

Návrh a simulácia riadenia virtuálneho modelu fyzikálneho systému Gulička na tyči

Martin BENETIN, Anna JADLOVSKÁ

Katedra kybernetiky a umelej inteligencie, FEI TU v Košiciach, Slovenská republika

martin.benetin@tuke.sk, anna.jadlovska@tuke.sk

Abstrakt—Vo výuke predmetov teórie riadenia je reálny fyzikálny model podstatný pre praktické overenie teoretických poznatkov nadobudnutých štúdiom. Nakoľko Laboratórium znalostných technológií na KKUI nedisponuje reálnym modelom *Gulička na tyči* ale reálnym modelom *Gulička na ploche*, rozhodli sme sa vytvoriť virtuálny simulačný model, ktorý bude slúžiť na overovanie algoritmov modelovania a riadenia nelineárnych dynamických systémov. Poznatky získané pri práci s modelom *Gulička na tyči* predpokladajú vyššiu úspešnosť pri návrhu vhodného algoritmu riadenia pre zložitejší systém *Gulička na ploche*.

Kľúčové slová—Gulička na tyči, analytická identifikácia, návrh riadenia, simulácia riadenia, virtuálny model,

I. ÚVOD

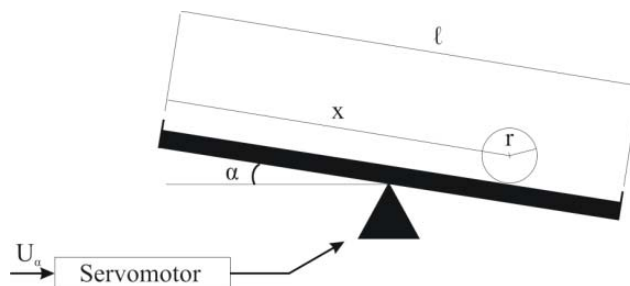
Nelineárny dynamický systém *Gulička na tyči* (Ball & Beam) sa využíva prevažne vo výuke za účelom praktického overenia nadobudnutých poznatkov z oblasti modelovania a riadenia nelineárnych dynamických SISO systémov. Pre tento fyzikálny model je typická nestabilita v otvorenej slučke a možnosť aplikácie viacerých metód návrhu riadenia. S podobnými problémami pri riadení sa môžeme stretnúť napr. pri štarte rakety (popr. raketoplánu), kde je potrebné aktívne riadenie na zabezpečenie stability pred prevrátením alebo pri stabilizovaní a optimalizovaní správania lietadla pri dizajnovaní.

V ďalšej časti článku si rozoberieme matematicko – fyzikálny popis daného nelineárneho systému a získanie jeho lineárneho modelu. V tretej časti článku špecifikujeme metódy syntézy riadenia a v štvrtej časti predložíme výsledky simulácií riadenia virtuálneho simulačného modelu fyzikálneho systému *Gulička na tyči*.

II. MATEMATICKO–FYZIKÁLNY POPIS

Po dekompozícii reálneho modelu *Gulička na ploche* (neuvažujeme vzájomné interakcie) vzniknú dva SISO systémy *Gulička na tyči*. Parametre simulačného nelineárneho modelu *Gulička na tyči* sme prevzali z manuálu Ball & Plate [1].

Nelineárny dynamický systém *Gulička na tyči* znázornený na Obr. 1 sa skladá zo subsystému *Servomotor* a subsystému *Gulička na tyči*,



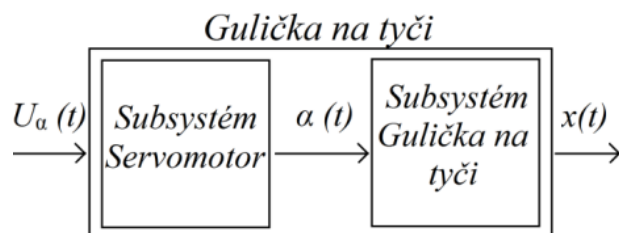
Obr. 1 Nelineárny dynamický systém *Gulička na tyči*

Popis fyzikálnych veličín a parametrov modelu *Gulička na tyči* je:

- $U_a(t)$ – vstupné napätie privádzané do servomotora,
- $\alpha(t)$ – uhol natočenia tyče,
- $x(t)$ – poloha guličky na tyči,

- l – dĺžka tyče,
- m – hmotnosť guličky,
- r – polomer guličky.

Nelineárny dynamický systém *Gulička na tyči* môžeme dekompozíciou rozdeliť na subsystém *Servomotor* a subsystém *Gulička na tyči*, ktoré sú znázornené na Obr. 2.



Obr. 2 Schéma subsystémov

A. Subsystém *Gulička na tyči*

Na analytickú identifikáciu subsystému *Gulička na tyči* sme si zvolili postup založený na báze fyzikálnych zákonov, ktoré platia všeobecne pre všetky mechanické systémy.

Na odvodenie matematického modelu subsystému *Gulička na tyči* sme použili Lagrangeove rovnice druhého druhu [2], ktorých základný tvar je

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Subsystém *Gulička na tyči* má jeden stupeň voľnosti (pohyb guličky na tyči), čo znamená, že subsystém má jednu nezávislú zovšeobecnenú súradnicu $q_i = x$.

Ak pre zjednodušenie modelu neuvažujeme zovšeobecnenú silu Q_i , potom rovnica (1) má tvar

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

kde L je Lagrangeova funkcia predstavujúca rozdiel celkovej kinetickej a potenciálnej energie (tzv. kinetický potenciál),

$$L = E_k - E_p \quad (3)$$

Celkovú kinetickú energiu E_k tvorí kinetická energia rotačného pohybu s momentom zotrvačnosti J a uhlovou rýchlosťou ω okolo osi prechádzajúcej stredom guličky a kinetickej energie posuvného pohybu guličky hmotnosti m a rýchlosťou v v tvare

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

Po substitúcii za $\omega = v/r$ a po úprave dostaneme

$$E_k = \frac{1}{2} \left(m + \frac{J}{r^2} \right) v^2$$

Celková potenciálna energia subsystému je daná vzťahom

$$E_p = m g x \sin \alpha$$

Po úvahe, že rýchlosť je rovná prvej derivácii polohy $v = \dot{x}$, po dosadení E_k a E_p do rovnice (3) a po úprave dostaneme kinetický potenciál v tvare

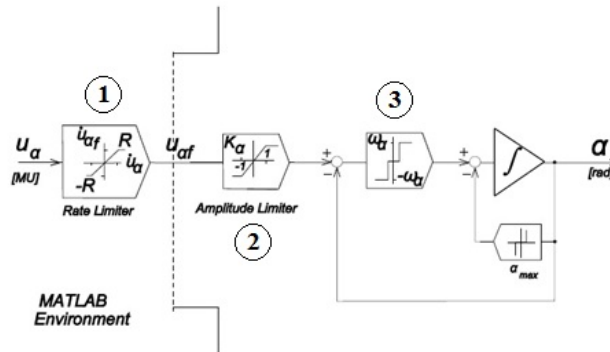
$$L = \frac{1}{2} \left(m + \frac{J}{r^2} \right) \dot{x}^2 - m g x \sin \alpha \quad (4)$$

Dosadením rovnice (4) do rovnice (2) a následnou úpravou dostaneme výslednú nelineárnu pohybovú rovnicu subsystému *Gulička na tyči* v tvare

$$\left(m + \frac{J}{r^2} \right) \ddot{x} - m g \sin \alpha = 0 \quad (5)$$

B. Subsystem Servomotor

Subsystem *Gulička na tyči* je poháňaný krokovým servomotorom, ktorého parametre sme prevzali z manuálu reálneho laboratórneho modelu Ball & Plate. Bloková schéma jeho nelineárnej dynamiky je znázornená na Obr. 3.



Obr. 3 Bloková schéma nelineárnej dynamiky servomotora

Dynamika krokového servomotora obsahuje tieto statické nelinearity:

1. obmedzenie (tzv. *rate limiter*), ktoré obmedzuje rýchlosť servomotora zmenou vstupného napätia [MU],
2. vstupný filter (tzv. *amplitude limiter*), ktorý zabezpečuje maximálne možné natočenie tyče [MU],
3. trojpolohové relé, ktoré zabezpečuje konštantnú rýchlosť krokovania servomotora [MU].

Samotný servomotor neobsahuje obmedzenie (*rate limiter*), ale aby sme zabezpečili neprekročenie nominálnej rýchlosti krokového servomotora, je potrebné ho implementovať do virtuálneho simulačného modelu *Gulička na tyči*.

Vstupný filter (*amplitude limiter*), ináč nazývaný aj „nasýtenie“ nastavuje obmedzenie vstupného napätia u_α do intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, čo zabezpečí aby po prenasobení statickým ziskom uhol nepresiahol hodnotu väčšiu ako je hraničná hodnota reálneho krokového servomotora.

Keďže krokový servomotor má konštantnú rýchlosť krokovania, trojpolohové relé na základe citlivosti modeluje jeho posúvanie smerom nahor, popri prípade nadol.

C. Lineárny model fyzikálneho systému Gulička na tyči

Obmedzenie subsystému *Servomotor* pre maximálne možné nakláňanie tyče nám umožňne na linearizáciu rovnice (5) využiť fakt, že pre veľmi malé uhly platí $\sin \alpha \approx \alpha$. Zlinearizovaná pohybová rovnica tak nadobudne tvar

$$\ddot{\alpha}(t) = k\alpha(t) \tag{6}$$

Po Laplaceovej transformácii rovnice (9) dostávame obrazový prenos subsystému *Gulička na tyči* v tvare

$$F_s(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s^2} \tag{7}$$

Lineárnu aproximáciu subsystému *Servomotor* sme získali metódou postupnej integrácie [1] aplikovanou na simulačný nelineárny model. Po identifikácii sme dostali lineárnu aproximáciu v tvare

$$F_{s1}(s) = \frac{K_1}{T_1 s + 1} \tag{8}$$

Lineárna aproximácia subsystému *Servomotor* má tvar

$$F_{s2}(s) = \frac{K_2}{T_2 s + 1} \tag{9}$$

Reálny model *Gulička na ploche* na zistenie polohy guličky využíva statický snímač zo zosilnením K_x , ktorý sme uvažovali pri zostavení simulačného a virtuálneho modelu *Gulička na tyči*. Sériovým zapojením K_x , obrazového prenosu subsystému *Gulička na tyči* (5)

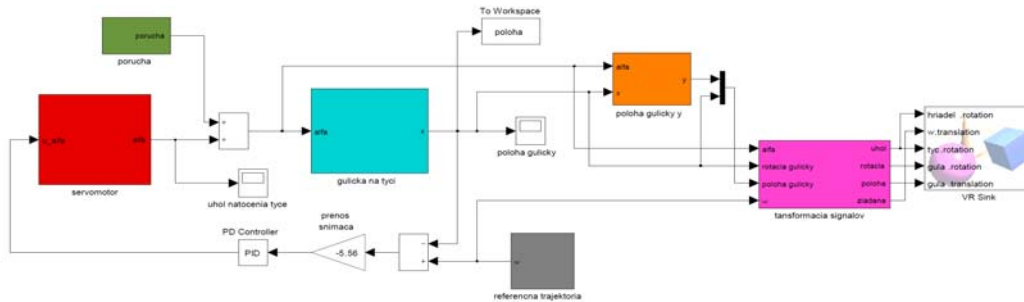
a lineárnej aproximácie subsystému *Servomotor* (8) alebo (9) dostaneme výsledný obrazový prenos lineárneho modelu *Gulička na tyči*

$$F_{mpf}(s) = K_x F_{sl}(s) F_g(s) = \frac{K_{mpf}}{s^2 (T_{mpf}s + 1)} \quad (10)$$

$$F_{man}(s) = K_x F_{sl}(s) F_g(s) = \frac{K_{man}}{s^2 (T_{man}s + 1)} \quad (11)$$

III. SYNTÉZA RIADENIA

Vo fyzikálnom modeli *Gulička na tyči* za regulovanú veličinu považujeme uhol naklonenia tyče $\alpha(t)$. Zmena uhla naklonenia tyče α je realizovaná jedнокrokovým servomotorom t.j., akčný zásah predstavuje napätie $U_a(t)$ privádzané do subsystému *Servomotor*. Nakoľko nelineárny model *Gulička na tyči* vo svojej podstate obsahuje integračnú zložku, zvolili sme si PD regulátor v spätnoväzobnej riadiacej štruktúre. Na tvorbu virtuálneho modelu fyzikálneho systému *Gulička na tyči* sme použili grafický VRML editor V-Realm Builder 2.0, ktorý je vstavanou súčasťou programového prostredia Matlab/Simulink. Za pomoci funkcií Virtual Reality Toolbox – u sme vytvorený virtuálny model implementovali do simulačnej schémy uzavretého riadiaceho obvodu v programovom prostredí Matlab/Simulink, ktorá je znázornená na Obr. 4.



Obr. 4 Simulačná schéma uzavretého riadiaceho obvodu s implementovaným virtuálnym modelom

Pre návrh PD regulátorov sme využili metódu štandardných tvarov podľa Graham – Lathropa a podľa Butterwortha ako aj formuláciu úlohy o úplnej syntéze [3]. Pri syntéze regulátorov sme mali vopred stanovené ciele riadenia:

- kompenzovať vplyvy porúch,
- sledovať referenčnú trajektóriu – t.j., riadenie na ustálenú hodnotu, ktorá sa v čase mení.

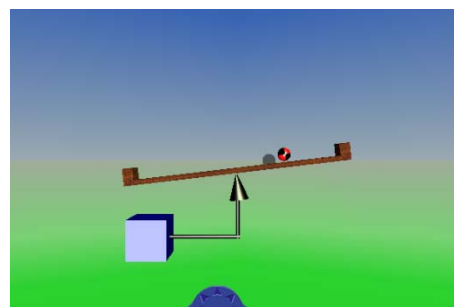
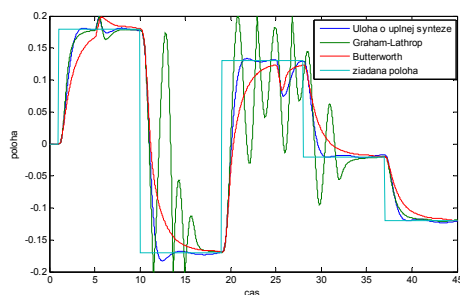
IV. VÝSLEDKY SIMULÁCIÍ RIADENIA

Na posúdenie kvality regulačného procesu sme využili kritérium kvadratickej regulačnej plochy [5], pre ktorú platí

$$S = \int_0^{\infty} (\Delta e(t))^2 \cdot dt$$

kde $\Delta e(t)$ predstavuje regulačnú odchýlku.

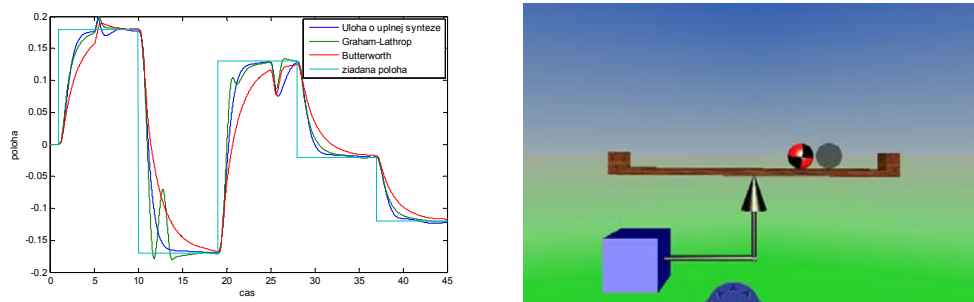
Na virtuálnom nelineárnom simulačnom modeli v spätnoväzobnej riadiacej štruktúre sme testovali PD algoritmy navrhnuté na lineárnom modeli $F_{man}(s)$ (11) a výsledky sú zobrazené na Obr. 5.



Obr. 5 Simulácia riadenia na ustálenú hodnotu PD regulátorom navrhnutým z rovnice - $F_{man}(s)$ - poloha guľičky

Na Obr. 5 môžeme pozorovať, že regulátor navrhnutý metódou štandardných tvarov podľa Graham – Lathropa najlepšie kompenzuje vplyvy menších porúch, ale vplyvom väčších porúch sa stáva celý systém nestabilným. Podľa Tab. 1 PD algoritmus navrhnutý formuláciou úlohy o úplnej syntéze vykazuje globálne (kompenzácia vplyvu poruchy a sledovanie referenčnej trajektórie súčasne) najlepšie výsledky.

Na virtuálnom nelineárnom simulačnom modeli v spätnoväzobnej riadiacej štruktúre sme testovali PD algoritmy navrhnuté na lineárnom modeli $F_{mpt}(s)$ (10) a výsledky sú zobrazené na Obr. 6.



Obr. 6 Simulácia riadenia na ustálenú hodnotu PD regulátorom navrhnutým z rovnice $F_{mpt}(s)$ - poloha guľičky

Podľa Obr. 6 by sme mohli tvrdiť, že regulátor navrhnutý formuláciou úlohy o úplnej syntéze dosahuje najlepšie výsledky, čo však neplatí podľa Tab. 1.

Podľa Tab. 1 PD algoritmus navrhnutý metódou štandardných tvarov (Graham - Lathrop) vykazuje globálne (kompenzácia vplyvu poruchy a sledovanie referenčnej trajektórie súčasne) najlepšie výsledky.

Tab. 1 Hodnoty kvadratických regulačných plôch

Úloha o úplnej syntéze	$F_{man}(s)$	$F_{mpt}(s)$
S	0,2258	0,2471
Štandardný tvar podľa Grahama - Lathropa	$F_{man}(s)$	$F_{mpt}(s)$
S	0,3871	0,2341
Štandardný tvar podľa Butterwortha	$F_{man}(s)$	$F_{mpt}(s)$
S	0,2702	0,3208

V. ZÁVER

V tomto článku sme prezentovali tvorbu virtuálneho modelu ako náhradu za reálny model fyzikálneho systému *Gulička na tyči*. Následne sme na vytvorenom virtuálnom simulačnom modeli overili a zhodnotili navrhnuté algoritmy riadenia. Výhodou tohto prístupu je fakt, že reálne výukové modely sú finančne nevýhodné, pričom náklady na tvorbu virtuálneho simulačného modelu sú minimálne (licencia pre vývojový softvér). Nevýhodou je však fakt, že nami navrhnuté algoritmy riadenia môžu vykazovať kvalitatívne rozdielne výsledky pri porovnaní virtuálneho simulačného modelu a reálneho modelu fyzikálneho systému *Gulička na tyči*.

POĎAKOVANIE

Tento článok bol vytvorený realizáciou projektu Centrum informačných a komunikačných technológií pre znalostné systémy (kód ITMS projektu: 26220120020) na základe podpory operačného programu Výskum a vývoj financovaného z Európskeho fondu regionálneho rozvoja.

LITERATÚRA

- [1] Humusoft Praha: CE 151 Education Manual Ball & Plate.
- [2] NOSKIEVIČ, Petr: Modely a identifikace systémů. Montanex, 2007, 276 s., ISBN 80-7225-030-2
- [3] HUMUSOFT s.r.o. and The MathWorks, Inc.: Virtual Reality Toolbox User's Guide, 200-2004, 246 s. Dostupné na internete: http://www.mathworks.com/access/helpdesk_r13/help/pdf_doc/vr/vr.pdf
- [4] MADARÁSZ, Ladislav – BUČKO, Marián – FÖZÖ, Ladislav: Základy automatického riadenia. Košice: TU-FEI, 2007, 449 s., ISBN 978-80-8086-042-4
- [5] Modrlák, O.: Syntéza regulačních obvodů. Študijné materiály [online]. Liberec: TU, 2004. Dostupné na internete: http://www.fm.vslib.cz/~krtsub/fm/modrlak/pdf/tar1_syn.pdf