^*(t) \quad (7.5)$$

$$\bar{u}(t) = d\bar{u}(t) + \bar{u}^*(t)$$

NS      RICE      POR

kde  $\bar{u}(t)$  je skutočný vektor riadenia

$\bar{u}^*(t)$  je optimálne riadenie vypočítané algoritmom POR;

## 7.5. Linearizovaný perturbacný model

- Predpokladajme, že NDS (robot) sa dá vyjadriť rektorovou stavovou NDR :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \quad (7.6)$$

kde  $\bar{x}(t)$  je skutočný vektor stavu ( $n \times 1$ )

$\bar{u}(t)$ , je skutočný vektor riadenia ( $r \times 1$ )

- Pre nominálne riadenie  $\bar{u}^*(t)$ , nominálny stav  $\bar{x}^*(t)$  platí

$$\frac{d\bar{x}^*}{dt} = \bar{f}(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t)) \quad (7.7)$$

- Ak pravú stranu (7.6) rozvinieme do TRaderu v okolí  $\bar{x}^*(t)$ ,  $\bar{u}^*(t)$  dostaneme : P7.6

$$\begin{aligned}\bar{f}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) &= \bar{f}(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t)) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \delta \bar{x}(t) + \\ &+ \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \delta \bar{u}(t) + \underbrace{E_0(\delta \bar{x}(t), \delta \bar{u}(t))}_{(7.8)}\end{aligned}$$

kde  $E_0(\delta \bar{x}(t), \delta \bar{u}(t)) \rightarrow$  označuje výšie členy TRaderu

- Ak (7.8) vyjadríme v maticovom tvare, pričom zanedbáme člen  $E_0$  dostívame LINEARIZOVANÝ MODEL:

$$\dot{\delta \bar{x}}(t) = A_0(t) \delta \bar{x}(t) + B_0(t) \delta \bar{u}(t) \quad (7.9)$$

kde  $A_0(t) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \Big|_{\substack{\bar{x}^*(t) \\ \bar{u}^*(t)}}$  je časovo-premenná matica ( $n \times n$ ), ktorú

získame z prvkov Jacobianu matice  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}$  pôzdrov rypočítaných časových funkcií  $\bar{x}^*(t)$ ,  $\bar{u}^*(t)$ .

$B_0(t) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \Big|_{\substack{\bar{x}^*(t) \\ \bar{u}^*(t)}}$  je časovo-premenná matica matice typu  $(n \times m)$ , ktorú získame pomocou prvkov Jacobianu matice  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}}$  pôzdrov známych funkcií  $\bar{x}^*(t)$ ,  $\bar{u}^*(t)$ .

Pozn. Rovnica (7.9) predstavuje približný model  
7.6. Návrhu deterministického regulátora podľa kvadra tického kritéria

Pri riešení vydeme z približného linearizovaného perturbačného modelu (7.9) na  $\langle 0, T \rangle$ .

Úloha: nájsť taký vektor odchýlky riadenia  $\tilde{u}(t)$  (7.7)  
 na  $\langle 0, T \rangle$ , ktorý minimalizuje kvadratický funkcionál

$$J_{LQ} = \underbrace{\tilde{x}(T)^T F_0 \tilde{x}(T)}_{\text{terminálny člen}} + \int_0^T (\tilde{x}(t)^T Q_0(t) \tilde{x}(t) + \tilde{u}(t)^T R_0(t) \tilde{u}(t)) dt \quad (7.10)$$

$$\left. \begin{array}{l} F_0(t) \geq 0, (mxn), \quad Q_0(t) = Q_0^T(t) \geq 0, (nxn) \\ R_0(t) > 0, (m \times m) \end{array} \right\} (7.11)$$

- navrhovaný regulátor v späťnej väzbe viaže veličiny: vektor odchýlky stavu  $\tilde{x}(t)$ , vektor korekcie riadenia  $\tilde{u}(t)$  lineárnočasovo-premenou spätnou väzbu

$$\boxed{\tilde{u}(t) = -G_0(t) \tilde{x}(t)} \quad (7.12)$$

kde  $G_0(t)$  je časovo-premenou matice riadenia,  $(m, n)$

- pre matice riadenia  $G_0(t)$  platí:

$$\boxed{G_0(t) = R_0^{-1} B_0^T(t) K_0(t)} \quad (7.13)$$

kde  $K_0(t)$  je symetrická matice  $(nxn)$ , ktorá je riešením Riccatiho maticovej DR:

$$\left. \begin{aligned} \dot{K}_0(t) = & -K_0(t) A_0(t) - A_0^T(t) K_0(t) - Q_0(t) + \\ & + K_0(t) B_0(t) \bar{R}_0^{-1}(t) B_0^T(t) K_0(t) \end{aligned} \right\} (7.14)$$

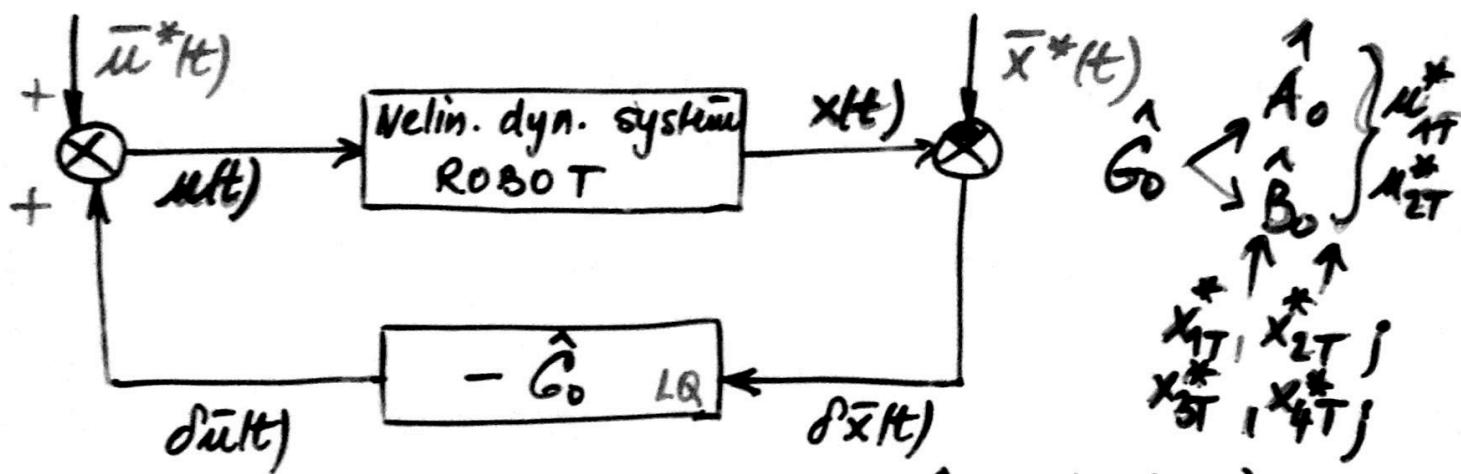
s okrajovou podmienkou  $K_0(T) = F_0$

OFF-LINE

- SOR sa dá riešiť dvooma spôsobmi : p7-8
- ČASOVО - VARIANTNÝ PRÍPAD ~ matica  $G(t)$  je časovo - premenná
  - ČASOVО - INVARIANTNÝ PRÍPAD ~ matica  $G(t)$  je  $\hat{G}_0$  - → konšt.

Štruktúra spätných väzieb pre prípad a) → obr. 7.1.

b) → obr. 7.2



obr. 7.2. Štruktúra SOR (matica  $\hat{G}_0$  ~ konšt.)

Zo schém na obr. 7.1 a 7.2 ⇒ , že optimálne trajektorie  $(\bar{x}^*(t))$ , optimálne riadenie  $(\bar{u}^*(t))$ , matica riadenia  $(G(t))$  môžu byť vypočítané OFF-LINE a uložené v pamäti počítača

7.7. Algoritmus pre riešenie úlohy sledovania optimálnych trajektorií pohybu NDS s využitím principu LINEAR QUADRATIC

V tejto časti uvedieme postup pre riešenie úlohy SOR (obr. 7.1, obr. 7.2) → algoritmus výpočtu deterministického regulátora pre časovo - variantný a časovo - invariantný prípad na zvolenom NDS - robot.

## I MODELOVANIE

- 1) Vytvorenie matematickeho modelu robota

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t), \text{ rovnica (7.1)}$$

- 2) Riešenie úlohy POR, kt. výsledkom je získanie opt. trajektorií  $\bar{x}^*(t)$  a opt. riadenia  $\bar{u}^*(t)$  na intervale  $(0, T)$  s kritériom min. spotreby energie

- 3) Vyber rákových matic  $Q_0, R_0$  v kvadratickom kri-teriu.

## II VÝPOČTY OFF-LINE

- 4) Z rovnic vytvorených v kroku 1. a optimálnych trajektorií  $\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t)$  vypočítame matice  
 $\rightarrow A(t), B(t)$  — pre časovo-var. prípad,  
 $\rightarrow \hat{A}_0, \hat{B}_0$  — pre časovo-invar. prípad

- 5) Matice  $A(t), B(t), R_0, Q_0$  predstavujú koefi-cienty Riccatiho DR  $\rightarrow$  numericky riešime na  $(0, T)$  aby sme získali matice  $K(t) \rightarrow G(t), \hat{R}_0, \hat{G}_0$ .

## III VÝPOČTY ON-LINE

6. simulácia riadiacej štruktúry na obr. 7.1 a obr. 7.2 a výpočet regulačnej odchýlky:

$$\delta \bar{x}(t) = \bar{x}(t) - \bar{x}^*(t)$$

OFF-LINE  
↓

7. výpočet korekcie riadenia:

$$a) \delta \bar{u}(t) = -G_0(t) \cdot \delta \bar{x}(t); \quad b) \delta \bar{u}(t) = -\hat{G}_0 \cdot \delta \bar{x}(t)$$

8. výpočet skutočného riadenia  $\bar{u}(t)$ 

$$\bar{u}(t) = \bar{u}^*(t) + d\bar{u}(t)$$

pričom  $\bar{u}^*(t)$  bolo vypočítané algoritmom PDR  
v kroku 2.

Pre konkrétnu simuláciu :

- matice  $R_0, Q_0$  boli zvolené ako diagonálne

$$q_{ii} = 1, i = 1, \dots, 4$$

$$r_{ii} = 0,05 : 0,1 \text{ pre } i = 1, 2$$

- Výpočet matic  $A_0(t)$ ,  $B_0(t)$

$$A_0(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{41} & A_{42} & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}^*(t) \\ \bar{u}^*(t) \end{bmatrix}$$

$$B_0(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}^*(t) \\ \bar{u}^*(t) \end{bmatrix}$$

Záver : Kroky 6. a 7. predstavujú simuláciu sledovania žiadanej - optimálnej trajektórii pohybu robota.