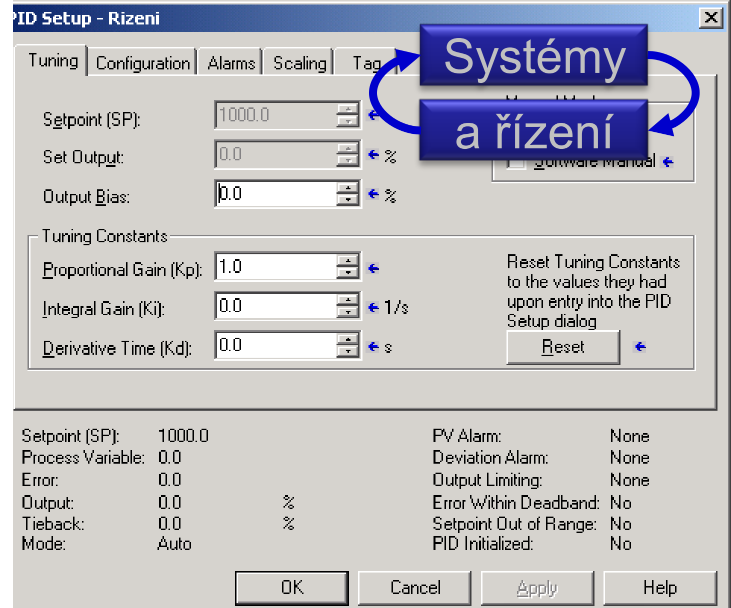


Systémy a řízení
Číslicové řízení - příklady

19.11.2009

Spojité, diskrétní a vzorkované systémy

Opakování SAM: Spojité a diskrétní systémy

- spojité LTI systémy: čas je spojitý, signály jsou spojité

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$Y(s) = \frac{(b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0)}{(a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0)} U(s)$$

- diskrétní LTI systémy (přesněji: s diskrétním časem):
  čas je diskrétní, signály jsou posloupnosti

$$a_n y(k+n) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_m u(k+m) + \cdots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k)$$

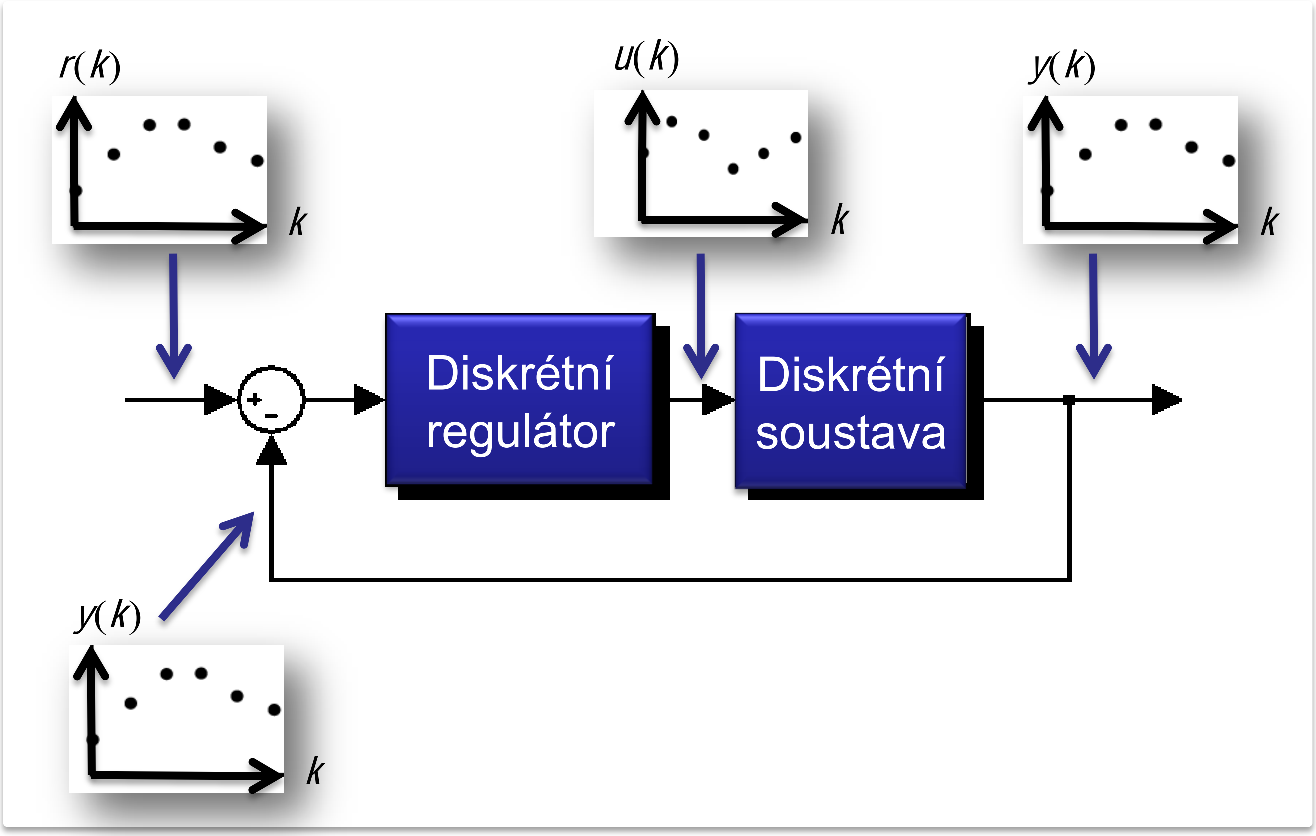
$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$$Y(z) = \frac{(b_m z^m + \ldots + b_1 z + b_0)}{(a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0)} U(z)$$

- kombinace: vzorkované (a kvantované) pro diskrétní řízení spojitých systémů

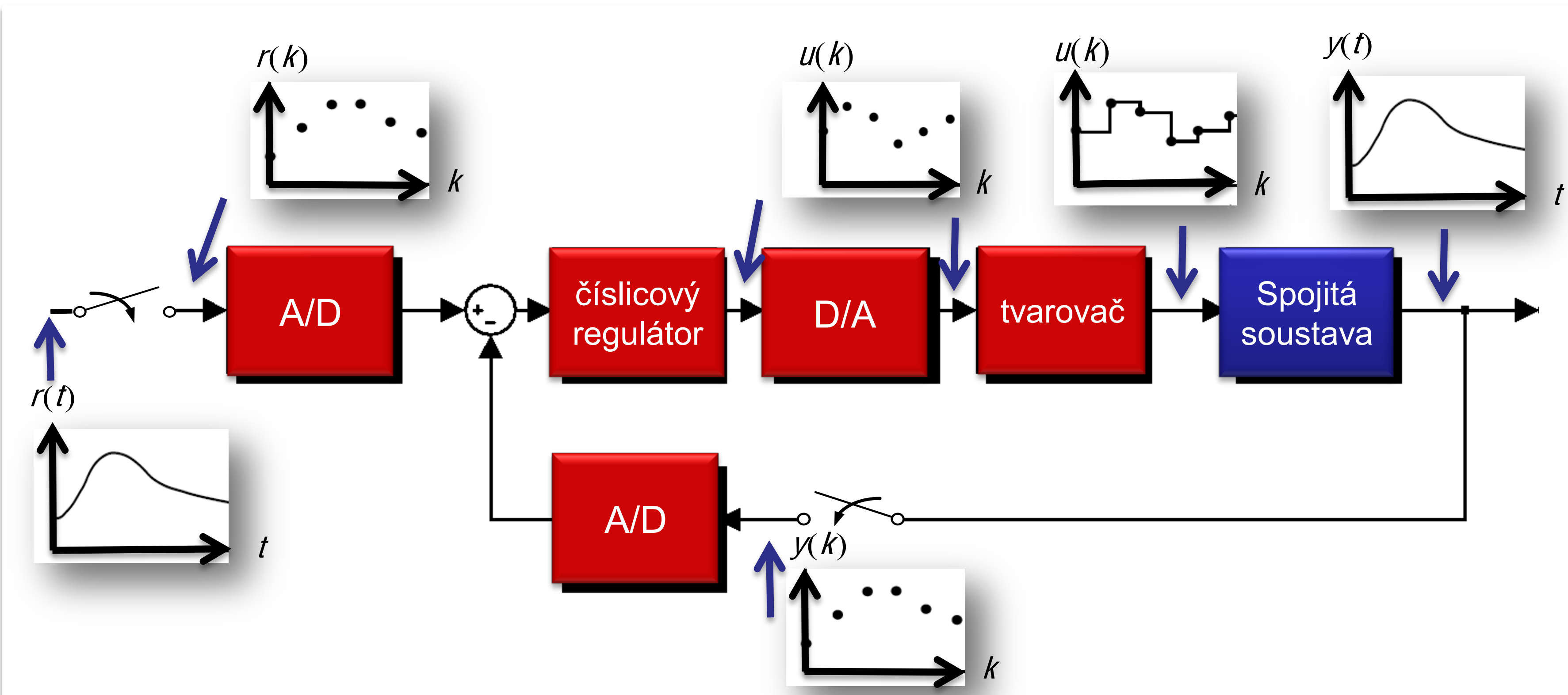
Diskrétní řízení diskrétního systému

- všechny subsystémy jsou diskrétní
- všechny signály jsou posloupnosti



Diskrétní řízení spojitého systému

- soustava je spojitá, regulátor je diskrétní
- některé signály jsou spojité (nebo po částech spojité) jiné jsou posloupnosti



Diskrétní řízení spojité soustavy

Ilustrační příklady bez vysvětlení metod

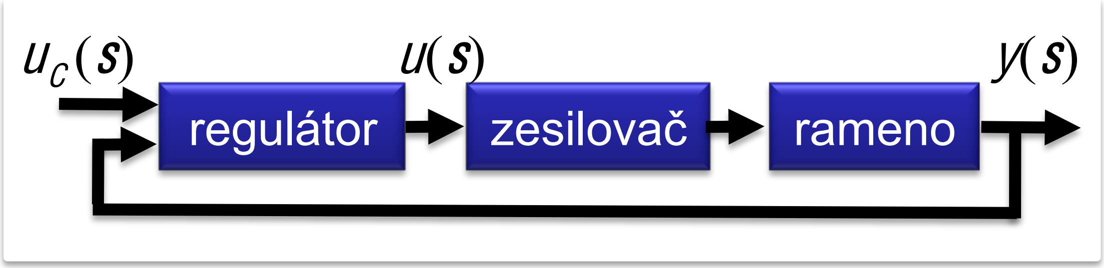
Příklad: Disková jednotka

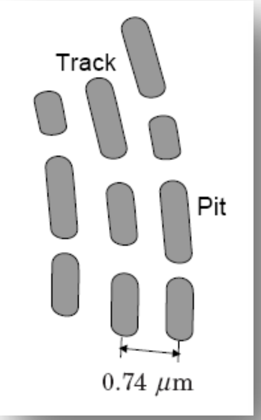
Rameno v diskové mechanice

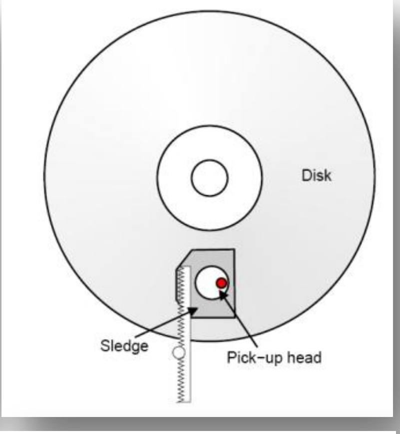
- zjednodušeno (normalizováno na 1) podrobněji *ÅW, s13, ex1.2*
- přenos napětí zesilovače na polohu ramene

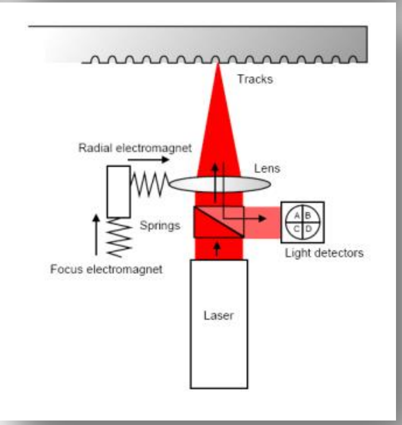
$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

- cíl: sledovat stopu (čím přesněji, tím užší)
- přesné řízení polohy ramene
- důležitá dynamika – rychlost čtení
- struktura řízení









Příklad: spojité řízení

- spojitý regulátor (navrhneme “spojitými metodami“)

$$u(s)=\frac{1}{2}u_c(s)-2\frac{s+0.5}{s+2}y(s)$$

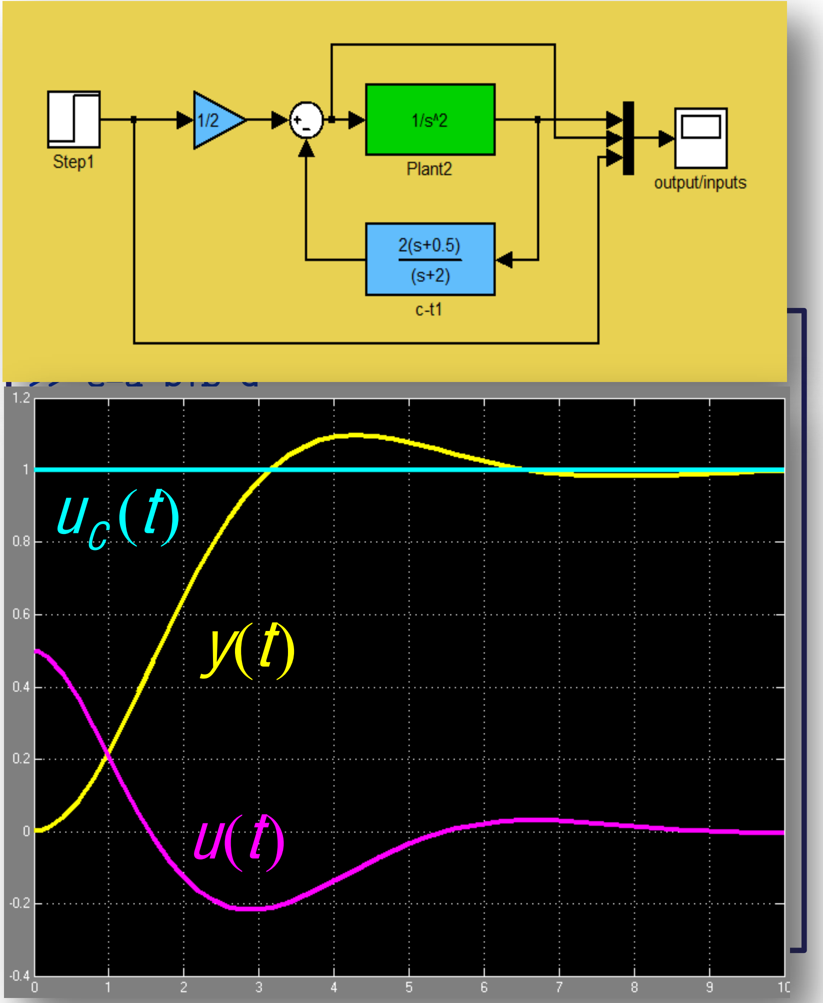
- CL charakteristický polynom

$$c_{CL}(s)=(s+1)\left(s^2+s+1\right)$$

- CL přenos

$$y(s)=\frac{1}{2}\frac{s+2}{(s+1)\left(s^2+s+1\right)}u_c(s)$$

- simulace **AW_1_2.mdl**
- doba ustálení na 5% je 5.5, překmit do 10% - OK
- Jak realizovat digitálně ?



Příklad: Naivní aproximace regulátoru

Systémy a řízení

- Spojitý regulátor vyjádříme

$$\frac{s+0.5}{s+2} = 1 - \frac{1.5}{s+2}$$

$$u(s) = 0.5u_c(s) - 2\frac{s+0.5}{s+2}y(s) = 0.5u_c(s) - 2y(s) + 2\frac{1.5}{s+2}y(s)$$

$$= 2\left[0.25u_c(s) - y(s) + x(s)\right]$$

kde

$$x(s) = \frac{1.5}{s+2}y(s)$$

- dostaneme v časové oblasti spojitý algoritmus (zákon řízení)

$$u(t) = 2\left[0.25u_c(t) - y(t) + x(t)\right]$$

$$\frac{dx}{dt} = -2x(t) + 1.5y(t)$$

- diskrétní algoritmus - signály vzorkujeme s periodou *h*
- a derivaci aproximujeme diferencí

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = -2x(t) + 1.5y(t)$$

Příklad – Naivní návrh

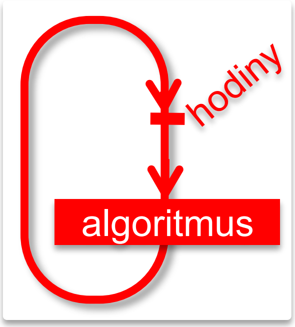
- Tak dostaneme diskrétní aproximaci

$$u(t_k) = 2\left[0.25u_c(t_k) - y(t_k) + x(t_k)\right]$$
$$x(t_k + h) = x(t_k) + h\left[1.5y(t_k) - 2x(t_k)\right]$$

$$u(t) = 2\left[0.25u_c(t) - y(t) + x(t)\right]$$
$$\frac{dx}{dt} = -2x(t) + 1.5y(t)$$

- Tu můžeme realizovat programem (kde u_c je dáno digitálně)

```
y:= adin(in2)           {čti hodnotu procesu}
u:= 2*(0.25*uc-y+x)     {vypočti řídicí hodnotu}
dout(u)                 {pošli ven řídicí hodnotu}
x:= x+h(1.5*y-2*x)      {vypočti novou hodnotu x}
```



- nebo diskrétním přenosem

$$u(z) = 0.5u_c(z) - 2\frac{z + 0.5h - 1}{z + 2h - 1}y(z)$$

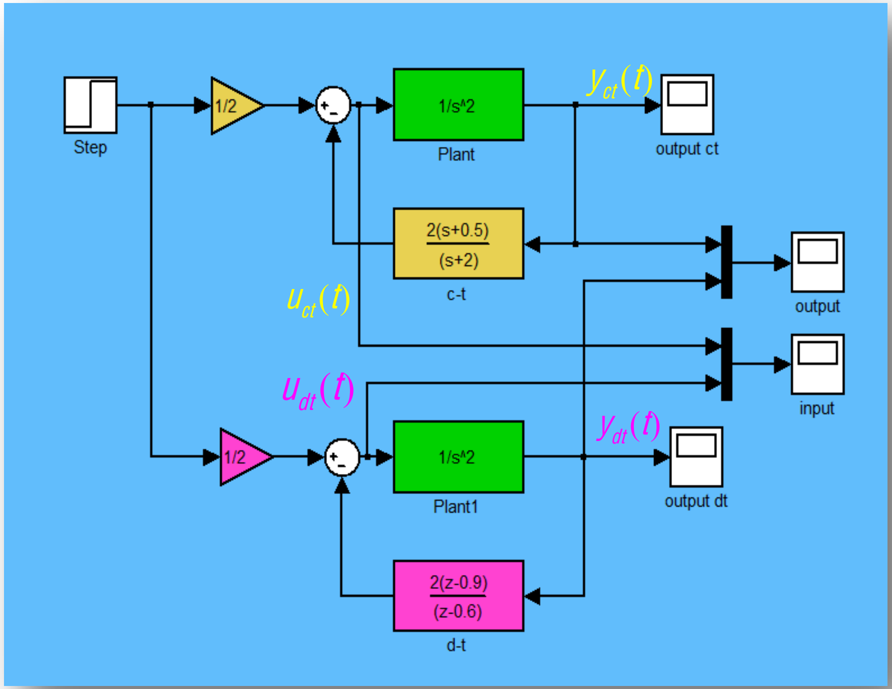
$$u(z) = 2\left[0.25u_c(z) - y(z) + x(z)\right]$$
$$zx(z) = x(z) + h\left[1.5y(z) - 2x(z)\right]$$

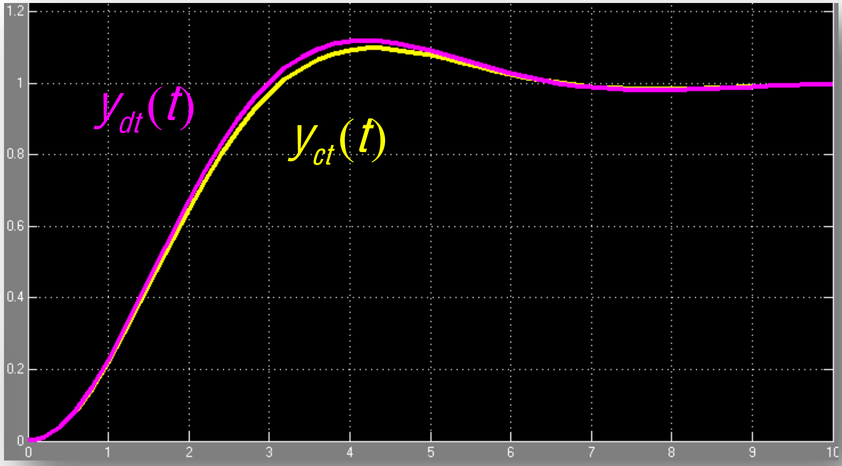
Odpovídá dosazení do spojitého přenosu $s \triangleq \frac{z-1}{h}$

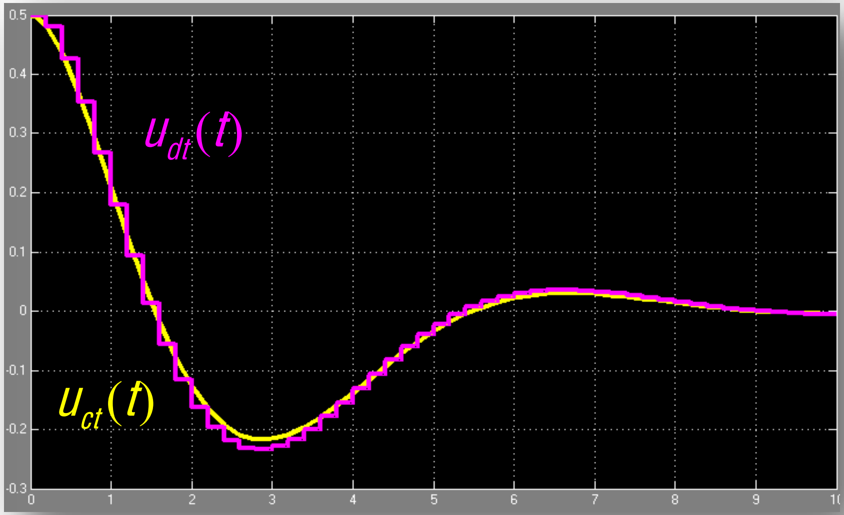
Příklad: porovnání

- Porovnáme spojité a diskrétní řízení pro $h = 0.2$
- **AW_1_2.mdl**

$$u(z) = 0.5u_c(z) - 2\frac{z-0.9}{z-0.6}y(z)$$

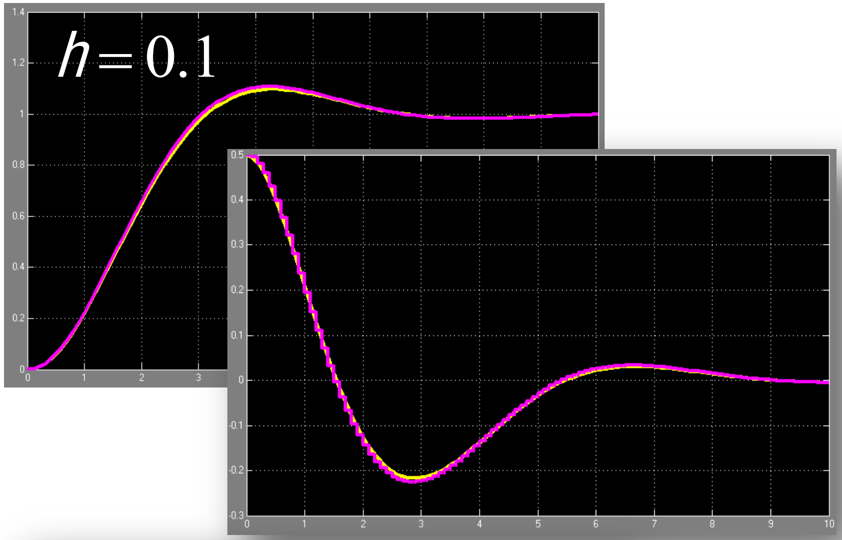


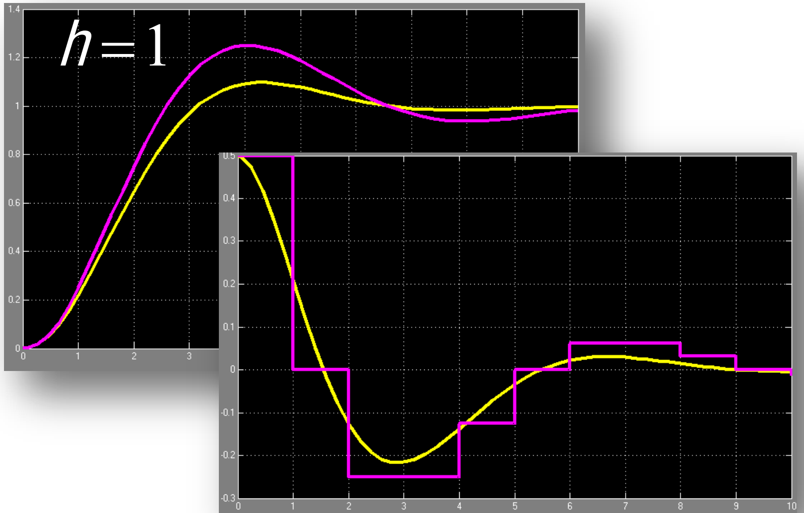


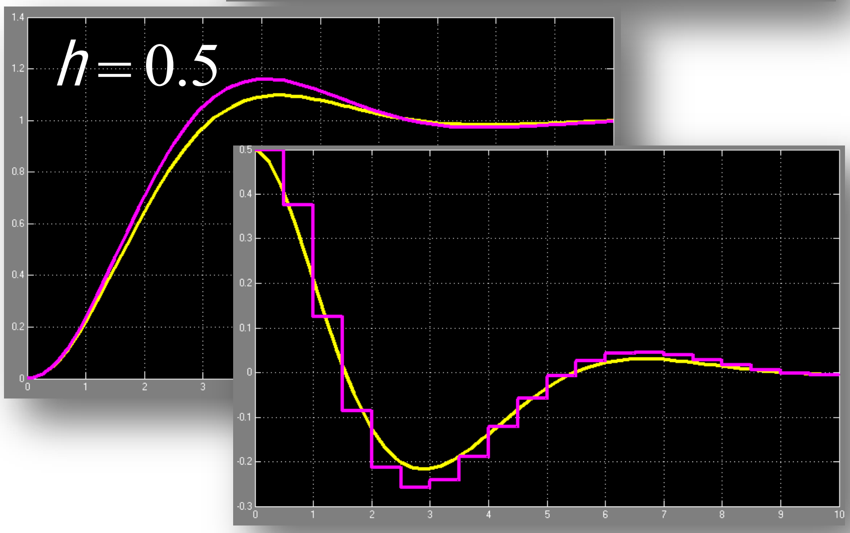


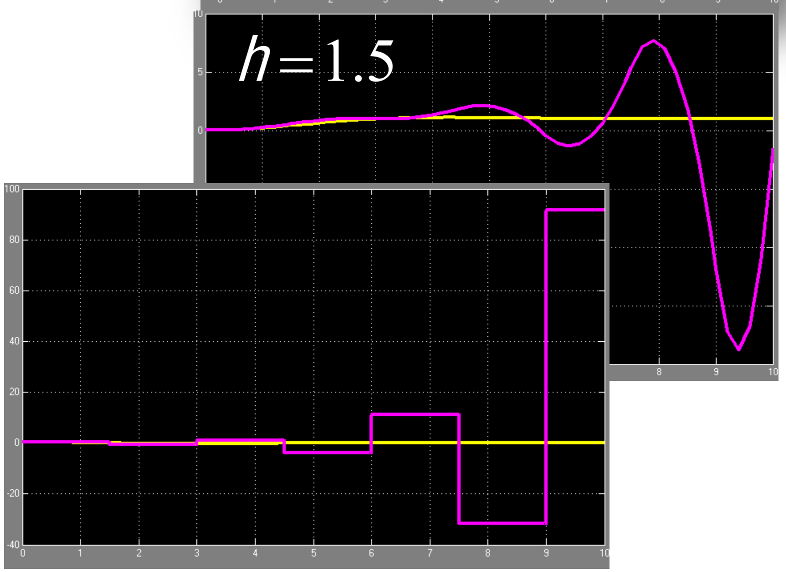
Příklad: porovnání

- Různé periody vzorkování $h = 0.1, 0.5, 1, 1.5$









Příklad: jiné řešení

- Nejprve najdeme diskrétní přenos soustavy a tvarovače

$$G(s)=\frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad G(z)=\frac{h^2}{2}\frac{z+1}{(z-1)^2}$$

- diskrétními metodami najdeme diskrétní regulátor tak, aby

$$\left(z^2-2z+1\right)p(z)+h^2/2\left(z+1\right)q(z)=z^3$$

- řešením rovnice

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & q_0 & q_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ h^2/2 & h^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & h^2/2 & h^2/2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- dostaneme

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & q_0 & q_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3/4 & 1 & -\dfrac{3}{2h^2} & \dfrac{5}{2h^2} \end{bmatrix}$$

$$p(z)=3/4+z$$

$$q(z)=-\frac{3}{2h^2}+\frac{5}{2h^2}z$$

Příklad: jiné řešení

- tento „čistě diskrétní“ regulátor

$$u(z)=\frac{4}{7h^2}u_c(z)-\frac{5}{2h^2}\frac{z-3/5}{z+3/4}y(z)$$

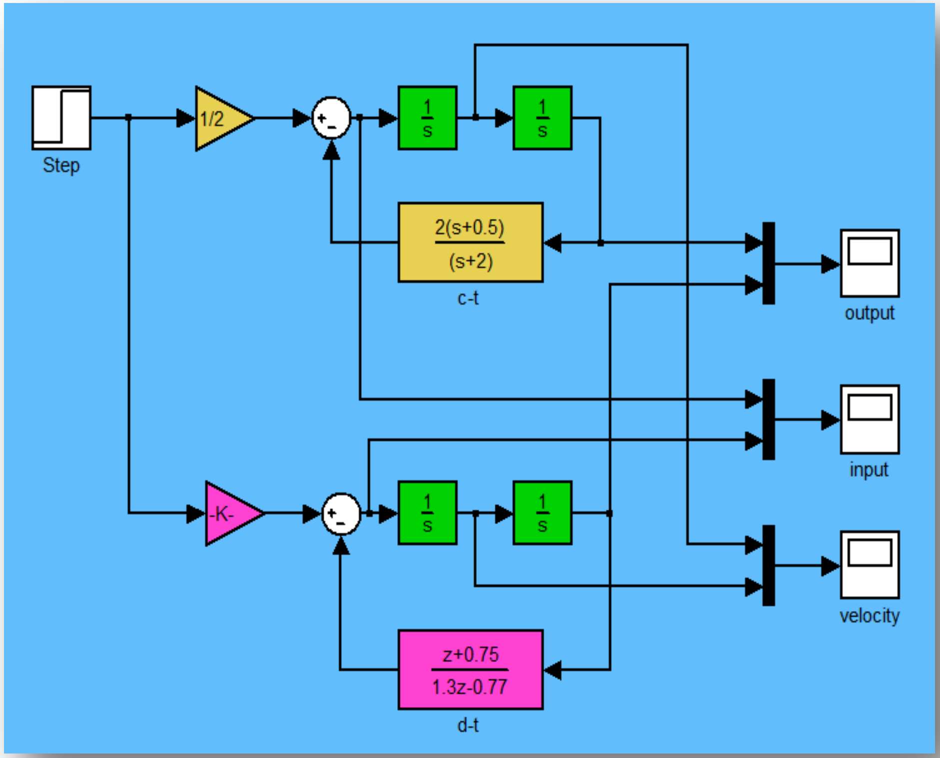
- dává výsledný přenos

$$y(z)=\frac{2}{7}\frac{(z+1)(z+3/4)}{z^3}u_c(z)$$

- a CL charakteristický polynom

$$c_{CL}(z)=z^3$$

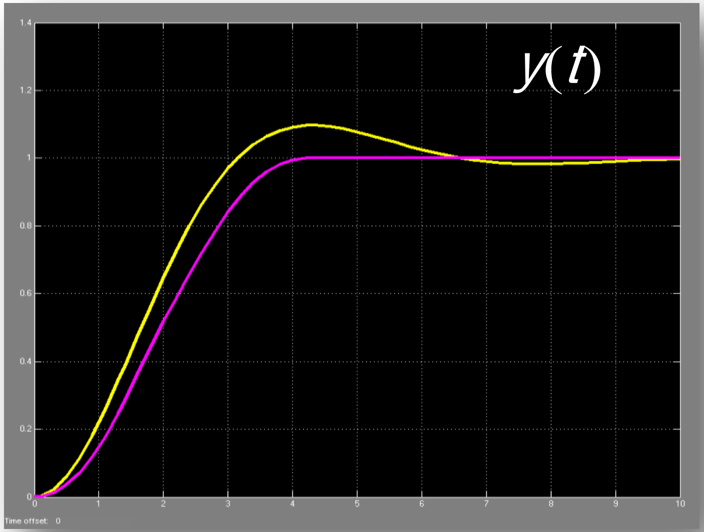
- simulace **`AW_1_3.mdl`** pro $h=1.4$



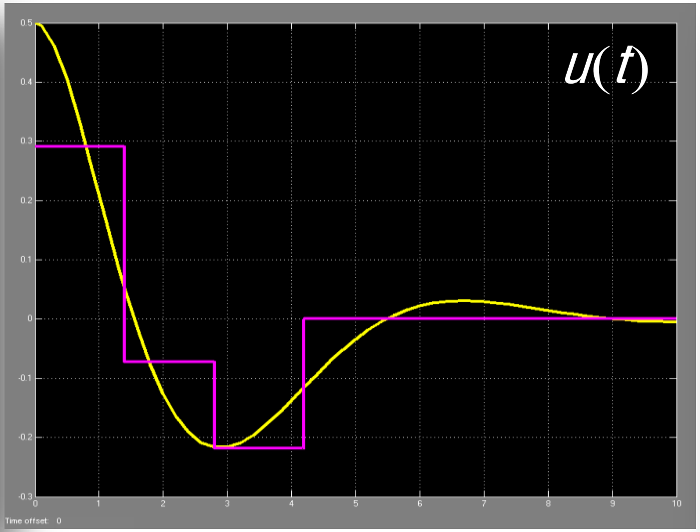
Příklad: jiné řešení

- Simulace **`AW_1_3.mdl`** pro $h = 1.4$

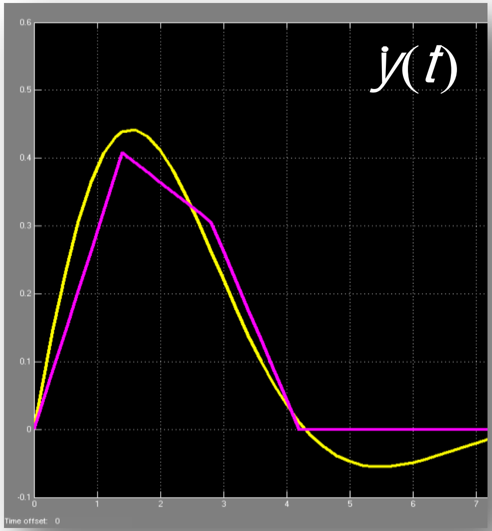
výstup:



vstup:



rychlost:



- počínaje 4. okamžikem vzorkování se výstup přesně rovná požadovanému (neblíží se mu jen asymptoticky)!
- toto čistě diskrétní řešení je lepší než spojité
- nemá obdoby mezi spojitými (není aproximací žádného spoj)
- Co se tedy děje při zmenšování h ?

Příklad: a ještě jiné řešení

- Nešlo by počet kroků ještě zkrátit? Zdánlivě ano:
- Vyřešíme $\left(z^2-2z+1\right)p(z)+h^2/2\left(z+1\right)q(z)=z^2(z+1)$
- Pomocí

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & q_0 & q_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ h^2/2 & h^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & h^2/2 & h^2/2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

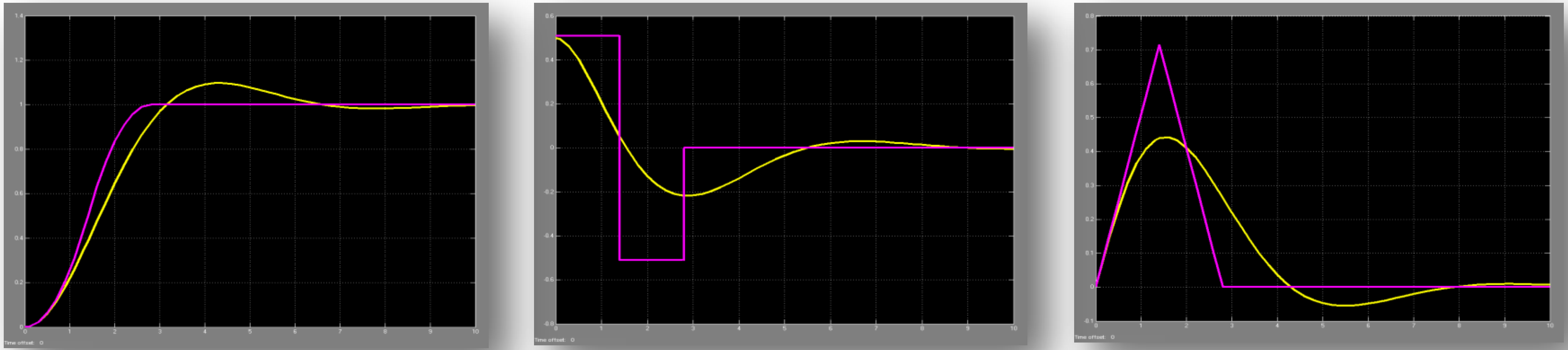
dostaneme

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & q_0 & q_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\dfrac{2}{h^2} & \dfrac{4}{h^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} p_{weak}(z)&=1+z \\ q_{weak}(z)&=4/h^2\, z-2/h^2 \end{aligned}$$

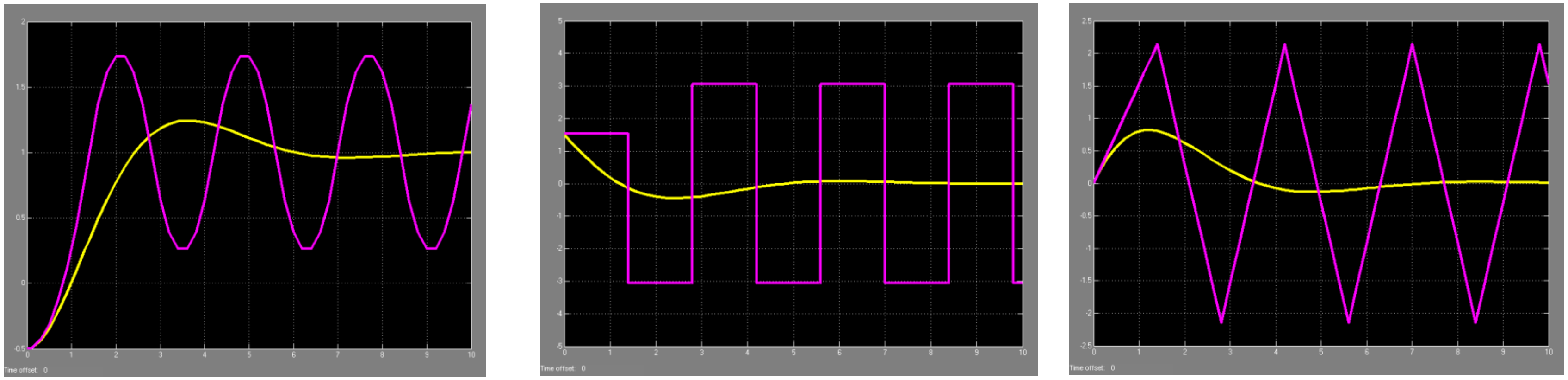
- Tedy regulátor $$u=\frac{1}{h^2}u_C-\frac{4}{h^2}\frac{z-1/2}{z+1}y$$
- který dá výsledný přenos uzavřené smyčky $$y=\frac{1}{2}\frac{(z+1)}{z^2}u_C$$
  a CL charakteristický polynom $c_{CL}(z)=z^2(z+1)$

Příklad: jiné řešení

- Simulace – druhý model v **`AW_1_3.mdl`** vypadá OK



- Ale pro nenulové počáteční podmínky odhalí problém



- Všimněte si, že v okamžicích vzorkování se chová vzorně

Příklad: a ještě čtvrté, stavové řešení

- Nakonec ještě ukážeme řešení stavovou zpětnou vazbou
- Stavové rovnice dvojitého integrátoru $G(s)=1/s^2$ jsou např.

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t),\ y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t)$$

- Jejich diskrétní verze (s ZOH a periodou vzorkování h)

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}h^2/2\\ h\end{bmatrix}u(k),\ y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(k)$$

- Zapojením stavového regulátoru

$$u(k)=-\begin{bmatrix}1/h^2\\ 3/(2h)\end{bmatrix}x(k)+1/h^2\,u_c(k)$$

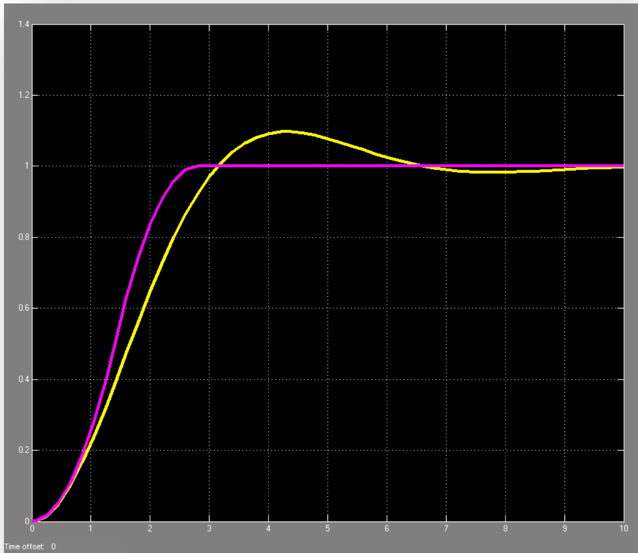
$$y(z)=\frac{1}{2}\frac{z+1}{z^2}u_c(z)$$

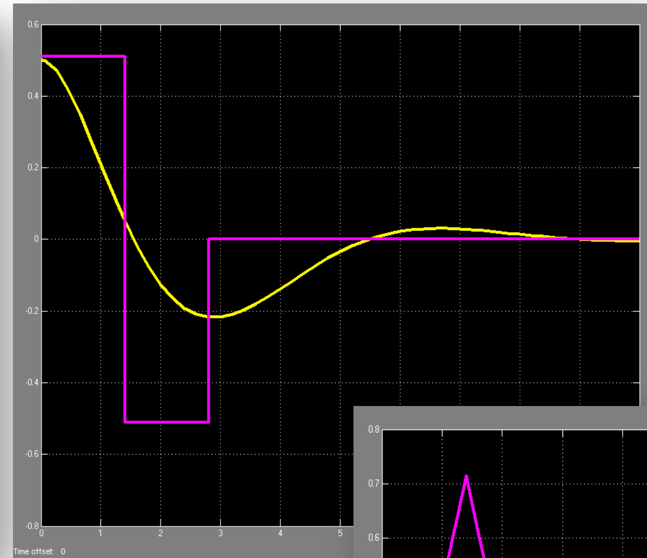
- Se systém změní na s char. polynomem $c_{CL}(z)=z^2$ a přenosem

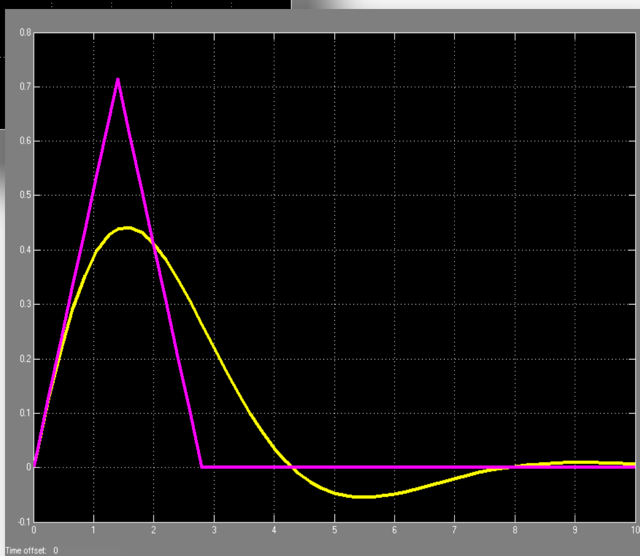
$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1/2 & 1/4\,h\\ -1/h & -1/2\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1/2\\ 1/h\end{bmatrix}u_c(k),\ y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(k)$$

Příklad: stavové řešení řešení

- Simulace `AW_4_5.mdl` pro $h = 1.4$







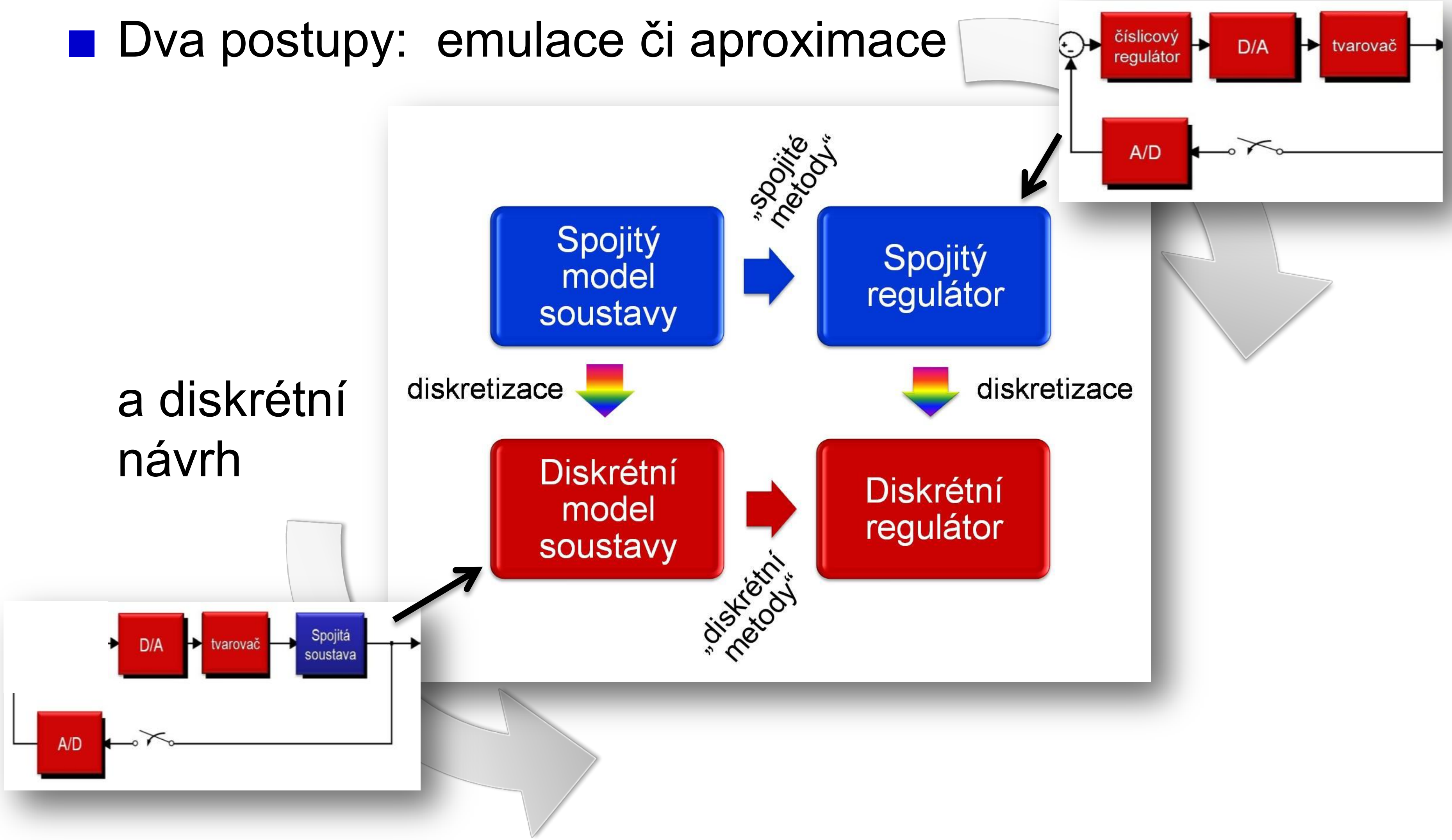
- Počínaje třetím krokem je žádaná hodnota přesně nastavena a řízení je nulové
- a to pro každé pp.
- a systém je vnitřně stabilní

Návrh číslicového řízení spojité soustavy

Jak navrhnout číslicový regulátor pro spojitou soustavu?

- Dva postupy: emulace či aproximace

a diskrétní návrh



Opakování SAM: Vzorkování a digitalizace

Vzorkování

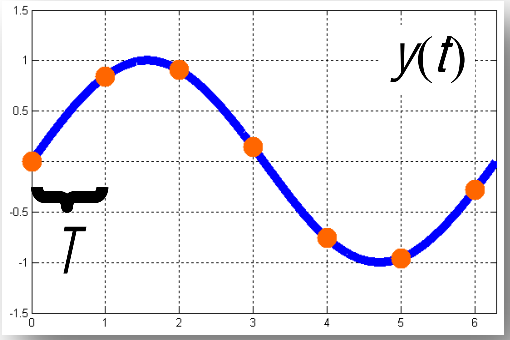
- různé realizace – podle periody (frekvence) vzorkování
- typicky: logika počítače obsahuje hodiny, které každých *T* sekund vyšlou puls (interrupt) do vzorkovače
- u pomalejších procesů může být jinak
  Příklad: dávková výroba fotografických filmů Kodak

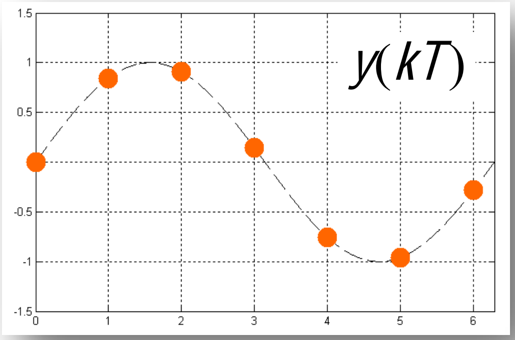
- někdy mají různé větve různou periodu vzorkování
  Příklad: řízení postoje paraplegika GRC
- nebo mají fázové zpoždění
- někdy vzorkování není periodické
  Příklad: free running – další vzorek se vezme, jakmile je předchozí zpracován

- to vše komplikuje návrh
- budeme probírat jen ten nejjednodušší případ

Vzorkování

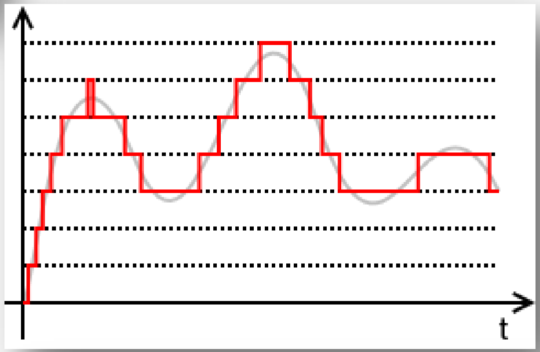
- Převod spojitého signálu na diskrétní: vzorkování (sampling)



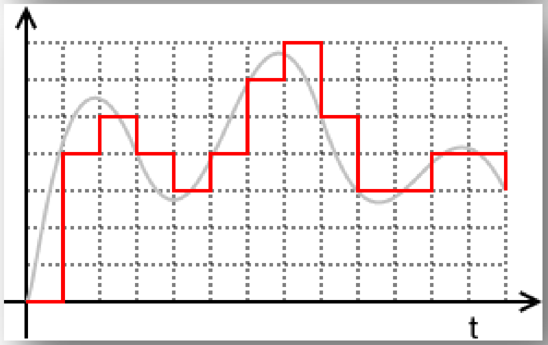


vzorkovač (sampler) pracuje často periodicky

- Často spojeno s kvantováním = totéž v oblasti hodnot signálů, podle reprezentace čísel v konkrétním počítači

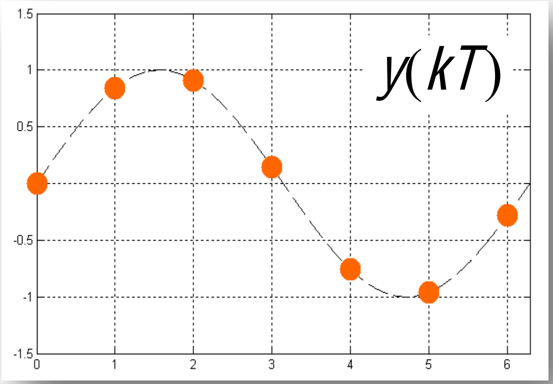


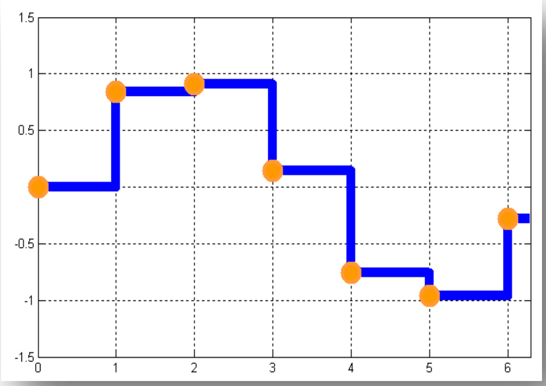
- digitalizace je vzorkování a kvantování současně
- Provádí ho A/D převodník (vzorkovač bývá jeho součástí)
- Výsledkem je „digitalizovaný signál“



Tvarování

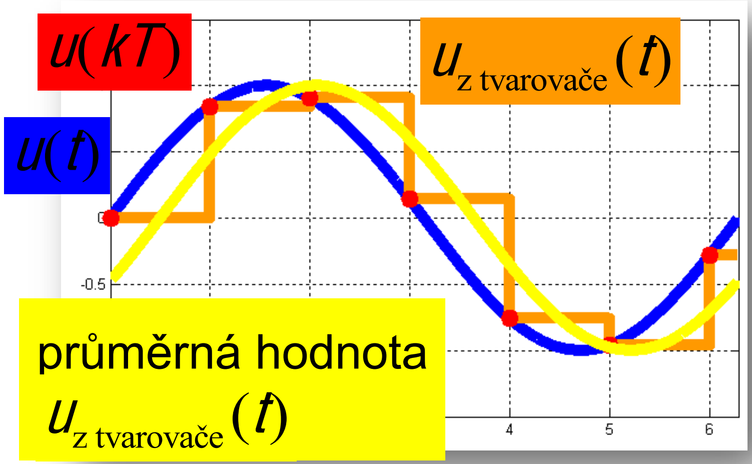
- Převod diskrétního signálu na spojitý: tvarování (holding)





zero-order hold (ZOH)
tvarovač nultého řádu

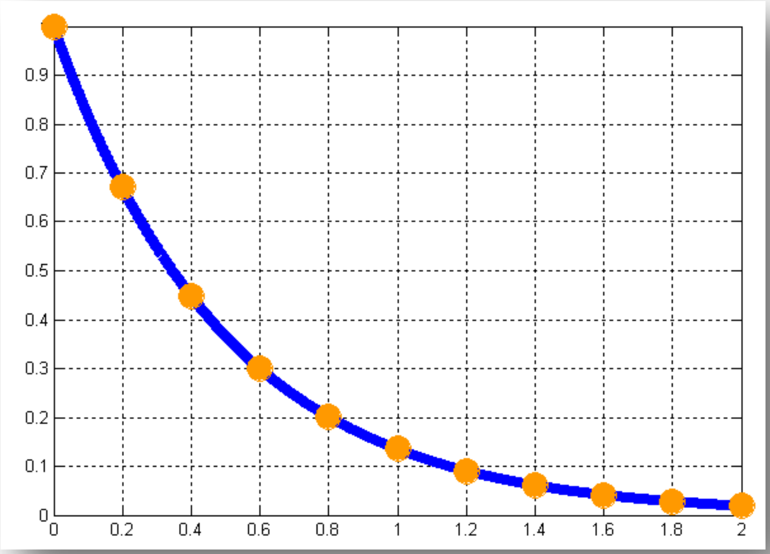
- srovnání původního spojitého signálu se vzorkovaným a tvarovaným
- průměrná hodnota tvarovaného signálu je oproti spojitému opožděná o $T/2$
- způsobeno tvarováním (hold)



Vztah mezi *s* a *z*

spojitý signál $f(t) = e^{-at}, t > 0$

- má Laplaceův obraz $F(s) = \mathcal{L}\{f\} = \dfrac{1}{s+a}$
- a pól v $s = -a$



diskrétní signál

(vzniklý vzorkováním)

$$f(t) = e^{-akT}, T = 0.2\,\mathrm{s}$$

- má z-obraz $F(z) = \mathcal{Z}\{f(kT)\} = \dfrac{z}{z - e^{-aT}}$
- a tedy pól v $z = e^{-aT} = e^{sT}$

Mezi póly obrazu spojitého a (vzorkovaného) diskrétního signálu platí vztah $\boxed{z = e^{sT}}$

"Gimme a large cone with a sample of everything."

Frekvence a perioda vzorkování pro řízení

Jak užít Větu o vzorkování pro řízení

Doplnit příklady

náběhu T_r

- 5-10 vzorků za dobu náběhu

Jiné pravidlo

- $$h\omega_c \in [0.15, 0.5]$$

Jiné praktické rady:

- Vzorkuj tak rychle, jak ti vedoucí projektu (= tvůj šéf) dovolí
- Vyber „rozumnou“ frekvenci vzorkování
  a na simulacích vyzkoušej, co udělá ji snížit a zvýšit

Opakování SAM: Aproximace spojitého systému diskrétním

Jednoduché metody: numerická integrace

Náhrada derivace přímou diferencí (Eulerova metoda, dopřed., obdélníková aproximace)

- nahradíme $$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$
- formálně $sx \approx \dfrac{z-1}{h}x$, tedy nahradíme $\boxed{s \approx \dfrac{z-1}{h}}$
- Tomu odpovídá aproximace řady $z = e^{sh} \approx 1 + sh$

Náhrada derivace zpětnou diferencí (zpětná obdélníková aprox.)

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t)-x(t-h)}{h} \quad \Leftrightarrow \quad sx \approx \frac{z-1}{zh}x \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{s \approx \frac{z-1}{zh}}$$

- Tomu odpovídá aproximace řady $z = e^{sh} \approx \dfrac{1}{1-sh}$

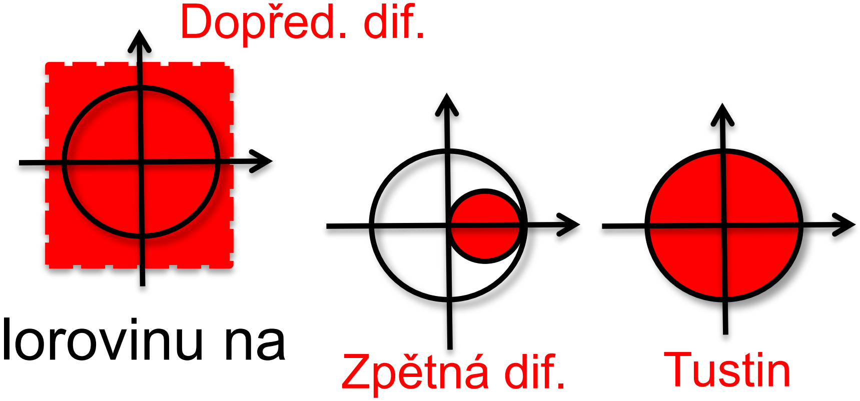
Tustinova metoda

neboli lichoběžníková aproximace či bilineární transformace

- Vychází z numerické integrace odezvy lichoběžníkovou metodou
- Nahradíme $\boxed{s \approx \frac{2}{h}\frac{z-1}{z+1}}$
- Což odpovídá aproximaci řady $z = e^{sh} \approx \frac{1 + sh/2}{1 - sh/2}$
- V Matlabu-CST: `c2d(f,h,'tustin')`

Obecný postup

- v přenosu spojitého regulátoru prostě nahradíme *s* výrazem podle zvolené metody
- Vhodné pro ruční počítání
- Aproximace zobrazuje stabilní polorovinu na



Příklady

- Spojitý regulátor s přenosem

$$D(s) = \frac{a}{a+s}$$

- Aproximujeme přímou diferencí

$$D_{\text{forward}}(z) = \frac{a}{a + \dfrac{z-1}{h}} = \frac{ah}{z + ah - 1}$$

- Zpětnou diferencí

$$D_{\text{backward}}(z) = \frac{a}{a + \dfrac{z-1}{zh}} = \frac{ahz}{z(ah+1) - 1}$$

- A Tustinovou metodou

$$D_{\text{Tustin}}(z) = \frac{a}{a + \dfrac{2}{h}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)} = \frac{ah(z+1)}{(ah+2)z + ah - 2}$$

Příklad

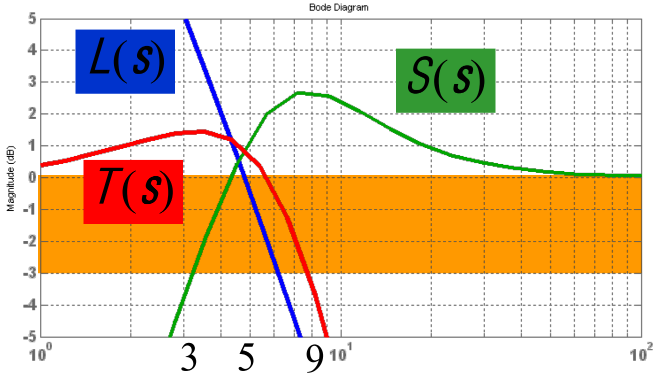
- Při návrhu spojité lead kompenzace DC motoru s přenosem
  $$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$
- byl navržen kompenzátor s přenosem
  $$D(s)=10\frac{s/2+1}{s/10+1}$$
- Implementujte ho diskrétně se vzorkovací frekvencí 25x šířka pásma (uzavřené smyčky!)
- Při spojitém řešení $\rightarrow\ \omega_c=5\ \mathrm{rad/s}\ \rightarrow\ \omega_{BW}=10\ \mathrm{rad/s}$

$\rightarrow$ vzorkovací frekvence

$$\omega_s=25\times10=250\ \mathrm{rad/s}$$

$$\rightarrow\ f_s=\omega_s/2\pi\approx40\ \mathrm{Hz}$$

$$\rightarrow\ T_s=1/f_s=1/40=0.025\ \mathrm{s}$$




```
>> G=1/s/(1+s);
>> D=10*(s/2+1)/(s/10+1)
D =  1e+002 + 50s / 10 + s
>> L=G*D;S=1/(1+L);T=L*S;
>> bode(tf(L),tf(S),tf(T))

>> Dtustin=c2d(tf(D),.025,'tustin')
  Transfer function:
  45.56 z - 43.33
  ---------------
    z - 0.7778
  Sampling time: 0.025
```

$$D(z)=\frac{45.56z-43.33}{z-0.7778}$$

Metoda MPZ (viz Franklin)

Metoda sladěných nul a pólů - MPZ (Matched pole-zero)

- vychází ze vztahu mezi póly/nulami spojitého a vzorkovaného signálu $z_i = e^{s_i T}$
- použitého zde na impulsní charakteristiku
- navíc, je-li to možné, přidáváme nuly v $z^{-1} = -1$, tj. členy $(z^{-1}+1)$ do čitatele, což vede k zprůměrování současné a předchozí hodnoty
- je jednoduchá a praktická, i když ne moc podložená

Postup MPZ

- vypočti nuly a póly $D(s)$
- sestav $D(z)$ tak, aby pro jeho nuly a póly platilo $z_i = e^{s_i T}$
- je-li to možné, přidej do čitatele členy $(z+1)$ tak, aby se stupeň čitatele = stupeň jmenovatele
- nastav zesílení $D(z)$ pro nulové nebo nízké frekvence stejné jako v $D(s)$

Metoda MPZ

MPZ pro

$$D(s) = K_C \frac{s+a}{s+b}$$

$$z_i = e^{s_i T}$$

- $$D(z) = K_D \frac{z - e^{-aT}}{z - e^{-bT}}$$
- $$D(0) = K_C \frac{a}{b} = D(1) = K_D \frac{1 - e^{-aT}}{1 - e^{-bT}} \Rightarrow K_D = K_C \frac{a}{b} \frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}}$$

MPZ pro

$$D(s) = K_C \frac{s+a}{s(s+b)} \quad D(z) = K_D \frac{z - e^{-aT}}{(z-1)(z - e^{-bT})} \quad D(z) = K_D \frac{(z+1)(z - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-bT})}$$

$$K_D = K_C \frac{a}{2b} \frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}}$$

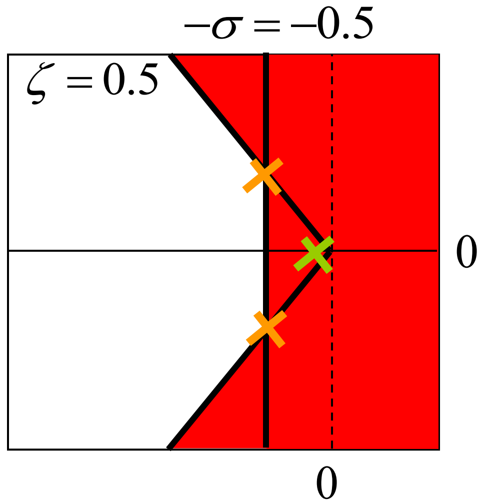
Příklad - Anténa

- Navrhněte číslicovou kompenzaci sledující antény s přenosem $G(s) = \dfrac{1}{s(10s+1)}$
- se specifikacemi $OS < 16\%$, $T_{s(1\%)} < 10\ \text{s}$, e_{ss} na rampu se sklonem 0.01<0.01, aspoň 10 vzorků za T_r

Spojitý návrh

- požadavek na OS → $\zeta \geq 0.5$
- požadavek na T_s → $-\sigma \leq 0.46$
- požadavek na e_{ss} → $K_v \geq 0.1$

spojitý návrh dle Franklina
Problém: vykrácený pól v -0.1 zůstává v CL charakteristickém polynomu



$$D(s) = \frac{10s+1}{s+1}$$

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

```
>> g=1/s/(10*s+1);d=(s+1)\(10*s+1); L=g*d
L =
      1  /   s(s+1)
>> T=L/(L+1)
T =
    1 /(s+0.5000+0.8660i)(s+0.5000-0.8660i)
>> c=g.den*d.den+g.num*d.num
c =
   (s+0.5000+0.8660i)(s+0.5000-0.8660i)(s+0.1000)
```

Příklad

- ze spojitého návrhu $\omega_n = 1 \rightarrow T_r = 1.8\,s \rightarrow T = 0.18$
- vezmeme $T = 0.2$

$$D(s) = \frac{10s+1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad D(z) = K_D \frac{z - z_1}{p - p_1} \qquad \begin{array}{l} z_1 = e^{-0.1\times0.2} = 0.9802 \\ p_1 = e^{-1\times0.2} = 0.8187 \end{array}$$

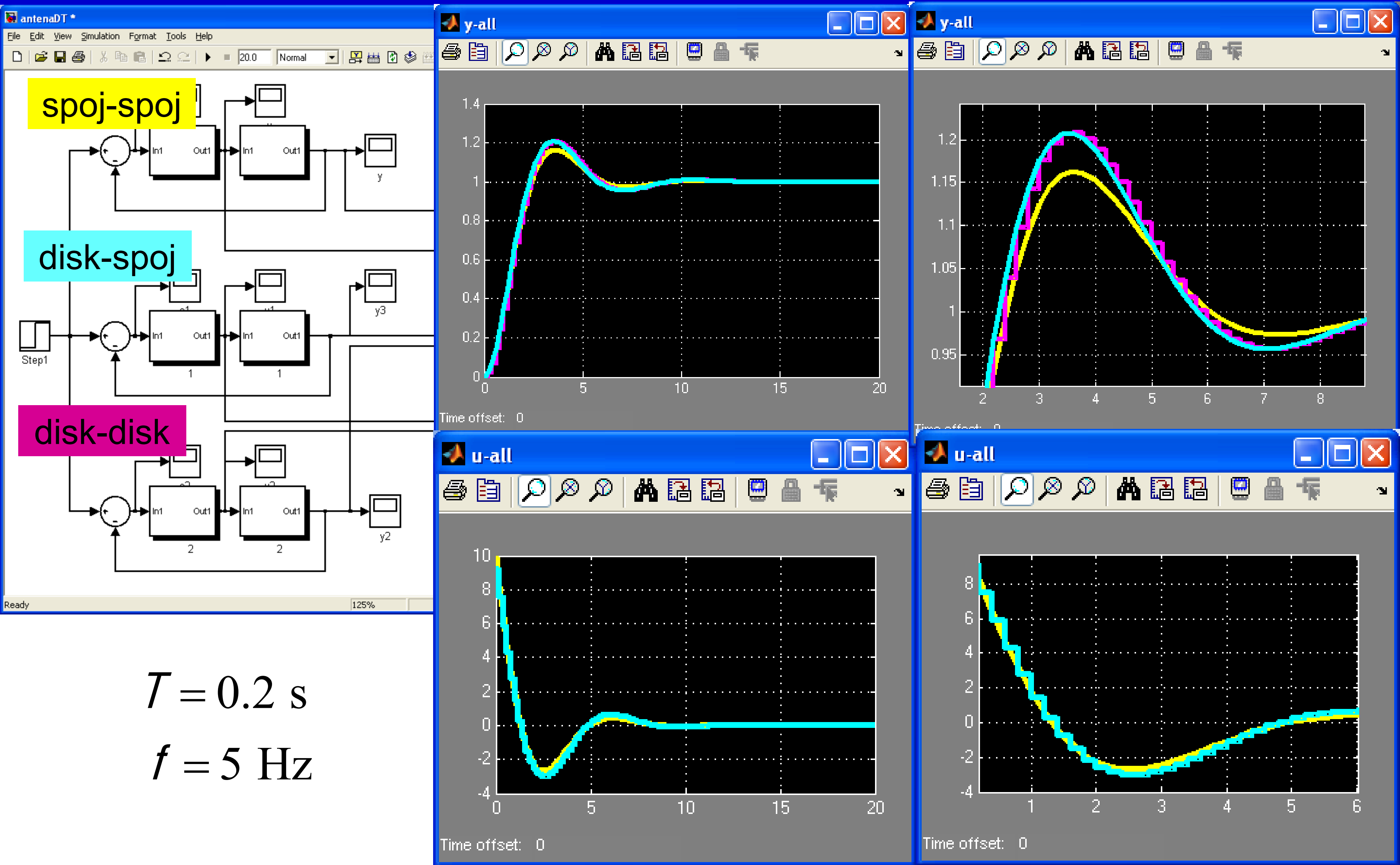
$$K_D = K_C \frac{a}{b} \frac{1-e^{-bT}}{1-e^{-aT}} = \frac{1-e^{-0.02}}{1-e^{-0.2}} = \frac{1-0.8187}{1-0.9802} = 9.15$$

$$\boxed{D(z) = 9.15 \frac{z-0.9802}{p-0.8187}}$$

Příklad


```
>> g=1/s/(10*s+1), d=(s+1)\(10*s+1)
g = 0.1000 / s(s+0.1000)
d = (s+1)\10(s+0.1000)
>> dz=c2d(tf(d),.2,'matched')
Transfer function:
9.154 z - 8.973
---------------          Sampling time: 0.2
  z - 0.8187
>> dzpol=ldf(dz)
dzpol = (z-0.8187)\ 9.1544(z-0.9802)
>> gz=c2d(tf(g),.2)
Transfer function:
0.001987 z + 0.001974
---------------------  Sampling time: 0.2
z^2 - 1.98 z + 0.9802

>> gzpol=ldf(gz)
gzpol = (z-0.9802)(z-1.0000)\ 0.0020(z+0.9934)
```

Příklad



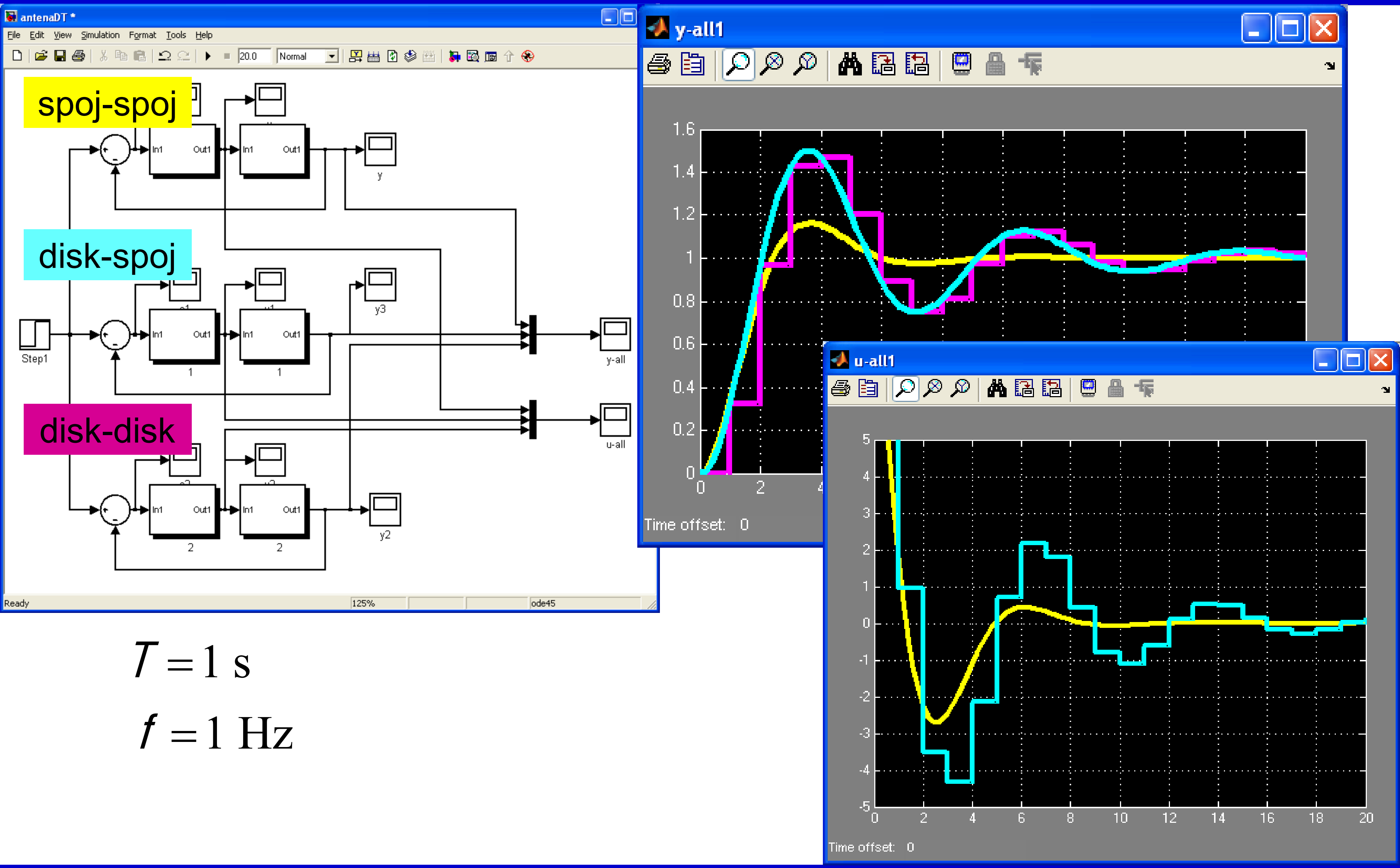
$$T = 0.2 \text{ s}$$

$$f = 5 \text{ Hz}$$

Příklad


```
>> dz1=c2d(tf(d),1,'matched')
Transfer function:
6.643 z - 6.01
--------------          Sampling time: 1
  z - 0.3679

>> dzpol1=ldf(dz1)
dzpol1 =
     (z-0.3679) \  6.6425(z-0.9048)

>> gz1=c2d(tf(g),1)

Transfer function:
 0.04837 z + 0.04679
---------------------- Sampling time: 1
z^2 - 1.905 z + 0.9048

>> gzpol1=ldf(gz1)
gzpol1 =
     (z-0.9048)(z-1.0000) \ 0.0484(z+0.9672)
```

Příklad



$$T = 1 \text{ s}$$

$$f = 1 \text{ Hz}$$

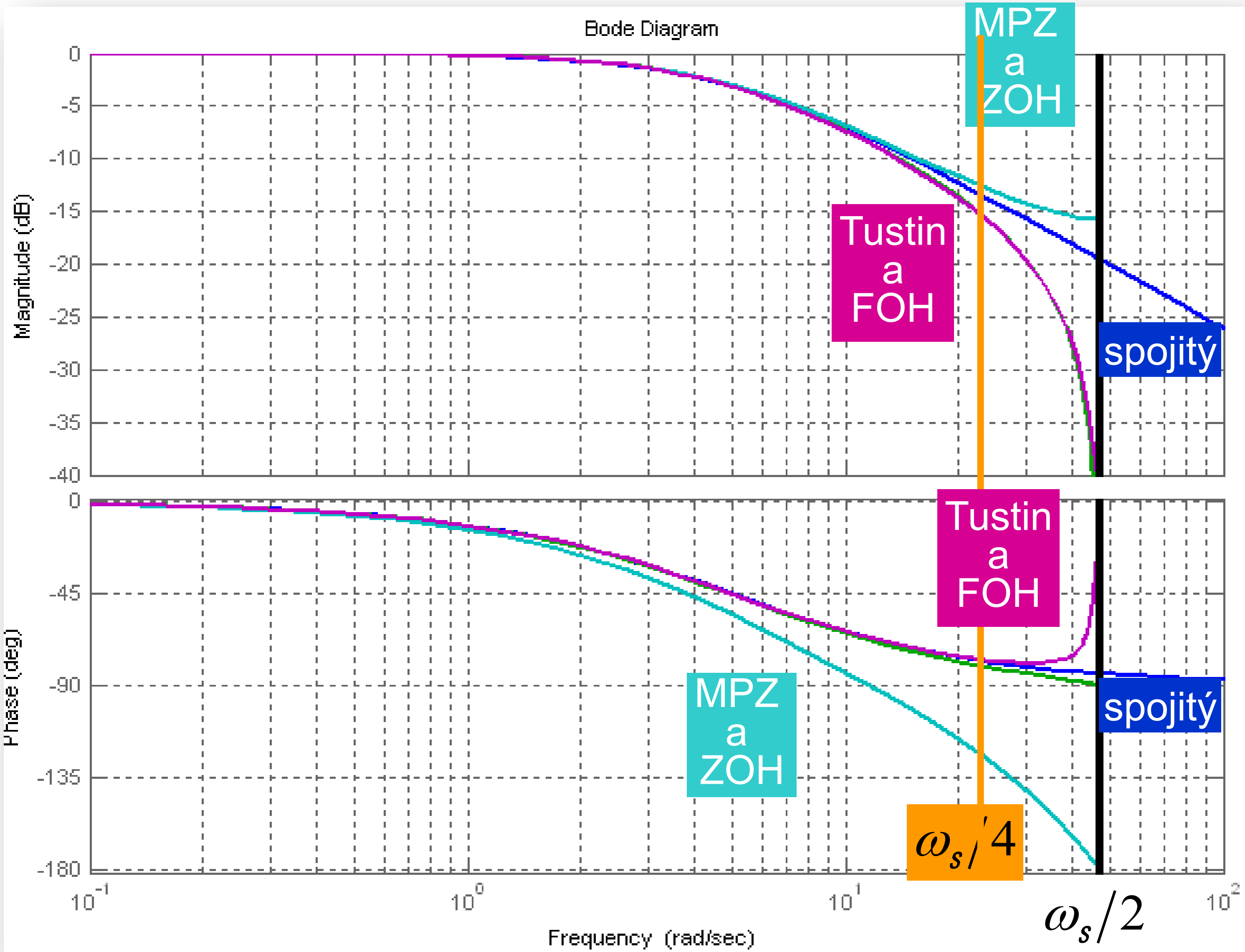
Porovnání metod

$$G(s)=\frac{5}{s+5}$$

$$T=1/15\ \text{s}$$

$$\omega_s \approx 94\,\text{rad}$$

- všechny OK asi do $\omega_s/4$



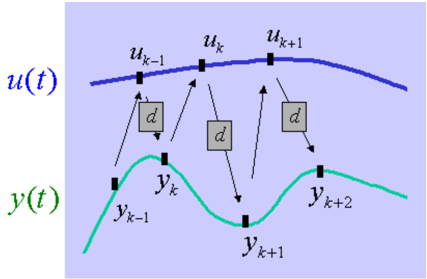
Příklad

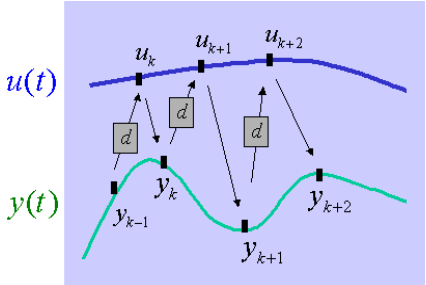
```
>> D=5/(s+5);DD=zpk(D)
Zero/pole/gain:
  5
-----
(s+5)
>> T=1/15;DDtustin=c2d(DD,T,'tustin'),DDmpz=c2d(DD,T,'matched'), ...
   DDzoh=c2d(DD,T,'zoh'),DDfoh=c2d(DD,T,'foh'), ...
   bode(DD,DDtustin,DDmpz,DDzoh,DDfoh)
Zero/pole/gain:
0.14286 (z+1)
-------------                  Sampling time: 0.066667
 (z-0.7143)
Zero/pole/gain:
 0.28347
----------                     Sampling time: 0.066667
(z-0.7165)
Zero/pole/gain:
 0.28347
----------                     Sampling time: 0.066667
(z-0.7165)
Zero/pole/gain:
0.14959 (z+0.8949)
------------------             Sampling time: 0.066667
    (z-0.7165)
>> omega=2*pi/T
omega = 94.2478
```

Problém okamžitého výpočtu

- v obou předchozích metodách vycházel
  stupeň čitatele v z = stupeň jmenovatele v z
- tedy diferenční rovnice regulátoru je

  $u(k)$ + členy s $k\text{-}1, k\text{-}2,\ldots = ce(k)$ + členy s $k\text{-}1, k\text{-}2,\ldots$
- takový číslicový regulátor musí počítat okamžitě
- zpoždění plynoucí z nenulové doby výpočtu je zanedbáno
- to je prakticky přijatelné jen pokud výpočetní čas < $1/10\ T$
- jinak musí mít diskrétní regulátor aspoň zpoždění 1 krok
- stupeň čitatele v z < stupeň jmenovatele v z
- dostaneme ho třeba tak, že v MPZ metodě stupeň nedorovnáme – Modifikované MPZ
- anebo to zpoždění musíme „přidat“ do soustavy





- nejde o dopravní zpoždění, je to jen způsob indexování

Aproximace spojitého PID regulátoru

Aproximace spojité stavové ZV - odvození

Aproximace spojité stavové ZV

- předpokládejme, že pro spojitou soustavu se stavovým modelem

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

- máme navrženou spojitou stavovou ZV

$$u(t) = Mu_c(t) - Lx(t)$$

- Kdybychom ji realizovali spojitě, dostali bychom spojitý ZV systém

$$\dot{x} = \left(A - BL\right)x + BMu_c = A_c x + BMu_c$$

$$y = Cx$$

- Bude-li $u_c(t)$ konstantní po celou periodu vzorkování h, má diskrétní model celkového systému tvar

$$x(kh + h) = \Phi_c x(kh) + \Gamma_c M u_c(kh) \quad \text{kde} \quad \Phi_c = e^{A_c h}, \quad \Gamma_c = \left(\int_0^h e^{A_c \tau} d\tau\right) B$$

Aproximace spojité stavové ZV

- Naším úkolem je ale najít číslicový regulátor, tj. počítač + vzorkovač + ZOH
- Proto diskretizujeme původní spojitou soustavu (se ZOH) s diskrétním modelem

$$x(kh+h) = \Phi x(kh) + \Gamma u(kh)$$, kde

$$\Phi = e^{Ah}$$

$$\Gamma = \left(\int_0^h e^{A\tau} d\tau \right) B$$

- a stavovou ZV realizujeme diskrétně

$$u(kh) = Mu_c(kh) - Lx(kh)$$

- Po připojení této diskrétní ZV ke spojité soustavě dostaneme výsledný systém s rovnicemi

$$x(kh+h) = \left(\Phi - \Gamma \tilde{L} \right) x(kh) + \Gamma \tilde{M} u_c(kh)$$

- Aby oba postupy daly stejný výsledek, muselo by platit

$$\Phi_c = \Phi - \Gamma \tilde{L}$$

- Bohužel to obecně nelze volbou matice $\tilde{L}$ zajistit

Aproximace spojité stavové ZV

- Zkusíme proto rovnost $\Phi_C = \Phi - \Gamma\tilde{L}$ splnit alespoň přibližně
- Předpokládejme, že $\tilde{L} = L_0 + L_1 h/2$
- Nejprve vyjádříme $\Phi_C = e^{A_C h}$ řadou:

$$\Phi_C = e^{(A-BL)h} \approx I + (A - BL)h + \left(A^2 - BLA - ABL - (BL)^2\right)h^2/2 + \cdots$$

- Podobně rozvine v řadu $\Phi = e^{Ah}, \Gamma = \left(\int_0^h e^{A\tau}\,d\tau\right)B$. Z toho

$$\Phi - \Gamma\tilde{L} = e^{(A-BL)h} - \Gamma\left(L_0 + L_1 h/2\right)$$
$$\approx I + (A - BL_0)h + \left(A^2 - ABL_0 - 2BL_1\right)h^2/2 + \cdots$$

- L_0, L_1 dostaneme porovnáním druhých a třetích členů:

2. členy ⇒ $L_0 = L$

3. členy ⇒ $L_1 = L(A - BL)$

⇒ $\boxed{\tilde{L} = L\left(I + (A - BL)h/2\right)}$

Aproximace spojité stavové ZV

- Obdobně přibližně určíme $\tilde{M}$ tak, aby oba systémy měly stejný ustálený stav, označme ho x_{ss}
pro stejný konstantní referenční vstup u_C
- Pro ustálené stavy platí

$$\left(I-\Phi_C\right)x_{ss}=\Gamma_C M u_C$$

$$\left(I-\left(\Phi-\Gamma\tilde{L}\right)\right)x_{ss}=\Gamma_C \tilde{M} u_C$$

- Levé strany obou rovností jsou stejné pro mocniny h a h^2
- Předpokládejme, že $\tilde{M}=M_0+M_1\,h/2$.
- Pak

$$\Gamma_C M \approx BMh+\left(A-BL\right)BM\,h^2/2+\cdots$$

$$\Gamma_C \tilde{M} \approx BM_0h+\left(BM_1+ABM_0\right)h^2/2+\cdots$$

- a porovnáním konečně $\boxed{\tilde{M}=\left(I-LB\,h/2\right)M}$

Příklad

- Pro dvojitý integrátor s maticemi

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

- Porovnáme spojitou stavovou ZV

$$u(t)=u_c(t)-\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

- Diskrétní stavovou ZV

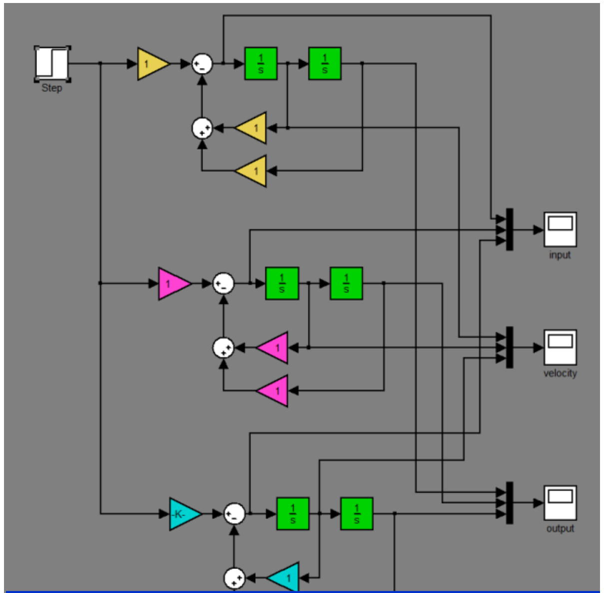
$$u(kh)=u_c(kh)-\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x(kh)$$

- A modifikovanou stavovou ZV

$$u(kh)=\tilde{M}u_c(kh)-\tilde{L}x(kh)$$

s maticemi

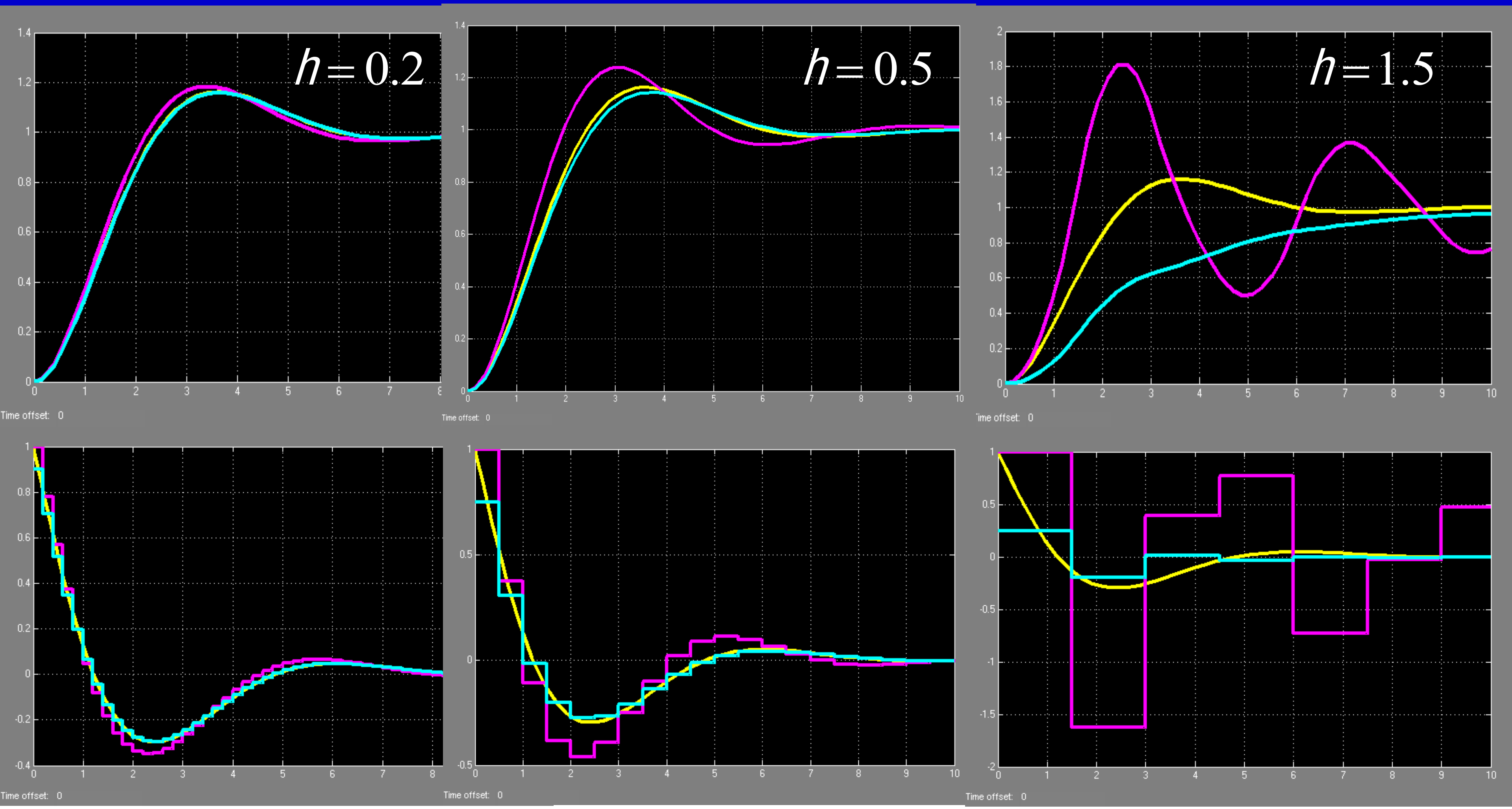
$$\tilde{L}=\begin{bmatrix}1-0.5h & 1\end{bmatrix}$$
$$\tilde{M}=1-0.5h$$



AW_8_4.mdl

- Výsledek: pro „malá“ *h* dávají oba diskrétní regulátory dobré výsledky, pro „velká“ *h* dávají oba špatné výsledky
- „Mezi tím“ funguje lépe modifikovaná diskrétní ZV

Příklad: `AW_8_4.mdl`



$$u(t) = u_c(t) - \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} x(t)$$

$$u(kh) = u_c(kh) - \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} x(kh)$$

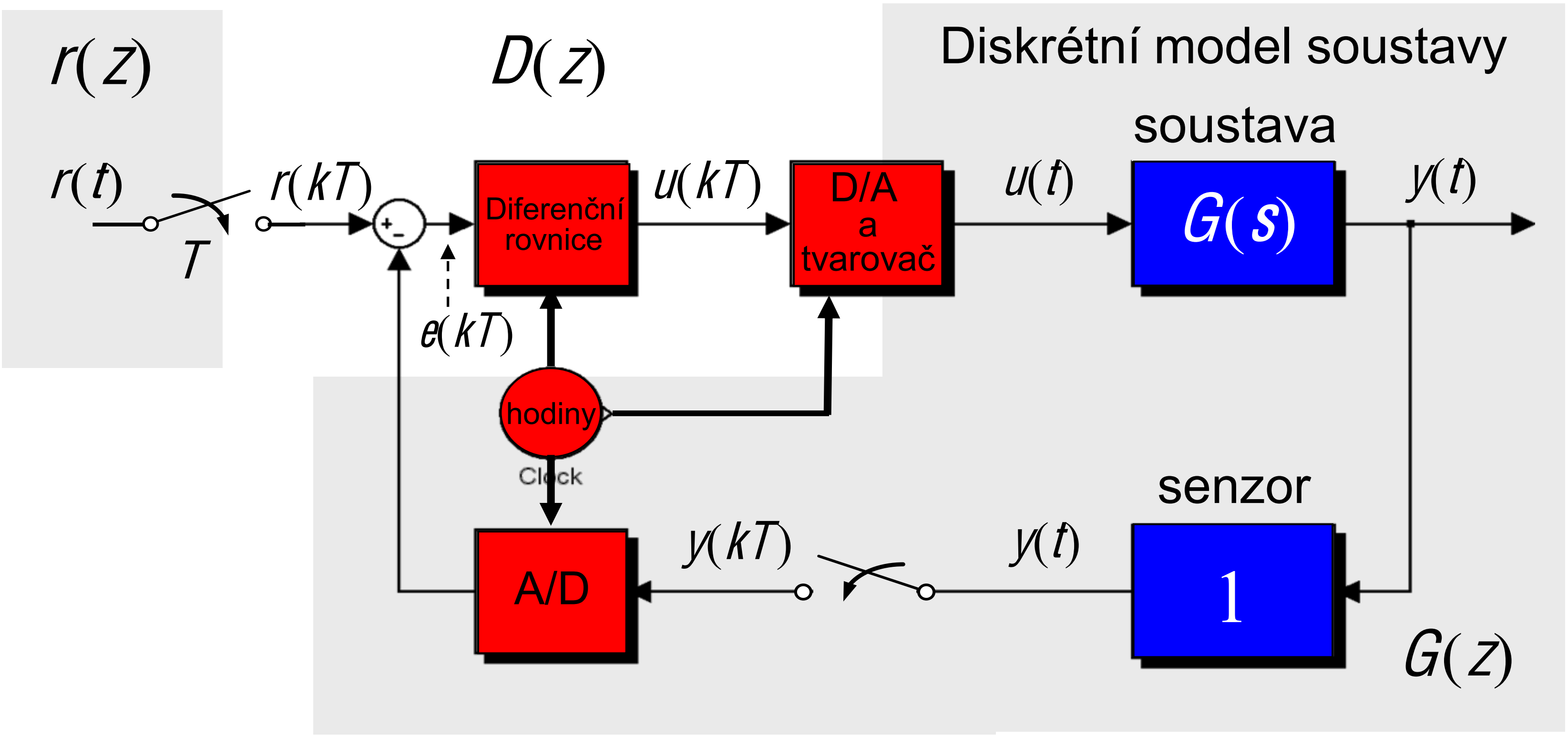
$$u(kh) = \tilde{M} u_c(kh) - \tilde{L} x(kh)$$

Diskrétní popis spojité soustavy dané přenosem

Tvarování

Diskrétní řízení

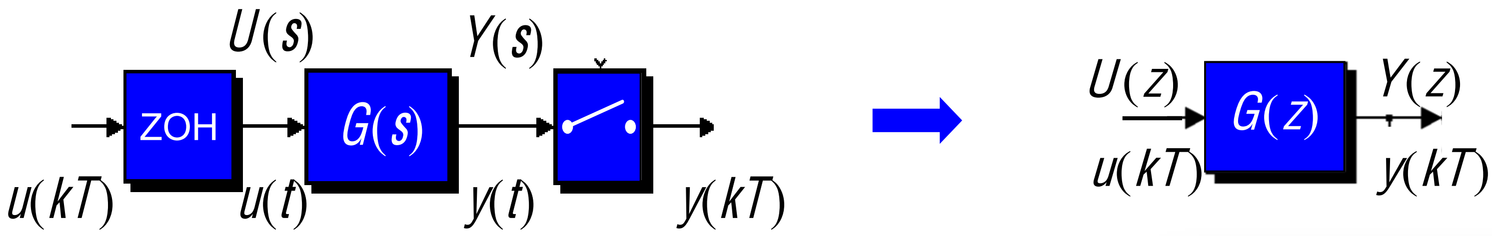
- „Diskrétní soustava“



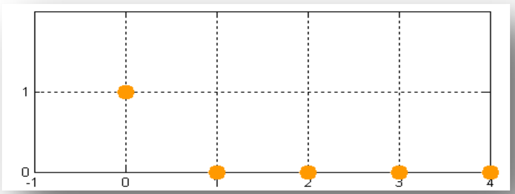
- nebo skutečně diskrétní soustava

Diskrétní popis soustavy - ZOH

Diskrétní přenos soustavy + tvarovacího členu 0. řádu (Zero-Order Hold)

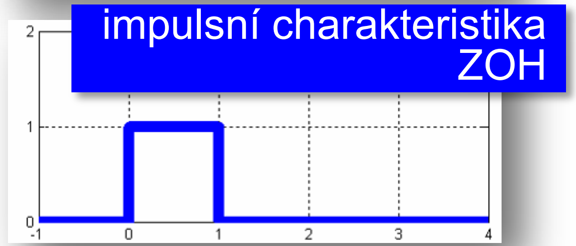


- diskrétní přenos je z-obraz diskrétní odezvy na diskrétní jednotkový puls
  $u(kT)=1$ pro $k=0$ a $u(kT)=0$ pro $k\neq 0$



- odezva ZOH na tento signál je spojitý puls

  $u(t)=1(t)-1(t-T)$ s L-obrazem $\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s}e^{-Ts}$



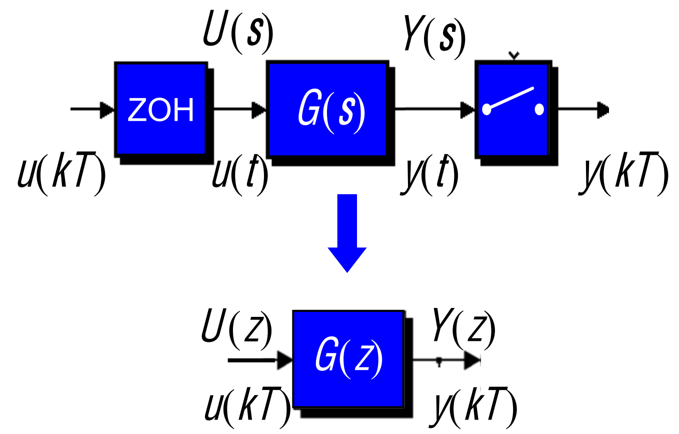
- odezva (spojité) soustavy na tento spojitý signál je

$$Y(s)=\left(1-e^{-Ts}\right)\frac{G(s)}{s}$$

- z čehož bychom vypočetli $y(t)$ a po vzorkování $y(kT)$

Diskrétní popis soustavy

- Tedy shrnuto



označíme takto

$$G(z)=\mathcal{Z}\{y(kT)\}$$
$$=\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}\}=\mathcal{Z}\{Y(s)\}$$
$$=\mathcal{Z}\left\{(1-e^{-Ts})\frac{G(s)}{s}\right\}$$

- Výsledek rozdělíme na rozdíl dvou částí:

$$G(z)=\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}-\mathcal{Z}\left\{e^{-Ts}\frac{G(s)}{s}\right\}$$

- Druhý člen přesně o jednu periodu zpožděný první člen, tedy

$$\mathcal{Z}\left\{e^{-Ts}\frac{G(s)}{s}\right\}=z^{-1}\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

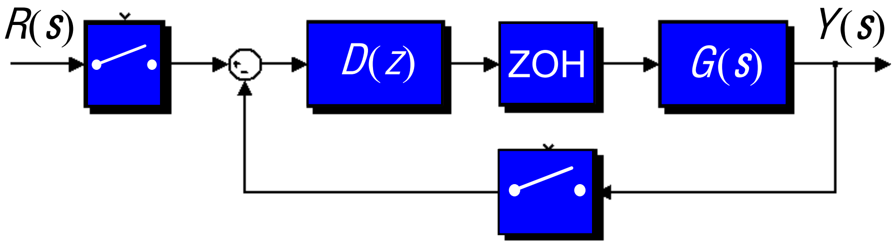
- Takže hledaný diskrétní přenos je

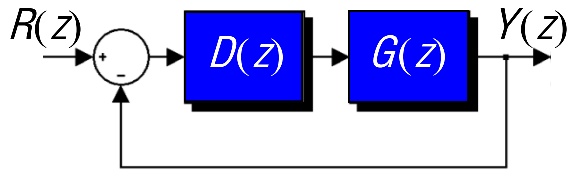
$$\boxed{G(z)=(1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}}$$

V Matlabu

```
c2d(G,T,'zoh')
c2d(G,T)
```

Příklad





- pro spojitý přenos

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

- je diskrétní přenos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s(s+a)}\right\} = 1 - e^{-at} \rightarrow 1 - e^{-akT}$$

$$\mathcal{Z}\left\{1 - e^{-akT}\right\} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

$$= \frac{(1 - e^{-aT}) z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT} z^{-1})}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1})\, \mathcal{Z}\left\{\frac{a}{s(s+a)}\right\} =$$

$$= (1 - z^{-1}) \frac{(1 - e^{-aT}) z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-aT} z^{-1})}$$

$$= \frac{1-\alpha}{z-\alpha}, \qquad \alpha = e^{-aT}$$

```
>> sdf(c2d(tf(1/(s+1)),1,'zoh'))
ans =
        0.6321
      ----------            reduced
      (z-0.3679)
```

Příklad: Dopravní zpoždění

- spojitý přenos části mixeru

$$G(s)=\frac{T_e(s)}{T_{ec}(s)}=e^{\tau_d s}H(s)=e^{\tau_d s}\frac{s}{s+a}$$

- pro hodnoty $a=1, T=1, \tau_d=1.5$ najdeme diskrétní přenos
- protože dopravní zpoždění τ_d (zahrnující zpoždění v procesu i při výpočtu) není celočíselným násobkem periody vzorkování T, rozdělíme ho na

$$\tau_d = lT - mT, l\in Z, m<1, m\in R \Longrightarrow 1.5=2-0.5, T=1, l=2, \lambda=0.5$$

- tak dostaneme

$$\frac{G(s)}{s}=e^{-lTs}\frac{e^{-mTs}H(s)}{s}$$

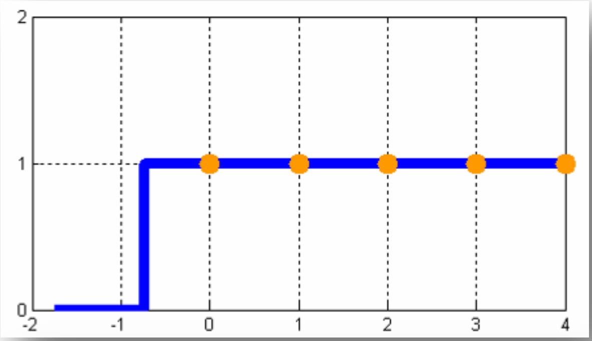
- přičemž člen e^{-lTs} nakonec přejde na z^{-l}

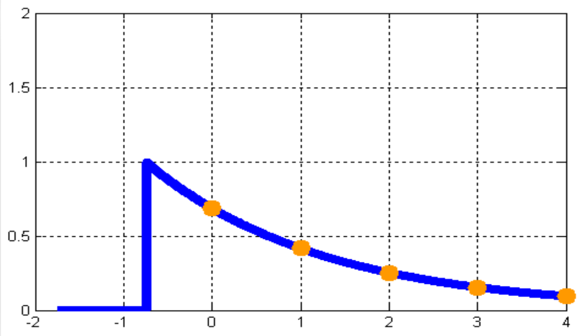
Příklad: Dopravní zpoždění

- po dosazení a rozkladu na parciální zlomky dostaneme

$$G(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \left(1 - z^{-1}\right) z^{-l} \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{-mTs}}{s} - \frac{e^{-mTs}}{s+a}\right\}$$

- $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{e^{-mTs}}{s}\right\}$ je jednotkový skok posunutý o mT sekund
- $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{e^{-mTs}}{s+a}\right\}$ je stejně posunutá exp.





- protože posunutí jsou o méně než celou periodu ($m<1$), nebere se vzorek pro $t<0$
- vzorky $1(kT) \Rightarrow z/(z-1)$

  jsou $e^{-aT(k+m)}1(kT) \Rightarrow ze^{-amT}/(z-e^{-aT})$
- tedy

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\frac{1}{z^{l}}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{ze^{-amT}}{z-e^{-aT}}\right) = \left(1 - e^{-amT}\right)\frac{z+\alpha}{z^{l}\left(z-e^{-aT}\right)}$$

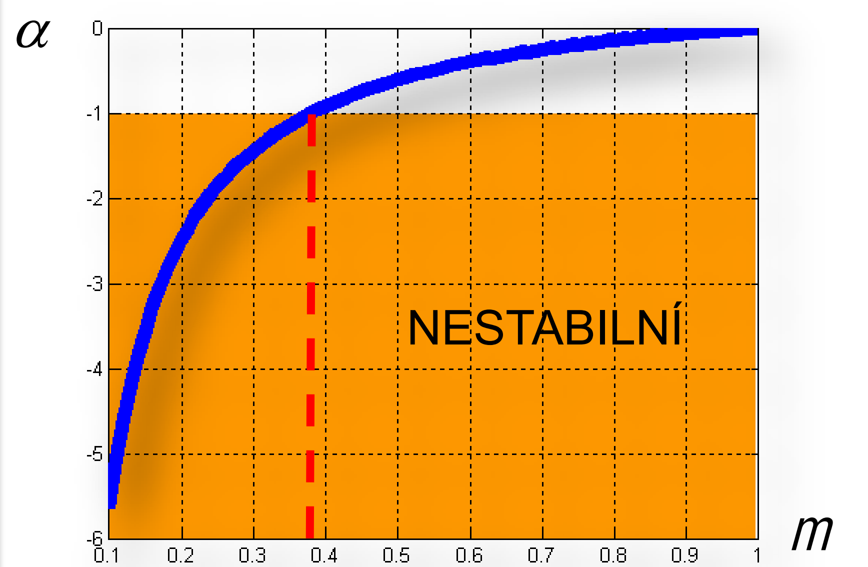
Příklad: Dopravní zpoždění

- pro hodnoty $a=1, T=1, \tau_d=1.5$

```
>> G=tf([1],[1 1],'iodelay',1.5)
Transfer function:
                1
exp(-1.5*s) * -----
              s + 1
>> Gd=c2d(G,1,'zoh')
Transfer function:
         0.3935 z + 0.2387
z^(-1) * -----------------
          z^2 - 0.3679 z
Sampling time: 1
>> Gd/.3935
Transfer function:
           z + 0.6065
z^(-1) * --------------
         z^2 - 0.3679 z
Sampling time: 1
```

- spojitý přenos nemá nulu
- diskrétní přenos má nulu v

$$-\alpha = -\frac{e^{-amT}-e^{-aT}}{1-e^{-amT}}$$

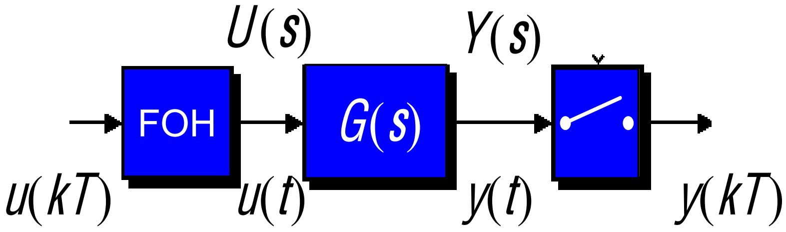


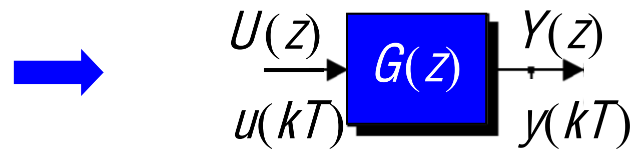

```
>> m=0.1:0.01:1;alpha=(exp(-m)-exp(-1))...
./(1-exp(-m)); plot(m,-alpha),syms m
>> m_sb=solve('(exp(-m)-exp(-1))/(1-exp(-m))=1')
m_sb = -log(1/2*exp(-1)+1/2)
>> vpa(m_sb,3)     ans = .380
```

Diskrétní popis soustavy - FOH

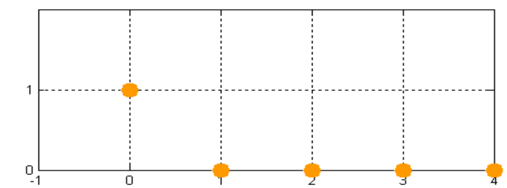
Diskrétní přenos soustavy + tvarovacího členu 1. řádu (First-Order Hold)

nekauzální FOH, trojúhelníkový hold



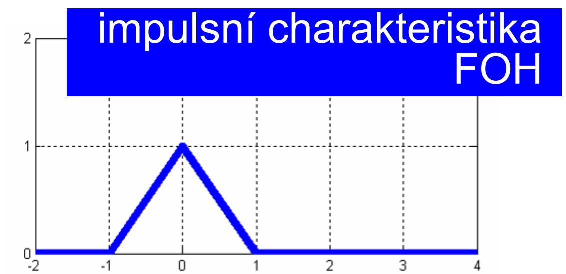


- diskrétní přenos je z-obraz diskrétní odezvy na diskrétní jednotkový puls



- odezva FOH na tento signál je spojitý puls

$$u(t) = \frac{t}{T}1(t+T) - 2\frac{t}{T}1(t) + \frac{t}{T}1(t-T)$$



- s L-obrazem

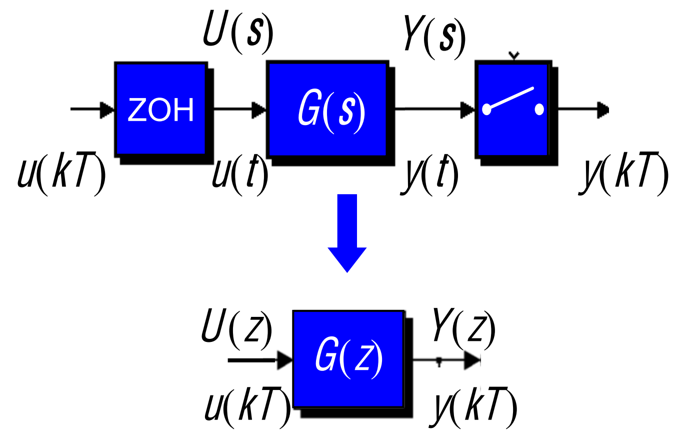
$$\frac{e^{Ts} - 2 + e^{-Ts}}{Ts^2}$$

- odezva (spojité) soustavy na tento spojitý signál je

$$Y(s) = \frac{e^{Ts} - 2 + e^{-Ts}}{T}\frac{G(s)}{s^2}$$

- z čehož bychom vypočetli $y(t)$ a po vzorkování $y(kT)$

Diskrétní popis soustavy - FOH



- Tedy shrnuto

označíme takto

$$G(z)=\mathcal{Z}\{y(kT)\}=\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}\}=\mathcal{Z}\{Y(s)\}$$

$$=\mathcal{Z}\left\{\frac{e^{Ts}-2+e^{-Ts}}{T}\frac{G(s)}{s^2}\right\}$$

- Výsledek rozdělíme na součet tří částí:

$$G(z)=\frac{1}{T}\left(\mathcal{Z}\left\{e^{Ts}\frac{G(s)}{s^2}\right\}-2\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s^2}\right\}+\mathcal{Z}\left\{e^{-Ts}\frac{G(s)}{s^2}\right\}\right)$$

- Druhý člen přesně o jednu periodu zpožděný první člen, tedy

$$G(z)=\frac{z-2+z^{-1}}{T}\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s^2}\right\}=\frac{z^2-2z+1}{Tz}\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s^2}\right\}$$

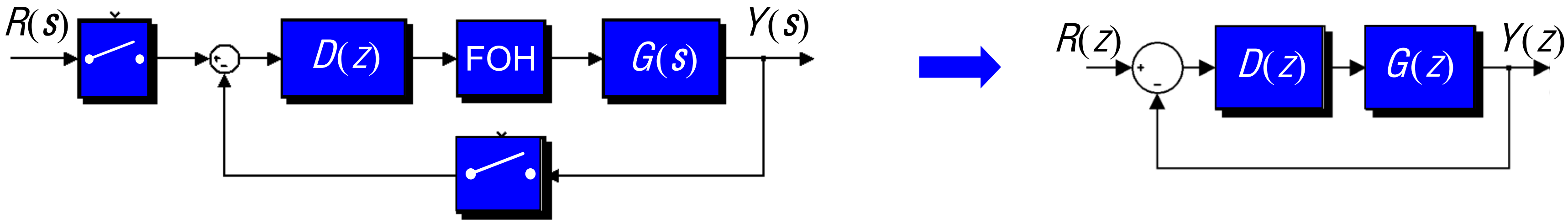
- Takže hledaný diskrétní přenos je

$$\boxed{G(z)=\frac{(z-1)^2}{Tz}\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s^2}\right\}}$$

V Matlabu

```
c2d(G,T,'foh')
```

Příklad



- pro spojitý přenos $\boxed{G(s)=\frac{1}{s^2}}$ napřed vypočteme

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s^2}\right\}=\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}=\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{6}(kT)^3\right\}=\frac{T^3}{6}\mathcal{Z}\{k^3\}=\frac{T^3}{6}\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$$

- Pak je diskrétní přenos

$$G(z)=\frac{(z-1)^2}{Tz}\frac{T^3}{6}\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$$

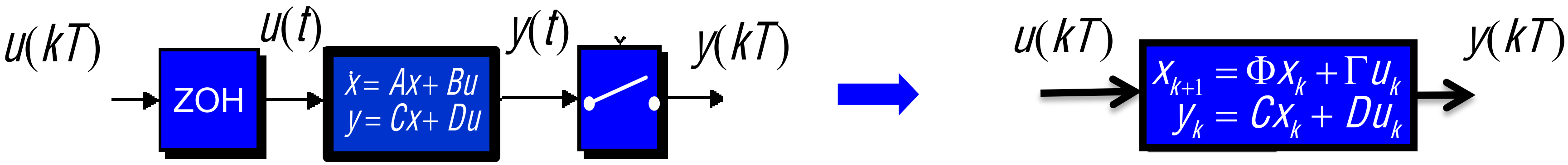
$$=\boxed{\frac{T^2}{6}\frac{(z^2+4z+1)}{(z-1)^2}}$$

```
>> Gz=c2d(tf(1/s^2),1,'foh')
Transfer function:
0.1667 z^2 + 0.6667 z + 0.1667
------------------------------
        z^2 - 2 z + 1
Sampling time: 1
>> Gzp=sdf(Gz)
Gzp =
    0.1667(z+3.7321)(z+0.2679)
    --------------------------
          (z-1)(z-1)
```

Diskrétní popis spojité soustavy dané stavovým modelem

Diskrétní popis stavového modelu

Diskrétní stavový model soustavy + tvarovacího členu 0. řádu



- Při odvození diskrétního modelu vyjdeme z modelu spojitého

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

- Je-li tento systém v čase t_0 ve stavu $x(t_0)$, pak v čase $t \geq t_0$ je ve stavu

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

- kde pro výpočet musíme znát vstup (řízení) v celém intervalu $[t_0, t)$

Diskrétní popis stavového modelu

- Při hledání diskrétního modelu nás zajímá, jaký závisí stav v čase t_{k+1} na stavu v čase t_k za předpokladu ZOH, tj. konstantního vstupu $u_k = u(\tau), \tau \in [t_k, t_{k+1})$ během celého intervalu mezi vzorkováními
- Označíme-li $T = t_{k+1} - t_k$, a použijeme předchozí vzoreček, dostaneme

$$
\begin{aligned}
x(t_{k+1}) &= e^{A(t_{k+1}-t_k)} x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau \\
&= e^{AT} x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} d\tau\, Bu(t_k) \qquad \nu = t_{k+1} - \tau \\
&= e^{AT} x(t_k) + \left(\int_0^T e^{A\nu} d\nu \right) Bu(t_k)
\end{aligned}
$$

- Protože výstupní rovnici vzorkování nezmění, dostaneme diskrétní model, kde je

$$
\begin{aligned}
x(t_{k+1}) &= \Phi x(t_k) + \Gamma u(t_k) \\
y(t_k) &= Cx(t_k) + Du(t_k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi &= e^{AT} \\
\Gamma &= \left(\int_0^T e^{A\nu} d\nu \right) B
\end{aligned}
$$

Výpočet maticové exponenciály

- Existuje mnoho metod pro výpočet maticové exponenciály a jejího integrálu

$$\Phi = e^{AT}, \quad \Gamma = \left(\int_0^T e^{Av}\, dv \right) B$$

- Rozklad exponenciály v Taylorovu řadu

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}.$$

$$\Psi = \int_0^T e^{Av}\, dv = IT + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2T^3}{3!} + \cdots \frac{A^iT^{i+1}}{(i+1)!} + \cdots$$

$$\Phi = I + A\Psi$$
$$\Gamma = \Psi B$$

`>> expmdemo2`

- Laplaceova transformace

$$\mathcal{L}\left\{e^{AT}\right\} = (sI - A)^{-1}$$

- Jordanův tvar (vlastní čísla)

$$A = V \operatorname{diag}\{\lambda_i\} V^{-1} \quad \Rightarrow \quad e^{AT} = V \operatorname{diag}\left\{e^{\lambda_i}\right\} V^{-1}$$

`>> expmdemo3`

- Caylay-Hamiltonův teorém
- Matlabská funkce **`expm`** – Padého aprox.

`>> expmdemo1`

Příklad: systém 1. řádu

- Pro spojitý systém 1. řádu

$$\dot{x} = \alpha x + \beta u$$

- a periodu vzorkování h je

$$\Phi = e^{AT} = e^{\alpha h}$$

$$\Gamma = \left(\int_0^T e^{Av} dv\right) B = \left(\int_0^h e^{\alpha v} dv\right) \beta = \frac{\beta}{\alpha}\left(e^{\alpha v} - 1\right)$$

- Takže diskrétní popis vzorkovaného systému (se ZOH) je

$$x(k+1) = e^{\alpha h} x(k) + \frac{\beta}{\alpha}\left(e^{\alpha v} - 1\right) u(k)$$

Příklad: dvojitý integrátor

- Pro dvojitý integrátor se stavovým popisem
$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t)$$

- Vzorkovaný s periodou h je
$$\Phi=e^{Ah}=I+Ah+A^2h^2/2+\ldots=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & h\\ 0 & 0\end{bmatrix}+0+\cdots=\begin{bmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$\Gamma=\left(\int_0^h e^{Av}B\,dv\right)=\int_0^h\begin{bmatrix}v\\ 1\end{bmatrix}dv=\begin{bmatrix}h^2/2\\ h\end{bmatrix}$$

- Takže diskrétní popis vzorkovaného systému (se ZOH) je
$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}h^2/2\\ h\end{bmatrix}u(k)$$
$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(k)$$

- z toho můžeme vypočítat přenos $C(zI-A)^{-1}B=$
$$=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z-1 & -h\\ 0 & z-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}h^2/2\\ h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/(z-1) & h/(z-1)^2\\ 0 & 1/(z-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h^2/2\\ h\end{bmatrix}=\frac{h^2}{2}\frac{z+1}{(z-1)^2}$$