Počítače a algoritimizácia

Výpočet hodnôt funkcií definovaných rozvojom do radu

Prednášajúci:
doc. Ing. Anna Jadlovská, PhD.
doc. Ing. Ján Jadlovský, CSc.

Výpočet hodnôt funkcií definovaných rozvojom do radu

Ide o celú radu funkcií (mocninové, exponenciálne, logaritmické, trigonometrické), ktoré sú definované ako súčet prvkov konvergentných radov, získaných Taylorovým rozvojom, to znamená, že každý nasledujúci člen tohto rozvoja je v absolútnej hodnote menší než člen predchádzajúci.

Do súčtu budeme uvažovať toľko členov, aby prírastok posledného člena už nemal na hodnotu súčtu významný vplyv, t. j. aby jeho hodnota bola menšia ako požadovaná presnosť riešenia.

Výpočet hodnôt funkcií definovaných rozvojom do radu

Vo všeobecnosti platí:

$\boxed{f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i}$, n je dané podmienkou $|a| \leq E$

Pre výpočet jednotlivých prvkov radu budeme používať rekurentný vzťah:

$$\boxed{a_i = \varphi(a_{i-1})}$$

Výpočet funkcie e^x

Príklad 1 - Funkcia e^x

Výpočet funkcie časti postupného radu pre e^x.

Rozvoj do radu funkcie e^x:

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}}$$

x, n - dané čísla

$$a_i = \frac{x^i}{i!} \quad \rightarrow \quad a_i = a_{i-1} \cdot \frac{x^i}{i!} \qquad a_0 = 1$$

i-ty člen radu   rekur. vzorec   prvý člen

Vzorec sa dá optimalizovať použitím rekur. vzorca:

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{x^i \cdot (i-1)!}{x^{i-1} \cdot i!} = \frac{x}{i} \rightarrow a_i = a_{i-1} \cdot \frac{x}{i}$$

Vývojový diagram na nasledujúcej strane >>>

Výpočet funkcie e^x

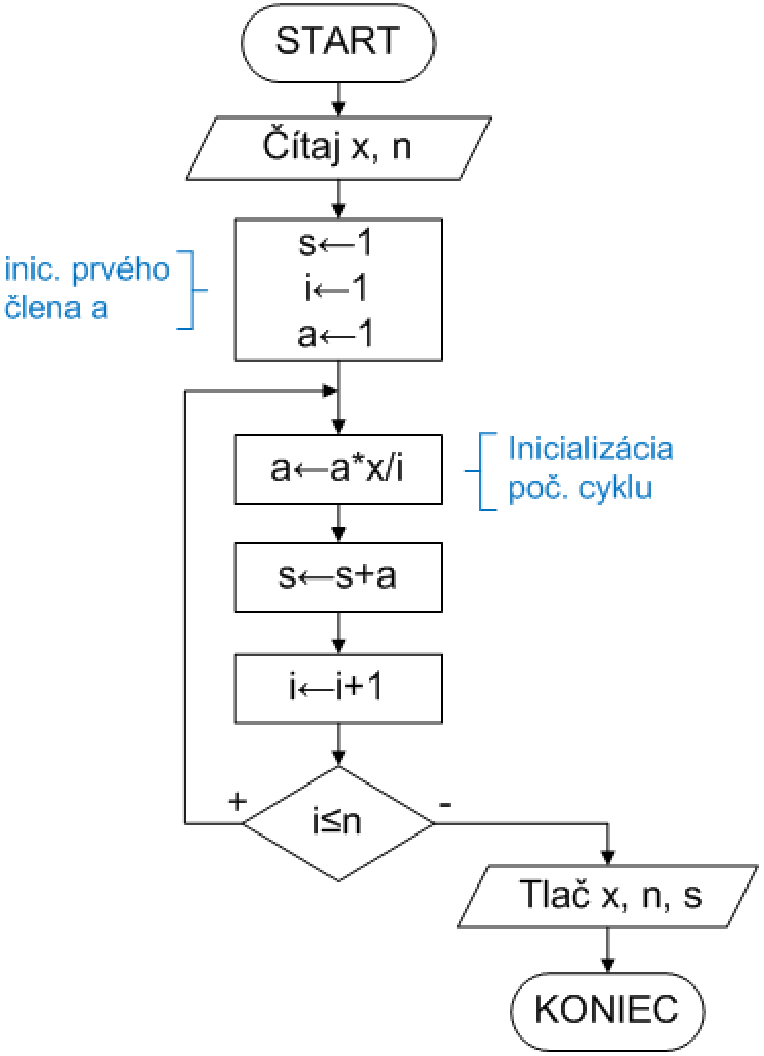
Príklad 1 - Funkcia e^x

Vstupy: x - mocnina

n - počet členov radu

a - člen radu

Výstup: s - výsledok e^x



Výpočet hodnoty e

Príklad 2 - Výpočet hodnoty e

Navrhnite algoritmus pre výpočet hodnoty e s využitím rekurentného vzťahu, s dodržaním danej presnosti E.

Pre výpočet hodnoty e platí:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

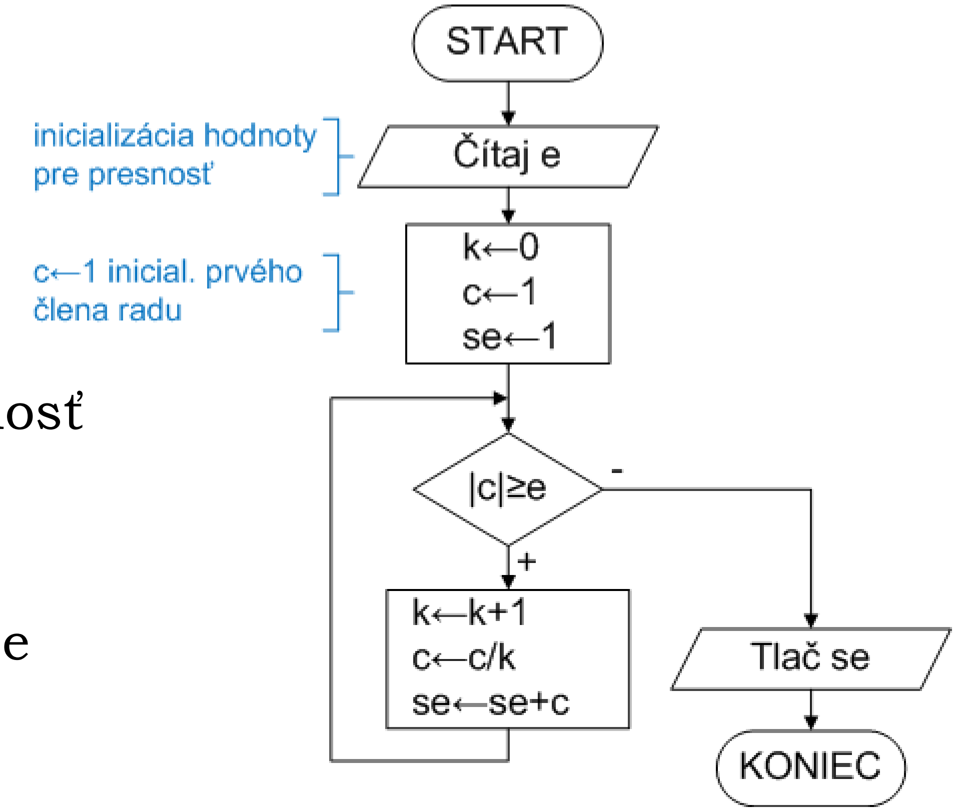
Hodnotu ľubovoľného prvku tohto radu môžeme vypočítať podľa rekurentného vzťahu:

$$c_k = c_{k-1} \cdot \frac{1}{k} \quad , \text{ ak } c_0 = 1$$

Vývojový diagram na nasledujúcej strane >>>

Výpočet hodnoty e

Príklad 2 - Algoritmus pre výpočet hodnoty e



Vstupy: e - požadovaná presnosť

k - počítadlo cyklu

c - člen radu

Výstup: se - hodnota funkcie e

Výpočet hodnoty ln(2)

Príklad 3 - Výpočet hodnoty ln(2)

pre výpočet hodnoty ln(2) platí:

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$$

a hodnotu ľubovoľného prvku radu → pomocou rek. vzťahu:

$$a_k = -a_{k-1} \frac{k-1}{k} \quad , \; a_1 = 1$$

Vstup: e - presnosť

k - počítadlo cyklu

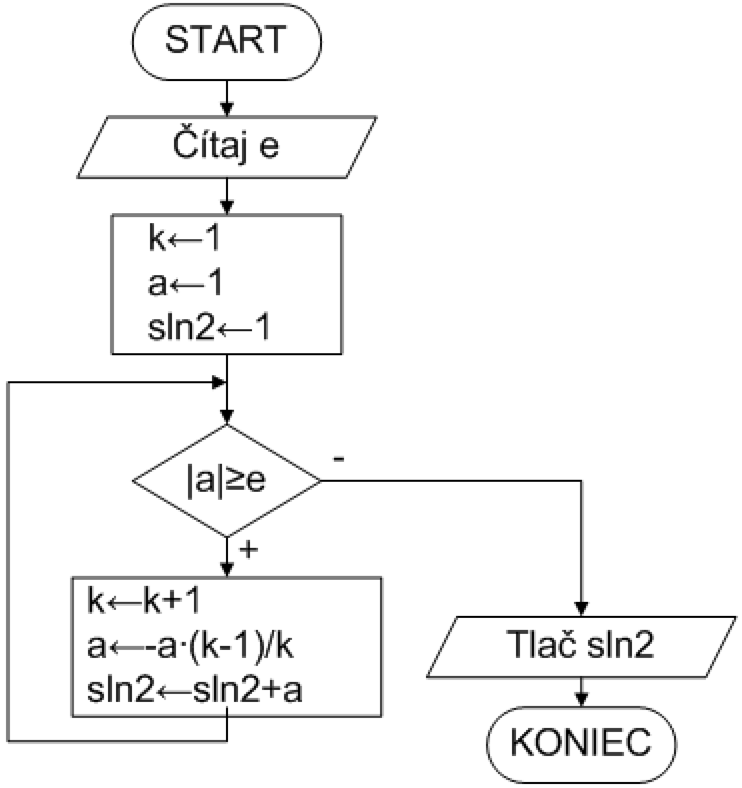
a - člen radu v rekurentnom vzorci

Výstup: sln2 - výsledok, hodnoty ln2

Vývojový diagram na nasledujúcej strane >>>

Výpočet hodnoty ln2

Príklad 3 - Algoritmus pre výpočet hodnoty ln2



Výpočet hodnoty ln(x)

Príklad 4 - Výpočet hodnoty ln(x)

pre výpočet hodnoty ln(x) platí:

$$\ln(x) = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}$$

a hodnotu ľubovoľného prvku radu → pomocou rek. vzťahu:

$$a_k = -a_{k-1} \frac{k-1}{k} (x-1), \; a_1 = 1$$

Vstup: x - číslo, pre ktoré ln treba vypočítať

e - požadovaná presnosť

k - počítadlo cyklu

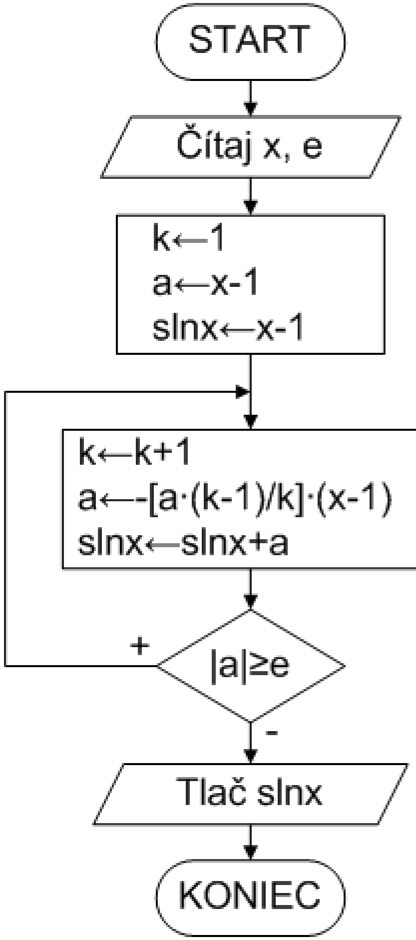
a - člen radu v rekurentnom vzorci

Výstup: slnx - prem., kde je uložený súčet radu pre fciu ln(x)

Vývojový diagram na nasledujúcej strane >>>

Výpočet hodnoty lnx

Príklad 4 - Algoritmus pre výpočet hodnoty lnx



Výpočet hodnoty funkcie sin(x)

Príklad 5 - Výpočet hodnoty sin(x)

Navrhnite algoritmus pre výpočet hodnoty goniometrickej funkcie sin(x). Pre výpočet tejto funkcie platí nasledujúci vzťah:

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$b_k = -b_{k-1} \frac{x^2}{2k(2k+1)} \quad , \; b_0 = x$$

Vstup: x, e - presnosť

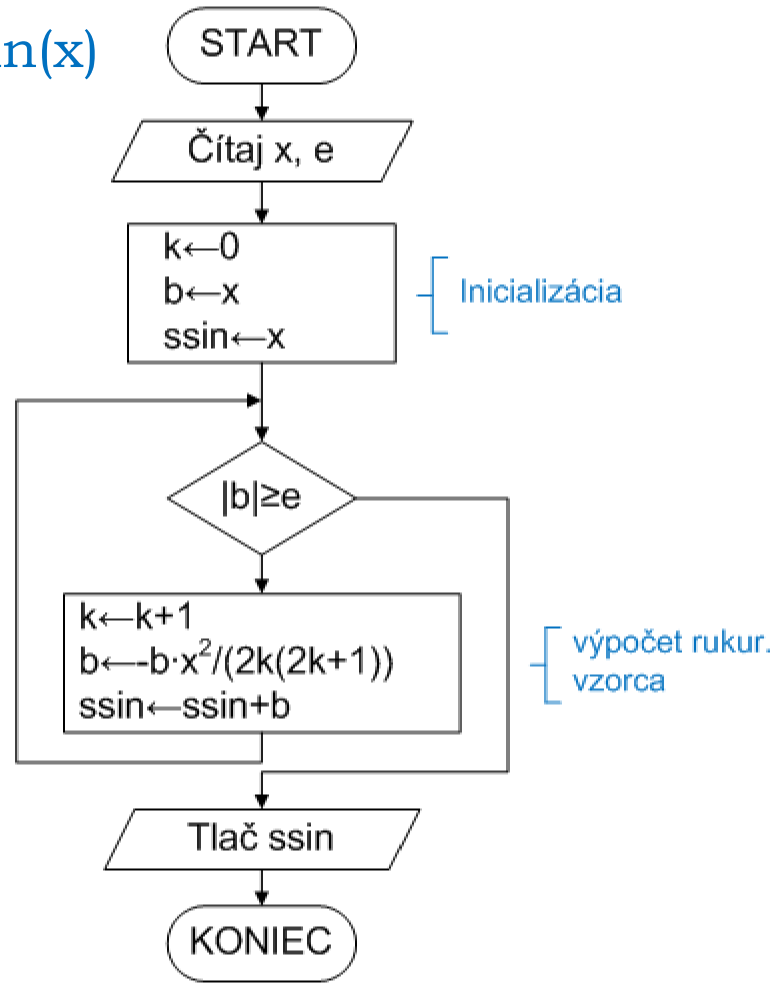
k - pomocná premenná, b - člen radu

Výstup: ssin - výsledok súčtu radu

Vývojový diagram na nasledujúcej strane >>>

Výpočet hodnoty funkcie sin(x)

Príklad 5 - Výpočet hodnoty sin(x)



Výpočet hodnoty funkcie cos(x)

Príklad 6 - Výpočet hodnoty cos(x)

Navrhnite algoritmus pre výpočet hodnoty goniometrickej funkcie cos(x). Pre výpočet tejto funkcie platí nasledujúci vzťah:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!}$$

$$b_k = -b_{k-1} \frac{x^2}{2k(2k-1)} \quad , \; b_0 = x$$

Vstup: x - argument goniometrickej funkcie

e - požadovaná presnosť

k - pomocná premenná

b - člen radu - vždy akt. hodnota podľa rekur. vzorca

Výstup: scos - súčet radu

Vývojový diagram na nasledujúcej strane >>>

Výpočet hodnoty funkcie cos(x)

Príklad 6 - Algoritmus pre výpočet hodnoty cos(x)