Metódy výpočtu diskrétných prenosových funkcií v DRO

Výpočet G(z),G(z,ε) pri uvažovaní spojitej časti diskrétneho regulačného obvodu, ktorú predstavuje sériovo radený tvarovač a regulovaný systém:

Praktický výpočet diskrétnej prenosovej funkcie

A. Ak uvažujeme, **tvarovač nultého rádu**, potom diskrétna prenosová funkcia sa určí postupnosťou vykonania týchto operácií:

- Určenie spätnej Laplaceovej transformácie $\boldsymbol{L}^{-1}\{G(s)/s\}$, získanie časovej funkcie $h_p(t)$
- Zámena $t=(k+\varepsilon)T$
- Určenie z-obrazov dielčich členov $h_p(t)\, /_{t=(k+\varepsilon)T}$ podľa tabuliek
- Vynásobenie dielčich obrazov výrazom $(z-1)/z$ alebo $1-z^{-1}$

Pre komplikovanejší tvar spojitej prenosovej funkcie je výhodné použiť **univerzálny postup (Kozák 1989)**, ktorý vychádza zo všeobecného vyjadrenia spojitého systému v tvare prenosu:

$$\mathbf{G(s) = \frac{b_q s^q + b_{q-1} s^{q-1} + \dots + b_1 s^1 + b_0}{s^r(a_p s^p + a_{p-1} s^{p-1} + \dots + a_1 s^1 + a_0)} \qquad q < p}$$

r je rád astatizmu a r + p = n je rád systému

Prenosovú funkciu môžeme rozložiť na parciálne zlomky napr. v v tvare:

$$\mathbf{G(s)} = \boxed{\sum_{j=1}^{r} \frac{K_j}{s^j} + \sum_{i=r+1}^{p} \frac{L_i}{T_i s + 1}}$$

Vyriešením sústavy rovníc *$(L_i, K_j) = f(b_i)$* získame koeficienty *(K_j, L_i)*

Spätnou Laplaceovou transformáciou parciálnych prenosov získame časovú funkciu **h(t)** ako súčet exponenciál

$$h(t)=\sum_{j=1}^{r}K_j\,\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}+\sum_{i=r+1}^{p}L_i\,exp(-\frac{t}{T_i})$$

h(t) je časová impulzná funkcia predstavujúca odozvu na Diracov impulz.

•Podľa zvolenej periódy vzorkovania môžeme potom priamo vypočítať koeficienty $\{b_i\}$ a $\{a_i\}$ diskrétneho prenosu.

•Koeficienty menovateľa diskrétneho prenosu sú jednoznačne určené reálnymi koreňmi charakteristickej rovnice t.j. $z_i = D_i = exp(-\frac{T}{T_i})$ $i = r+1, r+2,...,n$

Polynóm menovateľa má tvar :

$$A(z)=(z-1)^r\prod_{i=1}^{p}(z-z_i) = a_0z^n + a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z + a_n$$

alebo v tvare záporných mocnín z^{-i}, pre i=1, 2,..., n

$$A(z)=a_0+a_1z^{-1}+...+a_{n-1}z^{-(n-1)}+a_nz^{-n}$$

Koeficienty čitateľa sa určia zo vzťahu

$b_k = h(kT)+a_1h[T(k-1)]+a_2h[T(k-2)]+...+a_kh(0)$

pre $k=0,1,2,...,n$

- K určeniu všetkých koeficientov potrebujeme poznať (k+1) hodnôt h(kT) včítane h(0).

- Ak chceme z hodnôt K_j, L_i a T_i určiť diskrétny prenos spojitého systému aj s tvarovačom nultého rádu, potom funkcia $h_p(t)$ (prechodová funkcia) dielčích prenosov je určená vzťahmi:

$$h_p(t) = L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\sum_{j=1}^{r+1}\frac{K_j}{s^j} + \sum_{i=r+2}^{p}\frac{L_i}{T_i s+1}\right\}$$

$$h_p(t) = \sum_{j=1}^{r+1}\frac{K_j t^{j-1}}{(j-1)!} + \sum_{i=r+2}^{p} L_i \exp(-\frac{t}{T_i})$$

Nech $g(t)_{t=kT}=h(kT)=h_p(kT)-h_p[T(k-1)]$

(Funkcia $h(t)=h_p(t)-h_p(t-T)$ predstavuje odozvu systému na impulz o šírke T.)

Pre výpočet koeficientov menovateľa diskrétnej prenosovej funkcie s tvarovačom platia tie isté vzťahy ako bez tvarovača) a pre výpočet koeficientov čitateľa vzťahy

$$b_k=g(k)+a_1g(k-1)+a_2g(k-2)+...+a_kg(0)$$

Diskrétna prenosová funkcia sa dá potom vyjadriť:

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

kde polynómy **A(z) a B(z)** sú vyjadrené v kladných alebo záporných mocninách z .

Pre dalšie úvahy predpokladáme ,že polynómy A(z),B(z) sú vyjadrené :

$B(z) = b_0+b_1z^{-1}+...+b_mz^{-m}$, $A(z) = a_0+a_1z^{-1}+...+a_nz^{-n}$, $m <= n$

Vzťahy pre výpočet koeficientov čitateľa diskrétnej prenosovej funkcie môžeme jednoducho odvodiť z vlastnosti diskrétneho prenosu:

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0+b_1z^{-1}+...+b_mz^{-m}}{a_0+a_1z^{-1}+...+a_nz^{-n}} = \sum_{i=0}^{\infty} g(i)z^{-i}$$

pričom **$a_0=1$, $g(k)=g(kT)$, $k=0,1,2,...$** sú poradnice odozvy systému na impulz šírky T.

Úpravou prenosu a osamostatnením polynómu B(z):

$$B(z)=A(z)\sum_{i=0}^{\infty} g(i)z^{-i}$$

$$= (a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+...a_nz^{-n})(g(0)+g(1)z^{-1}+g(2)z^{-2}+...+)=$$

$$=b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+...+b_mz^{-m}$$

$$b_0=a_0g(0)$$

$$b_1=a_1g(0)+a_0g(1) \qquad (*)$$

$$b_2=a_0g(2)+a_1g(1)+a_2g(0)\dots.$$

$$b_k=a_0g(k)+a_1g(k-1)+a_2g(k-2)+...+a_kg(0), \text{ pre } k <= m$$

Rovnice môžeme použiť pre výpočet koeficientov polynómu B(z) a tak isto zo znalosti koeficientov a_i, b_i môžeme odvodiť rekurzívny vzťah pre výpočet poradníc g(kT).

Zo vzťahov (*) môžeme určiť hodnoty g(i), pre i = 0, 1,...,k

$$g(0)=b_0 / a_0$$

$$g(1)=1/a_0[(b_1-a_1g(0)]$$

$$g(2)=1/a_0[(b_2-a_1g(1)-a_2g(0)]$$

:..

$$g(k)=b_k-a_0g(k)-a_1g(k-1)-a_2g(k-2)-...-a_kg(0)$$

Príklad Z2 : Určenie diskrétnych prenosových funkcií s tvarovačom a bez tvarovača spojitých systémov vyjadrených prenosovými funkciami pri jednoduchých póloch systému prvého a druhého rádu, viacnásobných póloch a komplexných póloch.

1. $G_1(s) = \dfrac{K}{1+T_1 s} = \dfrac{2}{1+2s}$

2. $G_2(s) = \dfrac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \dfrac{1}{(s+1)(2s+1)}$

3. $G_3(s) = \dfrac{K}{(T_3 s+1)^3} = \dfrac{20}{(1+3s)^3}$

4. $G_4(s) = \dfrac{K}{T^2 s^2+2bTs+1} = \dfrac{1}{s^2+2s+2}$

Perióda vzorkovania T = 0.5s.

Riešenie:

1.a) (Bez tvarovača, klasický postup

$$G_1(s)=\frac{K}{1+T_1 s}$$, najprv určíme impulznú funkciu

$$g_1(t)=\mathbf{L}^{-1}\{G_1(s)\}=\boldsymbol{L}^{-1}\left\{\frac{K/T_1}{s+1/T_1}\right\} \cdot \frac{K}{T_1} e^{-t/T_1}$$

Diskrétnu impulznú funkciu dostaneme dosadením za t=kT (t=(k+ε)T)

$$g_1(kT) = \frac{K}{T_1} e^{-kT/T_1} = \frac{K}{T_1} D^k, \quad D=\exp(-T/T_1),$$

(T je perioda vzorkovania)

Diskrétna prenosová funkcia sa určí z tabuliek :

$$G_1(z) = \mathbf{Z}\{K/T_1\, D^k\} = \frac{K}{T_1}\,\frac{z}{z-D} = \frac{K/T_1 z}{z-\exp(-T/T_1)} =$$

$$= \frac{K}{T_1}\,\frac{1}{1-Dz^{-1}}$$

(Analogicky postupujeme pri určovaní Z-obrazu $g_1(t)$, pre $t=(k+\varepsilon)T$:

$$g_1(k+\varepsilon)T = \frac{K}{T_1}\, e^{-(k+\varepsilon)T/T_1} = \frac{K}{T_1}\, D^k D^{\varepsilon}$$

$D=\exp(-T/T_1)$

(D^{ε} je konštanta)

$$\mathbf{Z}\{KT_1 D^k D^\varepsilon\} = \frac{K}{T_1}\;\frac{z}{z-D}\,D^\varepsilon = D^\varepsilon\;\frac{K}{T_1}\;\frac{1}{1-Dz^{-1}} = G_1(z,\varepsilon)$$

Konkretizáciou pre K =2,

$$D=\exp(-T/T_1) = \exp(-0.52) = 0.7788$$

$$\varepsilon = 0.5$$

$$G_1(z) = \frac{z}{z-0.7788} \qquad\qquad G_1(z, \varepsilon) = \frac{0.882496}{z-0.7788}$$

Predelením čitateľa a menovateľa najvyššou mocninou (v menovateli) dostaneme vyjadrenie diskrétnej prenosovej funkcie v záporných mocninách z.

1b) Ak k spojitej sústave $G_1(s)$ je pripojený tvarovač nultého rádu, potom diskrétná prenosová funkcia je určená :

$$G_{11}(z,\varepsilon)=G_{TC}G_1(z)=(1-z^{-1})Z\{L^{-1}[\frac{G(s)}{s}]_{t=(k+\varepsilon)T}\}$$

Ak postupujeme klasickým postupom, potom $\mathbf{G_1(s)/s}$ rozložíme na parciálne zlomky, určíme spätnou Laplaceovou transformáciou časovú funkciu $\mathbf{h_p(t)}$:

$$h_p(t)=L^{-1}[\frac{G_1(s)}{s}]= L^{-1} [\frac{K}{(T_1s+1)\, s}]=L^{-1}[\frac{L_1}{s} + \frac{L_2}{T_1s+1}]$$

Riešením je $L_1=K$ $L_2= -KT_1$

Prechodová funkcia $h_p(t) = K(1 - e^{-t/T_1})$

Zámenou **t=kT** resp. **t=(k+εT)** dostaneme diskrétnu funkciu, na ktorú ak aplikujeme **Z**-transformácie dostaneme

$$Z\{h_p(kT)\} = Z\{K\} - Z\{Ke^{-kT/T_1}\} = K\frac{z}{z-1} - K\frac{z}{z-\exp(-T/T_1)}$$

$$= \frac{K(1-\exp(-T/T_1))z}{(z-1)(z-\exp(-T/T_1))} = \frac{K(1-D)z}{(z-1)(z-D)} \qquad D=\exp(-T/T_1)$$

Výsledný prenos spojitého prenosu $G_1(s)$ s tvarovačom nultého rádu je potom určený

$$G_{11}(z,0) = (1-z^{-1})\frac{K(1-D)z}{(z-1)(z-D)} = \frac{K(1-D)}{z-D} =$$

$$= \frac{K(1-D)z^{-1}}{1-Dz^{-1}} = \frac{b_1 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}}$$

kde $b_1=K(1-D)$, $a_1 = -D$, $b_0 = 0$

Ak dosadíme do prech.funkcie za $t=(k+\varepsilon)T$ dostaneme diskrétnu funkciu **$h_p[(k+\varepsilon)T] = K\{1-\exp[-(k+\varepsilon)T/T_1]\}$**

Aplikáciou Z-transformácie

$$\mathbf{Z}\{h_p[(k+\varepsilon)T] = \mathbf{Z}\{K\}-\mathbf{Z}\{K\,D^k D^\varepsilon\} = K\,\frac{z}{z-1}\;KD^\varepsilon\,\frac{z}{z-D} =$$

$$= \frac{K[z^2(1-D^\varepsilon)+z(D^\varepsilon-D)]}{(z-1)(z-D)} = \frac{b_{1\varepsilon}z^2+b_{0\varepsilon}z}{(z-1)(z-D)}$$

Výsledná diskrétna prenosová funkcia pre $G_1(s)$ aj s tvarovačom nultého rádu pre $\varepsilon \to 0$

$$G_{11}(z,\varepsilon) = \cancel{(1-z^{-1})}\,\frac{b_{1\varepsilon}z^2+b_{0\varepsilon}z}{\cancel{(z-1)}(z-D)} = \frac{b_{1\varepsilon}z+b_{0\varepsilon}}{z-D}$$

kde $b_{1\varepsilon}=K(1-D^\varepsilon)$ $\qquad b_{0\varepsilon}=(D^\varepsilon-D)K$

Konkretizáciou K=2, T_1=2, T=0.5, D = exp(-0.52) = 0.7788008

Bez tvarovača:

$$G_1(z,0) = G_1(z) = \frac{z}{z-0.7788008} = \frac{1}{1-0.7788008z^{-1}}$$

S tvarovačom:

$$G_{TC}G_1(z) = G_{11}(z) = \frac{0.4423984}{z-0.7788008} = \frac{0.4423984z^{-1}}{1-0.7788008z^{-1}}$$

Z prenosu $G_1(z)$ resp. $G_{11}(z)$ môžeme určiť diferenčnú rovnicu vyjadrujúcu vstupno-výstupnú závislosť :

$$G_{11}(z) = \frac{0.4423984z^{-1}}{1-0.7788008z^{-1}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

jej roznásobením

$$0.4423984z^{-1}U(z) = (1-0.7788008z^{-1})Y(z)$$

$$0.4423984u(k-1) = y(k) - 0.7788008y(k-1)$$

$$y(k) = 0.4423984u(k-1) + 0.7788y(k-1)$$

kde $Y(z)z^{-1}$--------> $y(k-1)$ $U(z)z^{-1}$ ------> $u(k-1)$

2. Uvažujeme spojitý dynamický systém, ktorý je vyjadrený prenosovou funkciou :

$$G_2(s) = \frac{1}{(s+1)(2s+1)}$$

2.a) Určenie diskrétnej prenosovej funkcie $G_2(z,\varepsilon)$ bez tvarovača. Diskrétna prenosová funkcia sa určí:

$$G_2(z,\varepsilon) = \boldsymbol{Z}\{\, \boldsymbol{L}^{-1}[\, G(s)\,]_{t=(k+\varepsilon)T}\}$$

(Prenos sa rozloží na parciálne zlomky, spätnou Laplaceovou transformáciou sa určia časové funkcie jednotlivých zlomkov, teda získame funkciu $\mathbf{g(t)/}_{t=(k+\varepsilon)T}$ a podľa tabuľkových vzorov určíme obrazy diskrétnych funkcií)

Použitie **univerzálneho postupu** je vhodné predovšetkým pre účely algoritmizácie výpočtu diskrétnych prenosových funkcií.

Pri jeho použití postupujeme nasledovne :

- prenosovú funkciu rozložíme na parciálne zlomky

$$G_2(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{1}{(s+1)(2s+1)} = \sum_{i=1}^{2}\frac{L_i}{T_is+1} =$$

$$= \frac{L_1}{(T_1s+1)} + \frac{L_2}{(T_2s+2)}$$

(r-rád astatizmu, r=0, n-rád menovateľa, n=2)

Riešením sústavy rovníc určíme L_1 a L_2

$$L_1T_2+L_2T_1 = 0$$
$$L_1+L_2 = 1$$

$$L_1 = \frac{T_1}{T_2-T_1} \qquad L_2 = \frac{T_2}{T_2-T_1}$$

Konkretizáciou pre $T_1=1;\ T_2=2;\ L_1=-1;\ L_2=2;\ T=0.5$

Impulzná funkcia *g*(t) :

$$g(t) = h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\sum_{i=1}^{2} \frac{L_i}{1+T_i s}\} = \frac{L_1}{T_1}\exp(-t/T_1) + \frac{L_2}{T_2}\exp(-t/T_2)$$

$$= -\exp(-t) + \exp(-0.5t), \quad \text{pre } t > 0$$

$$h(t) = 0, \text{ pre } t=0$$

Koeficienty menovateľa diskrétnej prenosovej funkcie určíme podľa

$$A(z) = \prod_{i=1}^{n=2}(z-z_i), \text{ kde } z_i = D_i = \exp(-T/T_i) \text{ pre } i=\langle 1\ ,\ 2\rangle,$$

$$z_1=\exp(-0.5/1),\ z_2=\exp(0.5/2)$$

$$A(z) = (z-\exp(-0.5/1))*(z-\exp(-0.5/2)) =(z-0.60653)(z-0.7788) =$$
$$= z^2-1.3853z+0.47236$$

$A(z) = (z\text{-}\exp(-0.51/1))*(z\text{-}\exp(-0.5/2)) = (z-0.60653)(z-0.7788) =$
$= z^2-1.3853z+0.47236$

Koeficienty menovateľa $A(z)$: $a_0=1$ $a_1=-1.3853$ $a_2=0.47236$

Koeficienty čitateľa B(z) diskrétnej prenosovej funkcie

$$b_k = h(kT) + a_1 h[T(k-1)] + a_2 h[T(k-2)] + \ldots + a_k h(0)$$

k=0 $b_0 = h(0T) + a_1\, h[0.5(0-1)] = 0$

$h(0) = -\exp(0) + \exp(0.5*0) = -1 + 1 = 0$

k=1 $b_1 = h(0.5) + a_1 h[0.5*0] + 0 = 0.17227$

$h(0.5) = -\exp(-0.5) + \exp(-0.5*0.5) = 0.17227$

k=2 $b_2 = h(1) + a_1 h(0.5) + a_2 h(0) = 0.2386-0.2386 = 0$

Koeficienty čitateľa: $b_2=0$ $b_1=0.17227$ $b_0=0$

Výsledná diskrétna prenosová funkcia:

$$G_2(z,0) = G_2(z) = \frac{0.17227z}{z^2-1.3853z+0.47236} = \frac{0.17227z^{-1}}{1-.3853z^{-1}+0.47236z^{-2}}$$

2.b) Určenie diskrétnej prenosovej funkcie $G_2(z)$ s tvarovačom nultého rádu

Koeficienty menovateľa sa nemenia:

$$a_0=1,\ a_1=-1.3853,\ a_2=0.47236,$$

Koeficienty čitateľa určíme podľa vzťahu

$$b_k=g(k)+a_1 g(k-1)+a_2 g(k-2)+\ldots+a_k g(0)$$

V našom prípade **n=2**,hodnoty funkcie g(k) určíme podľa vzťahu

$$g(k)=g(kT)=h_p(kT)-h_p[T(k-1)]$$

kde $\boldsymbol{h_p(t)}$ je prechodová funkcia prenosu $G_2(s)$.

Rozkladom $G_2(s)/s$ na parciálne zlomky, spätnou Laplaceovou transformáciou a konkretizáciou pre $\mathbf{T_1=1; T_2=2; L_1=1; L_2=-4; K_1=1}$:

$$h_p(t) = L^{-1}\left\{\frac{K_1}{s} + \frac{L_1}{T_1 s+1} + \frac{L_2}{T_2 s+1}\right\} = 1-2e^{-0.5t}+e^{-t}$$

Koeficienty čitateľa diskrétneho prenosu:

k=0 $b_0 = g(0)+a_1 g(0-1)+a_2 g(0-2)-0 = 0$

(pre záp. hodnoty argumentu je g(-k)=0)

$g(0)=h_p(0*T)-h_p[T*(0-1)] = 0$

k=1 $b_1 = g(1)+a_1 g(0)+0 = 0.0489291$

$g(1)=h_p(T)-h_p(T*0) = h_p(0.5) = 0.0489291$

k=2 $b_2 = g(2)+a_1 g(1)+0=g(2)-1.3853*0.0498291 =$

$=-0.105981-1.3853*0.0498291 =0.038199$

$g(2) = h_p(2T)-h_p(T) =h_p(1)-h_p(0.5)$

$=0.1548794-0.0489291 = 0.105981$

Výsledná diskrétna prenosová funkcia s tvarovačom :

$$G_{21}(z) = \frac{0.0489291z-0.03819}{z^2-1.3853z+0.47236} = \frac{3.819E\text{-}02z^{-2}-4.8929*e\text{-}02z^{-1}}{1-1.3853z^{-1}+0.47236z^{-2}}$$

3. Určme diskrétnu prenosovú funkciu s tvarovačom nultého rádu pre spojitý dynamický proces

$$G_4(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

Póly prenosu $G_4(s)$ sú komplexne združené

$s_1 = -1 + j$, $s_2 = -1 - j$ t.j.: $s_i = c \pm jd$ ($c = -1$ $d = 1$)

Diskrétny prenos $G_4(s)$ aj s tvarovačom nultého rádu určíme na základe prechodovej funkcie

$G_4(s)$: $h_p(t) = 0.5 - 0.7071 * \sin(t + 0.78539) * \exp(-t)$,
pre $t > 0$
$h_p(t) = 0$ pre $t < 0$

Korene menovateľa spojitého prenosu $G_4(s)$ sú $\pm$

$s_{1,2} = -1 \pm j$ a z nich môžeme prepočet koreňov z s--->z-oblasti realizovať priamo zo súvislosti medzi koreňmi v s a z-oblasti:

$z_{1,2}=e^{s_i T}=e^{T(-1\ \pm j)}=a[\cos(1T)\ \pm\ j\sin(1T)]$,
kde $a = e^{cT} = e^{-0.5} = 0.6065$

teda $z_{1,2} = 0.53228 \pm j0.290786$, $s_i = c \ \pm\ jd$

Charakteristická rovnica diskrétneho prenosu $G_4(z)$ je potom v tvare :

$$A(z) = \prod_{i=1}^{2}(z-z_i)$$

$= (z-0.53228+j0.290786)\ (z-0.53228-j0.290786) =$

$= z^2-1.064561z+0.3678795 = 0$

v záp. mocninách $A(z)= 1-1.064561z^{-1}+0.3678795z^{-2} = 0$

Koeficienty menovateľa: $a_0=1$, $a_1=-1.0645$, $a_2=0.36787$

Určenie koeficientov čitateľa diskrétneho prenosu $G_4(z)$ podľa vzťahu

$$b_k = g(k) + a_1 g(k-1) + a_2 g(k-2) + \ldots + a_k g(0)$$
$$g(k) = g(kT) = h_p(kT) - h_p[T(k-1)]$$

k=0 $b_0 = g(0) = 0$

$g(0) = h_p(0) = 0$

k=1 $b_1 = g(1)+a_1 g(0)+0 = 0.08846649$

$g(1) = h_p(T)-h_p(0) = h_p(0.5) =$

$= .5-0.7071\sin(0.5+0.78539)*\exp(-0.5) = 0.088466$

k=2 $b_2 = g(2)+a_1 g(1)+0 = g(2)-1.064561*0.08846649$

$= 0.06319$

$g(2) = h_p(2T)-h_p(T) = h_p(1)-h_p(0.5)$

$= 0.5-0.7071\sin(1.78539)*\exp(-1) =$

$= 0.2458389-0.08846649 = 0.1573724$

Diskrétna prenosová funkcia s tvarovačom nultého rádu :

$$C_{41}(z) = G_{TC}G_4(z) = \frac{0.08846z+0.06319}{z^2-1.0645z+0.3678} = \frac{0.08846z^{-1}+0.06319z^{-2}}{1-1.0645z^{-1}+0.3678z^{-2}} =$$

$$= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$B(z) = 0 + 0.08846z^{-1} + 0.06319z^{-2}$$

$$A(z) = 1 - 1.0645z^{-1} + 0.3678z^{-2}$$