

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Hálkova 6, 461 17 Liberec 1, CZ

Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Číslicové řízení

Analýza diskrétních regulačních obvodů

Studijní materiály

Doc. Ing. Osvald Modrlák, CSc.



Katedra řídicí techniky

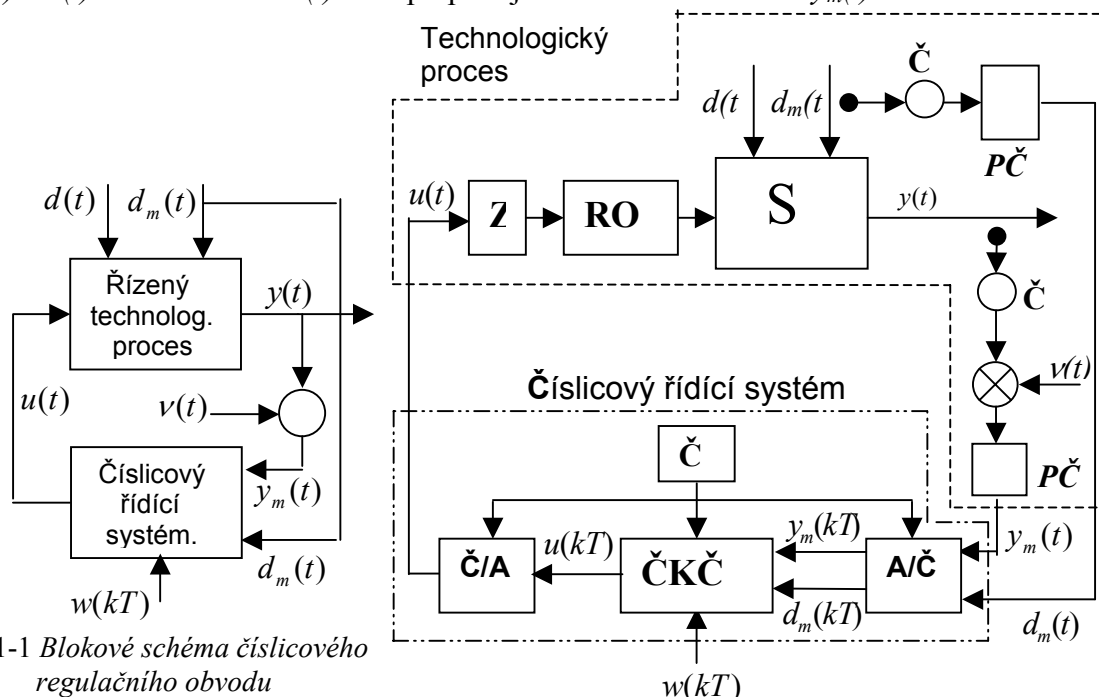
Obsah

1	Struktura diskrétních regulačních obvodů.....	2
2	Diskretní popis spojitéch systémů.....	6
2.1	Diskretizace pomocí Z-transformace váhové funkce.....	6
2.1.1	Z-přenos soustavy s tvarovačem nultého řádu.....	9
2.1.2	Z-přenos soustavy s tvarovačem $H(s) = 1/s$	11
2.1.3	Z-přenos soustavy s tvarovačem 1. řádu.....	12
2.2	Diskretizace pomocí přímé transformace obrazového přenosu.....	12
2.3	Bilineární transformace.....	14
3	Softwarová podpora diskretizace.....	15
4	Literatura.....	16

Předkládaný studijní materiál seznamuje čtenáře s diskrétním popisem spojitéch systémů. Předkládaná tematika je zpracována speciálně pro tento pro kurz a omezuje se proto na nejnnutnější partie této tematiky. Základ tvoří Z-transformace a její vlastnosti, speciálně pak Z-transformace s posunutým počátkem, která je někdy označována jako modifikovaná Z-Transformace. Text se omezuje na diskretizaci spojitéch systémů pomocí Z-transformace s posunutým počátkem. Z-transformace je zpracována v Přílohách a je dostupná na www stránkách katedry a fakulty. Využívá softwarové podpory MATLABu.

1 STRUKTURA DISKRÉTNÍCH REGULAČNÍCH OBVODŮ

Uvažujeme spojitý technologický proces s jednou akční veličinou $u(t)$ a jednou regulovanou (fyzikální) veličinou $y(t)$ se zabudovaným řídicím a regulačním číslicovým systémem ve zpětné vazbě viz. obr. 1-1. Na řízený proces působí měřená a neměřená poruchová veličina $d_m(t)$ a $d(t)$. Parazitní šum $v(t)$ se superponuje na měřenou veličinu $y_m(t)$.



Obr.1-1 Blokové schéma číslicového regulačního obvodu

Obr.1-2 Struktura číslicového regulačního obvodu

Vstupními veličinami číslicového řídicího systému jsou: měřená veličina $y_m(t)$, měřená poruchová veličina $d_m(t)$ a řídicí veličina (posloupnost žádaných hodnot) $w(kT)$. Výstupní veličinou řídicího systému je akční veličina $u(t)$.

Do řízeného technologického procesu se zpravidla zahrnují: zesilovací člen **Z**, regulační orgán se servopohonem **RO**, vlastní technologie **S**, čidla **Č1**, **Č2**, včetně přizpůsobovacích členů (převodníků) **PČ1**, **PČ2** viz obr. 1-2.

Řídicí číslicový systém pak obsahuje analogo/číslcový (**A/Č**) a číslico/analogový převodník (**Č/A**), časovač **Č**, který s periodou **T** spouští činnost převodníků. Dále předpokládáme, že v řídicím číslicovém systému, který zpravidla vykonává celou řadu řídicích činností, je realizován číslicový korekční člen **ČKČ**. Jeho jednotlivé části mohou nezávisle kompenzovat vlivy předpokládaných poruch a současně zajišťují požadovaný průběh regulované veličiny tím, že vytváří vhodnou diskrétní posloupnost $u(kT)$ nebo $\Delta u(kT)$ na základě okamžitých měřených veličin $y_m(kT)$, $d_m(kT)$ a zadávané žádané hodnoty $w(kT)$ a jejich hodnot časově zpožděných.

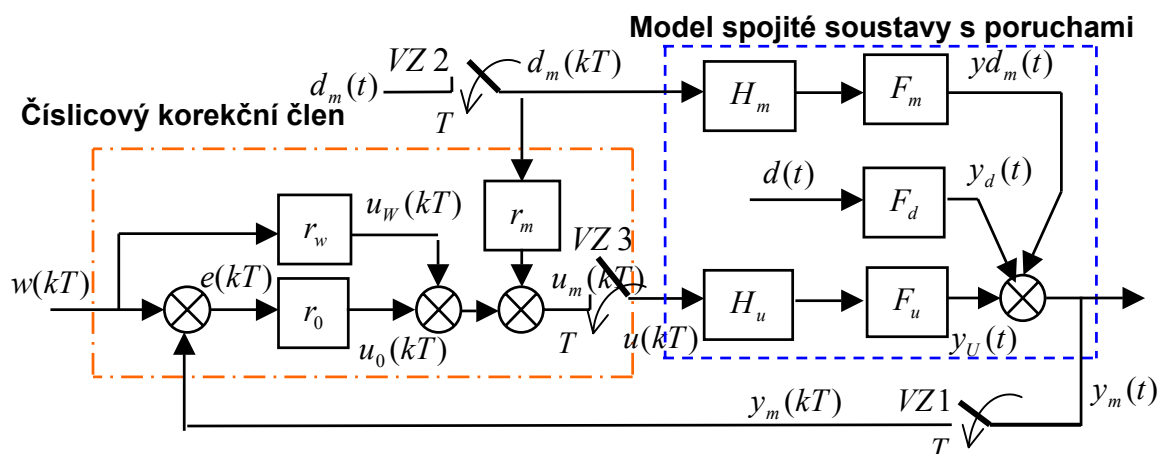
Pro potřeby analýzy a syntézy diskrétních regulačních obvodů je možno schéma na obr. 1-2 nahradit těmito prvky viz obr. 1-3.

1) **Spojitémi členy**, které jsou popsány obrazovými přenosy $F_d(s)$, $F_m(s)$, $F_u(s)$. Tyto aproximují dynamické vlastnosti řízeného procesu včetně čidel, přizpůsobovacích, zesilovacích a akčních členů vzhledem k deterministickým poruchovým veličinám $d(t)$, $d_m(t)$ a akční veličině $u(t)$. V důsledku předpokládané linearit je výstupní-měřená veličina rovna:

$$y_m(t) = y d_m(t) + y_d(t) + y_u(t) + v(t) ,$$

- kde $y_u(t)$ odezva deterministické části systému na akční veličinu
 $yd_m(t)$ odezva deterministické části systému na měřenou poruchovou veličinu
 $y_d(t)$ odezva deterministické části na neměřenou poruchovou veličinu
 $v(t)$ šumový, aditivní stochastický signál

2) **Vzorkovacími členy** (vzorkovači) **VZ1, VZ2, VZ3** (spínače s definovanou periodou vzorkování T), které vzorkují vstupní signály s periodou T . Výsledkem vzorkování pak je posloupnost diskretních hodnot (impulsů zanedbatelné šířky – Diracových impulsů s vahami, odpovídající diskretním hodnotám vzorkovaných veličin). Vzorkovače v analýze a syntéze zastupují činnost A/Č převodníků.



Obr.1-3 Model zpětnovazebního regulačního obvodu s číslicovým řídicím členem

3) Tvarovacími členy

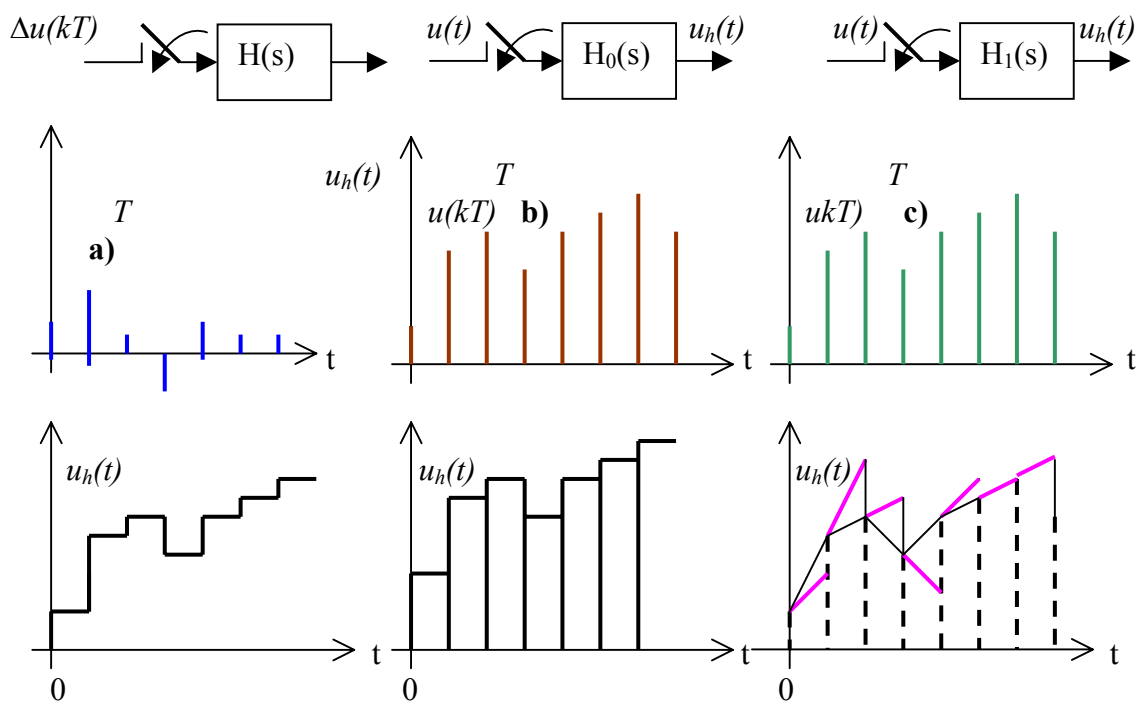
Aby bylo možno pomocí diskretních posloupností $u(kT)$ ovládat spojitě technologické procesy, převádí číslicoanalogový převodník s danou periodou vypočtené diskretní hodnoty $u(kT)$ na analogový signál – pulsy konečné šířky T . **Rekonstrukce** takového signálu z diskretní posloupnosti $u(kT)$ se označuje jako **tvarování** a v analýze diskretních systémů ji realizují tvarovací členy.

a) Tvarovač nultého řádu

Činnosti běžného číslico-analogového převodníku (např. integrované obvody WNC 041, WND 042, WSH 360A, B) odpovídá **tvarovač nultého řádu** s obrazovým přenosem:

$$H_0(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT}) \quad , \quad [\text{impulsní váhová fun.: } g_{h0}(t) = \eta(t) - \eta(t - T)] \quad (1.1 - 1)$$

který rekonstruuje posloupnost impulsů na schodový signál o úrovni $u_h(t) = u(kT)$ pro $kT \leq t < (k+1)T$ viz. obr. 1-4b.



Obr.1.4 Výstup $u_h(t)$ z tvarovače : a) přírůstkového b) nultého řádu c) prvního řádu

b) Přírůstkový tvarovač

Obrazový přenos tvarovače můžeme též předpokládat ve tvaru:

$$H(s) = \frac{1}{s}, \tag{1.1-2}$$

který aproximuje vstupní posloupnost přírůstků akčních zásahů schodovým signálem o úrovni (viz obr. 1.4a).

$$u_h(t) = \sum_{j=0}^k \Delta u(jT), \text{ pro } kT \leq t < (k+1)T.$$

Budiž zdůrazněno, že do tohoto tvarovače vstupují diskrétní přírůstky akční veličiny $\Delta u(kT)$, které jsou v technické praxi označovány jako akční zásahy. Jsou určovány buď algoritmem řízení, nebo se musí z diskrétních hodnot vytvořit pomocí vzorce

$$\Delta u(kT) = u(kT) - u(kT-T).$$

Předností tohoto tvarovače je, že umožňuje určitá zjednodušení při syntéze regulátorů.

c) Tvarovač prvního řádu

Existují tvarovače i vyšších řádů, které se však používají pro rekonstrukci akční veličiny velmi zřídka. Uvedme alespoň obrazový přenos tvarovače prvního řádu.

$$H_1(s) = \frac{1}{s} \left(1 + \frac{1}{Ts} \right) (1 - e^{-sT})^2, \tag{1.1 - 3}$$

který rekonstruuje posloupnost impulsů signálem:

$$u_h(t) = u(kT) + \frac{1}{T} [u(kT) - u(kT - T)](t - kT), \quad kT \leq t < (k+1)T \quad \text{viz obr. 1.4c.}$$

4) Diskrétně pracujícími členy

Jednoznačně transformují posloupnost diskretních hodnot vstupního signálu na posloupnost výstupních signálů. Transformaci je možno vyjádřit: diferenční rovnicí, diskretním přenosem, diskretní konvolutorní funkcí, diskretní impulsní funkcí.

Číslicový korekční člen (číslíkový regulátor) obsahuje členy (regulátory) r_0 , r_w , r_m , které mají tyto funkce:

- Kompenzaci neměřitelné poruchové veličiny regulátorem r ve zpětné vazbě.
- Kompenzaci měřitelné poruchové veličiny regulátorem r_m v přímé vazbě nebo regulátorem r_0 ve zpětné vazbě.
- Zajištění průběhu regulované veličiny dopředným regulátorem r_w nebo regulátorem r ve zpětné vazbě. Obecně je možno obvod doplnit členem g_w , který aproximuje diskretní řídicí veličinu $w(kT)$.

Přenosy regulátoru r_0 , r_w tvoří **regulátor s dvěma stupni volnosti**.

5) **Paměťovými a zpožd'ovacími členy**, které umožňují ukládání vstupních i výstupních hodnot číslicového regulátoru do paměti a realizaci požadovaných zpoždění.

6) Volba vzorkování

Nemá-li nastat při vzorkování zkreslení měřeného signálu v rozsahu jeho frekvenčního pásma, $\omega_{min} \leq \omega \leq \omega_{max}$, musí frekvence vzorkování ω_v být alespoň dvakrát větší než nejvyšší frekvence ω_{max} frekvenčního pásma vzorkovaného signálu $y(t)$, tedy musí platit

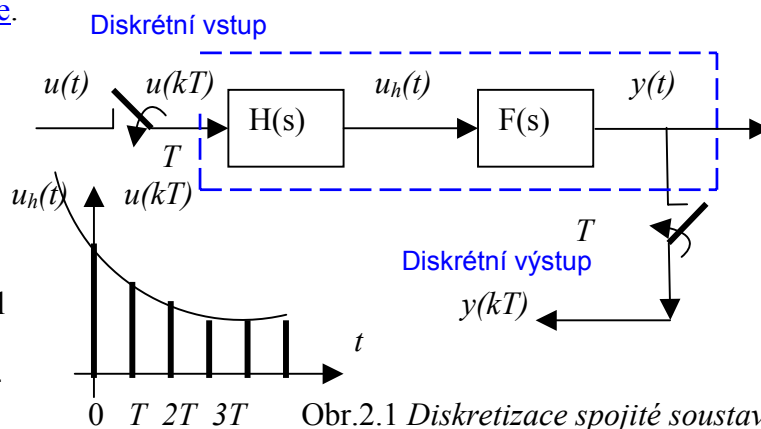
$$\omega_v \geq 2 * \omega_{max} \quad (1.1 - 4)$$

Pro praktickou volbu vzorkování je možno využít pravidla, aby přechodová charakteristika do ustálení byla pokryta 10-30 vzorky .

2 DISKRETNÍ POPIS SPOJITÝCH SYSTÉMŮ

Při analýze a syntéze diskrétních regulačních obvodů se zpravidla pracuje s diskrétními modely spojité části regulačních obvodů. Pro vytvoření diskrétního modelu je možno využít Z-transformace.

Z-přenos (nebo též diskrétní přenos, impulsní přenos) je možno získat pouze tehdy, je-li na vstupu spojité části diskrétní signál. Vstupní spojité signál je vzorkován s periodou T . Navzorkovaný vstupní signál prochází tvarovačem $H(s)$, který vytvoří po částech spojité signál $u_h(t)$ viz obr.2.1..



Obr.2.1 Diskretizace spojité soustavy

Váhová funkce sériově řazeného tvarovače $H(s)$ a spojité soustavy $F(s)$ je rovna

$$g(t) = L^{-1}\{H(s)F(s)\} = L^{-1}\{G(s)\}, \quad (2.1-1)$$

kde je $L^{-1}\{ \}$... je operátor zpětné Laplaceovy transformace,

$H(s)$... je obrazový přenos tvarovače,

$F(s)$... je obrazový přenos spojité soustavy

$G(s) = H(s)F(s)$.

Budou uvedeny následující způsoby diskretizace vnějšího popisu-určení Z-přenosů:

- 1) Z-transformací váhové funkce (kap.2.1). Ukážeme si vliv typu tvarovače na tvar diskrétního přenosu.
- 2) Přímou transformací obrazového přenosu na diskrétní přenos viz (kap.2.2). Diskrétní přenos spojité soustavy je možno určit
- 3) Bilineární transformací obrazového přenosu, (kap. 2.3)
- 4) Diskrétní parametrickou identifikací

2.1 DISKRETIZACE POMOCÍ Z-TRANSFORMACE VÁHOVÉ FUNKCE

Při určování diskrétního přenosu je možno vycházet z definice Z – transformace s posunutým počátkem viz (P1-43). Z přenos určíme jako Z - obraz váhové funkce $g(t)$ blokového schématu na obr.2.1

$$G(z, \varepsilon) = Z_{\varepsilon}\{L^{-1}[G(s)]\} = Z_{\varepsilon}\{g(t)\} = \frac{Y(z, \varepsilon)}{U(z)}, \quad (2.1 - 2)$$

kde je $G(s) = H(s)F(s)$ je Laplaceův obraz váhové funkce,

$H(s)$... je obrazový přenos libovolného tvarovače

$F(s)$... je obrazový přenos soustavy

$L^{-1}\{ \}$... je operátor zpětné Laplaceovy transformace,

$U(z) = Z\{u(kT)\}$, $Y(z, \varepsilon) = Z_{\varepsilon}\{y(t)\}$,

$Z_\varepsilon\{\cdot\}$... je symbol zobecněné (posunutě) Z_ε -transformace viz (P1-43).

Z-obraz výstupu je roven

$$Y(z, \varepsilon) = G(z, \varepsilon)U(z) \text{ a pro } \varepsilon = 0 \text{ je } Y(z) = G(z) \cdot U(z), \quad (2.1 - 3)$$

kde $U(z)$ je Z-obraz vstupního signálu a $G(z)$ je

$$G(z) = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z^1 + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z^1 + a_0}, \text{ pro zvolené } \varepsilon, \quad (2.1 - 4)$$

Pro $\varepsilon = 0$ a označení $t_k = kT$, $g_k = g(kT)$ platí

$$G(z, \varepsilon = 0) = G(z) = Z\{g(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k} = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})}, \quad (2.1 - 5)$$

kde $g_k = 0$, pro $k < 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} g_k = K$.

Diskrétní hodnota výstupního signálu v časové oblasti je dána konvolutorním součtem

$$y(kT) = \sum_{j=0}^k g_j u_{k-j}. \quad (2.1 - 6)$$

Pro soustavu s dopravním zpožděním τ_D podle věty o obecném posunutí viz (P1-46) je možno odvodit toto tvrzení:

Nechť $Z_\varepsilon\{g(t)\eta(t)\} = G(z, \varepsilon)$, pak

$$Z_\varepsilon\{g(t - \tau_D)\eta(t - \tau_D)\} = \begin{cases} z^{-(1+m)} G(z^{-1}, 1 + \varepsilon - \xi) \text{ pro } \varepsilon < \xi, & (2.1 - 7a) \\ z^{-m} G(z^{-1}, \varepsilon - \xi) \text{ pro } \varepsilon \geq \xi, & (2.1 - 7b) \end{cases}$$

kde $\tau_D = (m + \xi)T$, m je celé, $\xi \in \langle 0, 1 \rangle$ a T je perioda vzorkování.

Fyzikální realizovatelnost, kauzalita dynamického systému

Fyzikální realizovatelnost – **kauzalitu dynamického systému** je možno definovat
a) pomocí váhové impulzní funkce

Systém je fyzikálně realizovatelný, jestliže jeho impulsová váhová funkce $g(t)$ je nulová

a) pro $t < 0$... slabá verze (2.1 - 8a)

b) pro $t \leq 0$... silná verze. (2.1 - 8b)

b) pomocí Z - přenosu

*Je-li Z-přenos spojité části vyjádřen v kladných mocninách z a jsou-li stupně jmenovatele " n " a čitatele " m " pak **kauzalita diskrétního systému** (fyzikální realizovatelnost) je zaručena, jestliže platí*

$$a) \lim_{z \rightarrow \infty} z^{-1}G(z, \varepsilon) = 0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \text{ nebo } m \leq n, \text{ slabá verze} \quad (2.1 - 9a)$$

$$b) \lim_{z \rightarrow \infty} G(z, \varepsilon) = 0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \text{ nebo } m < n, \text{ silná verze} \quad (2.1 - 9b)$$

Jestliže diskrétní přenos splňuje podmínku **fyzikální realizovatelnosti**, pak diskrétní model reprezentuje fyzikální systém, což znamená, že pro výpočet odezvy systému v okamžiku " k " mohou být použity pouze minulých hodnot akční veličiny $u(k-i)$ a výstupní veličiny $y(k-j)$, $i, j \geq 1$).

Poznámka 1

Z-obrazy viz (P1-1,43) je možné formálně vyjádřit jako funkci komplexní proměnné „ z^{-1} “ (záporných mocnin z). Proto můžeme také obrazový přenos vyjádřit jako funkci komplexní proměnné z . Pro přenos pak platí:

$$G(z^{-1}, \varepsilon) = Z_{\varepsilon} \{L^{-1}[G(s)]\} = Z_{\varepsilon} \{g(t)\} = \frac{Y(z^{-1}, \varepsilon)}{U(z^{-1})}, \quad Y(z, \varepsilon) = G(z, \varepsilon)U(z) \quad (2.1 - 10)$$

$$G(z) = \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-1-n} + \dots + b_1 z^{1-n} + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}},$$

Obě dvě formy zápisu jsou snadno vzájemně převoditelné a běžně se v literatuře používají. Při syntéze diskrétních regulačních obvodů přináší určitou výhodu forma zápisu (1.2-7), která ale vyžaduje zápis záporných mocnin. Sami se přesvědčíte, že je to nepohodlné. Proto bylo zavedeno označení $q = z^{-1}$ viz (P1-3) a diskrétní přenos pak může mít tvar:

$$G(q, \varepsilon) = \frac{Y(q, \varepsilon)}{U(q)} = Z_{\varepsilon} \{g(t)\}, \quad Y(q, \varepsilon) = G(q, \varepsilon)U(q). \quad (2.1 - 11)$$

$$G(q) = \frac{b_m q^{n-m} + b_{m-1} q^{n-m+1} + \dots + b_1 q^{n-1} + b_0 q^n}{1 + a_{n-1} q^1 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_0 q^n}, \quad (2.1 - 12)$$

Zápis diskrétních hodnot spojité funkce v časových okamžicích $y(kT)$, $y[(k-2)T]$, $y[(k-i)T]$, $u(kT)$, $u[(k-1)T]$ atd. může být zjednodušen zavedením symbolů y_k , y_{k-2} , y_{k-i} , u_k , u_{k-1} , kde $t = kT$, T je známá perioda vzorkování a $k = 0, 1, 2, \dots$

Konec poznámky 1.

Pro spojitou soustavu s obrazovým přenosem $F(s)$ a pro jednotlivé typy tvarovačů (1-1, 2, 3) lze odvodit z (2.1 -1) vzorce pro výpočet Z-přenosů. Bylo by jistě matoucí, kdybychom pro jednotlivé diskrétní přenosy s různými tvarovači ponechali stejný symbol. Zavedeme označení:

- $G_0(\%)$ je Z-přenos soustavy s tvarovačem nultého řádu,
- $G_1(\%)$ je Z-přenos soustavy s tvarovačem 1. řádu,
- $G(\%)$ je Z-přenos soustavy s tvarovačem $H(s) = 1/s$.
- $\%$ je symbol pro komplexní proměnné z, z^{-1} nebo q včetně parametru.

2.1.1 Z-přenos soustavy s tvarovačem nultého řádu

Pro soustavu s tvarovačem nultého řádu je možno odvodit pro Z-přenosů

$$G_0(z^{-1}, \varepsilon) = (1 - z^{-1}) Z_\varepsilon \{L^{-1}[F(s)/s]\} = \frac{Y(z^{-1}, \varepsilon)}{U(z^{-1})}, \quad (2.1-13a)$$

$$G_0(z, \varepsilon) = \frac{z-1}{z} Z_\varepsilon \{L^{-1}[F(s)/s]\} = \frac{Y(z, \varepsilon)}{U(z)}. \quad (2.1-13b)$$

Př.2.1

Obrazový přenos soustavy je $F(s) = K/[(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)]$. Uvažujme tvarovač nultého řádu.

Určete:

- 1) Z-přenos z váhové funkce pro $\varepsilon = 0$ a periodu vzorkování T .
- 2) Koeficienty Z-přenosu pro $K=2, \tau_1=0,5s, \tau_2=2s$.

Řešení:

- 1) Podle (2 - 4a) určíme pomocí zpětné Laplaceovy transformace váhovou funkci $g(t)$

$$\begin{aligned} \{L^{-1}[F(s)/s]\} &= \frac{K/(\tau_1 \tau_2)}{s(s + 1/\tau_1)(s + 1/\tau_2)} = K \left(\frac{1}{s} - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \frac{1}{s + 1/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \cdot \frac{1}{s + 1/\tau_2} \right) \hat{=} \\ &\hat{=} K \left[\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \exp(-t/\tau_1) - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \exp(-t/\tau_2) \right) * 1(t) \right]. \end{aligned}$$

Pomocí slovníku Z-transformace nalezneme Z- obrazy jednotlivých členů váhové funkce a dostaneme v kladných mocninách

$$Z\{L^{-1}[F(s)/s]\} = K \left[\frac{z}{z-1} - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \frac{z}{z - \exp(-T/\tau_1)} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \frac{z}{z - \exp(-T/\tau_2)} \right],$$

nebo v záporných mocninách

$$Z\{L^{-1}[F(s)/s]\} = K \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \frac{1}{1 - z^{-1} \exp(-T/\tau_1)} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \frac{1}{1 - z^{-1} \exp(-T/\tau_2)} \right].$$

Označíme-li $D_1 = \exp(-T/\tau_1)$, $D_2 = \exp(-T/\tau_2)$ a provedeme-li součet dostaneme pro kladnou mocninu z

$$Z\{L^{-1}[F(s)/s]\} = \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \cdot z \cdot \frac{[\tau_2(D_2 - 1) + \tau_1(1 - D_1)]z + [(\tau_1 - \tau_2)D_1D_2 - \tau_1D_2 + \tau_2D_1]}{(z - 1)(z - D_1)(z - D_2)},$$

a zápornou mocninu

$$Z\{L^{-1}[F(s)/s]\} = \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \cdot z^{-1} \cdot \frac{[\tau_2(D_2 - 1) + \tau_1(1 - D_1)] + [(\tau_1 - \tau_2)D_1D_2 - \tau_1D_2 + \tau_2D_1]z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - z^{-1}D_1)(1 - z^{-1}D_2)}.$$

Obrazový přenos dostaneme podle (2 - 4b) vynásobením Z - obrazu $Z\{L^{-1}[F(s)/s]\}$ v kladných mocninách zlomkem $(z-1)/z$

$$G_0(z) = \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \frac{[\tau_2(D_2 - 1) + \tau_1(1 - D_1)]z + [(\tau_1 - \tau_2)D_1D_2 - \tau_1D_2 + \tau_2D_1]}{(z - D_1)(z - D_2)}$$

Obrazový přenos dostaneme podle (2 - 4a) vynásobením Z - obrazu $Z\{L^{-1}[F(s)/s]\}$ členem $(1-z^{-1})$

$$G_0(z^{-1}) = \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \cdot z^{-1} \cdot \frac{[\tau_2(D_2 - 1) + \tau_1(1 - D_1)] + [(\tau_1 - \tau_2)D_1D_2 - \tau_1D_2 + \tau_2D_1]z^{-1}}{(1 - z^{-1}D_1)(1 - z^{-1}D_2)} = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})}$$

2) Koeficienty Z-přenosu pro $K=2$; $\tau_1=0,5s$; $\tau_2=2s$; $T=1$; $D_1 = \exp(-T/\tau_1) = 0,13533$;

$$D_2 = \exp(-T/\tau_2) = 0,60653; D_1+D_2=0,74186; D_1 \cdot D_2=0,082085, \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} = -1,3333;$$

$$G_0(z^{-1}) = z^{-1} \frac{0,4728 + 0,2076z^{-1}}{(1 - 0,13533z^{-1})(1 - 0,60653z^{-1})} = z^{-1} \frac{0,4728 + 0,2076z^{-1}}{1 - 0,74190z^{-1} + 0,08208z^{-2}} = z^{-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

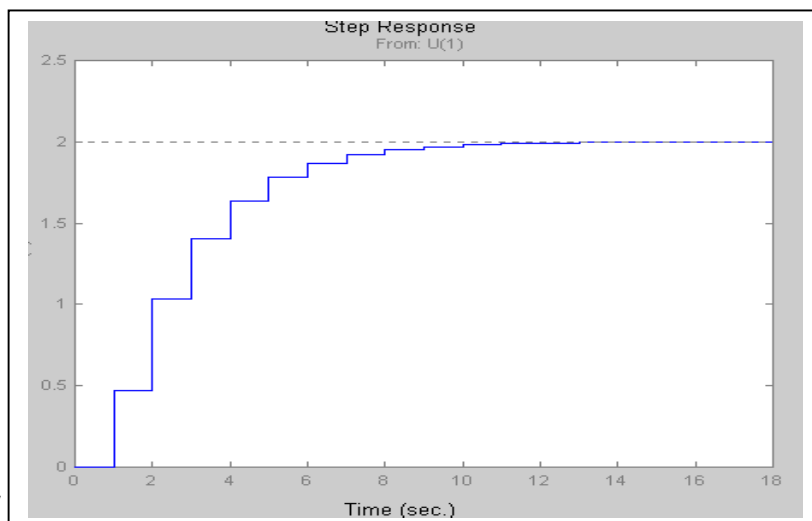
$$G_0(z) = \frac{0,4728z + 0,2076}{(z - 0,13533)(z - 0,60653)} = \frac{0,4728z + 0,2076}{z^2 - 0,74190z + 0,08208} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Diskrétní přechodová charakteristika je na obr.2.2

přechodová přechodové přechodová přechodová

Konec příkladu

Obr.2.2



2.1.2 Z-přenos soustavy s tvarovačem $H(s) = 1/s$

Pro soustavu s tvarovačem $H(s) = 1/s$ je Z-přenos (poměr Z-obrazu výstupu k Z-obrazu přírůstku akční veličiny) přímo roven Z-obrazu $Z_\varepsilon\{L^{-1}[F(s)/s]\}$. Platí rovnost

$$G(z^{-1}, \varepsilon) = Z_\varepsilon\{L^{-1}[F(s)/s]\} = \frac{Y(z^{-1}, \varepsilon)}{\Delta U(z^{-1})} = \frac{1}{1-z^{-1}} G_0(z^{-1}, \varepsilon) \quad (2.1-14a)$$

$$G(z, \varepsilon) = Z_\varepsilon\{L^{-1}[F(s)/s]\} = \frac{Y(z, \varepsilon)}{\Delta U(z)} = \frac{z}{z-1} G_0(z, \varepsilon) \quad (2.1-14b)$$

Př.2.2

Uvažujme obrazový přenos soustavy z Př.2.1. a tvarovač $H(s)=1/s$.

Určete Z-přenos v kladných mocninách z pro $\varepsilon = 0$ a periodu vzorkování T .

Řešení:

Podle (2-11b) je obrazový přenos $G(z)$ je přímo roven Z - obrazu $Z\{L^{-1}[F(s)/s]\}$.

Obrazový přenos pro kladnou mocninu tedy je roven

$$G(z) = \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \cdot z \cdot \frac{[\tau_2(D_2 - 1) + \tau_1(1 - D_1)]z + [(\tau_1 - \tau_2)D_1D_2 - \tau_1D_2 + \tau_2D_1]}{(z-1)(z-D_1)(z-D_2)} = \frac{Y(z)}{\Delta U(z)},$$

a pro zápornou mocninu

$$G(z^{-1}) = \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \cdot z^{-1} \cdot \frac{[\tau_2(D_2 - 1) + \tau_1(1 - D_1)] + [(\tau_1 - \tau_2)D_1D_2 - \tau_1D_2 + \tau_2D_1]z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-z^{-1}D_1)(1-z^{-1}D_2)} = \frac{Y(z^{-1})}{\Delta U(z^{-1})}.$$

Pro zadané parametry je Z-přenos ve tvaru

$$G(z) = z \frac{0,4728z + 0,2076}{(z-1)(z-0,13533)(z-0,60653)} = \frac{Y(z)}{\Delta U(z)}$$

Konec příkladu

2.1.3 Z-přenos soustavy s tvarovačem 1. řádu

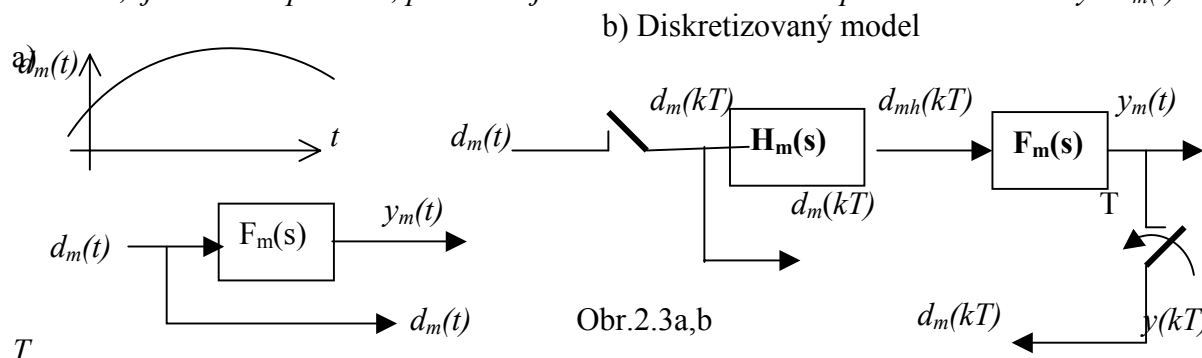
Pro soustavu s tvarovačem prvního řádu platí vzorce

$$G_l(z^{-1}, \varepsilon) = (1 - z^{-1})^2 Z_\varepsilon \left\{ L^{-1} \left[F(s) \frac{1}{s} \left(1 + \frac{1}{Ts} \right) \right] \right\} = \frac{Y(z^{-1}, \varepsilon)}{U(z^{-1})} \quad (2.1-15a)$$

$$G_l(z, \varepsilon) = \left(\frac{z-1}{z} \right)^2 Z_\varepsilon \left\{ L^{-1} \left[F(s) \frac{1}{s} \left(1 + \frac{1}{Ts} \right) \right] \right\} = \frac{Y(z, \varepsilon)}{U(z)}. \quad (2.1-15b)$$

Poznámka 2.

Použití tvarovačů není možno omezit pouze na rekonstrukci diskrétní akční veličiny. Rekonstrukce diskrétní posloupnosti vzorkovaného spojitého signálu má širší význam i uplatnění. Uvažujme spojitou soustavu s měřenou poruchovou veličinou $d_m(t)$ dle obr. 2.3. Při diskretizaci, tj. určení Z-přenosu, představuje rekonstrukce měřené poruchové veličiny $d_m(t)$



pomocí tvarovače zvoleného řádu $H_m(s)$ aproximací původního spojitého signálu jiným, zpravidla jednodušším po částech spojitým signálem $d_{mh}(t)$. Je zřejmé, že tvarovač $H_m(s)$ představuje při diskretizaci pouze předpokládanou míru zjednodušení procesu rekonstrukce. Neodpovídá mu žádné konkrétní technické zařízení. Z-přenos tedy závisí nejen na periodě vzorkování T , ale i na řádu tvarovače $H_m(s)$, který byl uvažován při rekonstrukci signálu. Řád tvarovače se projeví pouze na počtu koeficientů čitatele Z-přenosu.

Konec poznámky.

2.2 DISKRETIZACE POMOCÍ PŘÍMÉ TRANSFORMACE OBRAZOVÉHO PŘENOSU

Pro výpočet obrazů $Z_\varepsilon \{ L^{-1} [F(s)/s] \}$ nebo $Z_\varepsilon \{ L^{-1} [F(s)/(s^2 T)] \}$ ve vzorcích (2.- 4a) až (2 - 6b) je možno použít přímé transformace s využitím reziduové věty - příloha P1, Poznámka 3.

Nechť $G(s) = H(s)/s$ nebo $G(s) = H(s)/s^2$ pak platí

$$Z_\varepsilon \{ G(s) \} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(s) \frac{e^{sT\varepsilon}}{1 - z^{-1} e^{sT}} ds = \sum_i \operatorname{rez}_{s_i} \left\{ G(s) \frac{e^{sT\varepsilon}}{1 - z^{-1} e^{sT}} \right\}, \quad (2.2 - 1)$$

kde $G(s)$ je analytická funkce, která má konečný počet pólů s_i pro $i = 1, \dots, n$ a splňuje podmínku $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$; T je perioda vzorkování.

Pro soustavy s dopravním zpožděním τ_D platí:

$$Z_\varepsilon \{G(s)e^{-s\tau_D}\} = z^{-(1+m)} \sum_i \operatorname{rez}_{s_i} \left\{ G(s) \frac{e^{sT(1+\varepsilon-\xi)}}{1-z^{-1}e^{sT}} \right\} \text{ pro } \varepsilon < \xi, \quad (2.2 - 2a)$$

$$Z_\varepsilon \{G(s)e^{-s\tau_D}\} = z^{-m} \sum_i \operatorname{rez}_{s_i} \left\{ G(s) \frac{e^{sT(\varepsilon-\xi)}}{1-z^{-1}e^{sT}} \right\} \text{ pro } \varepsilon \geq \xi, \quad (2.2 - 2b)$$

kde $\tau_D = (m + \xi)T$, kde m je celé kladné číslo včetně nuly, $\xi \in \langle 0, 1 \rangle$ a T je perioda vzorkování. Z-obrazy pro jednotlivé typy tvarovačů se musí dopočítat podle vzorců (2-4a) až (2-6b). Ze vztahů (2-5a, b) je zřejmé, že takto zavedený přenos je přímo roven Z-obrazu, který získáme z přímé transformace (2-7), (2-8a, b).

Pro běžné technické úlohy s dopravním zpožděním je $\varepsilon = 0$, takže se používá rovnost (2-8a). Mocnina $z^{-(m+1)}$ se vyjadřuje tak zvaným diskrétním zpožděním ν , tedy $z^{-\nu}$, $\nu = m + 1$. Položíme-li $q = z^{-1}$ obrazový přenos má tvar

$$G(q) = q^\nu \frac{B(q)}{A(q)}. \quad (2.2 - 2c)$$

Př.2.3

Uvažujme soustavu 1.řádu s dopravním zpožděním τ_D . Tvarovač $H(s) = 1/s$, přenos soustavy $F(s) = e^{-s\tau_D} \cdot K/(\tau s + 1)$.

Určete: 1) Z - přímou transformací

2) Koeficienty přenosu pro $K=1$, $\varepsilon=0$, $\tau_D=3,485427\text{sec}$, $\tau = 1,4427\text{sec}$, $T = 1$.

Řešení

1) Protože $\varepsilon = 0$, $\tau_D = (m + \xi)T$; $\xi = (\tau_D - m \cdot T)/T$; Pozor: $\nu = (m + 1)$ vybereme formuli (2 - 8a), pro obrazový přenos $G(s) = e^{-s\tau_D} \cdot K/s(\tau s + 1)$

$$\begin{aligned} G(z^{-1}, 1-\xi) &= Z_\varepsilon \{G(s)e^{-s\tau_D}\} = z^{-(1+m)} \sum_i \operatorname{rez}_{s_i} \left\{ G(s) \frac{e^{sT(1-\xi)}}{1-z^{-1}e^{sT}} \right\} = \\ &= z^{-(1+m)} \left\{ \operatorname{res}_{s=0} \left[s \cdot \frac{K/\tau}{s(s+1/\tau)} \cdot \frac{\exp[sT(1-\xi)]}{1-z^{-1}e^{sT}} \right] + \operatorname{res}_{s=-1/\tau} \left[(s+1/\tau) \cdot \frac{K/\tau}{s(s+1/\tau)} \cdot \frac{\exp[sT(1-\xi)]}{1-z^{-1}e^{sT}} \right] \right\} \end{aligned}$$

Označme $D = \exp(-T/\tau)$, $A=1-\xi$, pak Z- přenos soustavy s dopravním zpožděním je

$$G(z^{-1}) = z^{-1}K \frac{(1-D^A) + z^{-1}(D^A - D)}{(1-z^{-1})(1-z^{-1}D)}$$

2) Pro $K=1$ a $\varepsilon=0$; $T = 1$; $\tau_D=3,485427\text{sec}$; $\tau = 1,4427\text{sec}$; je $D = \exp(-T/\tau) = 0,5$; $m=3$; $\xi = (\tau_D - mT)/T = 0,48547$; $A=1-\xi = 0,51453$; $D^A = 0,7000$;

Z-přenos pak je

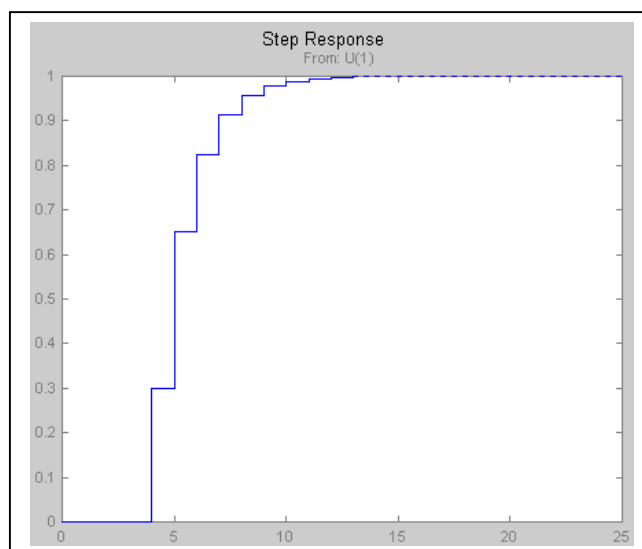
$$G(z^{-1}) = z^{-4} \cdot \frac{0,3 + 0,2z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - z^{-1}0,5)},$$

nebo

$$G(q) = q^4 \frac{0,3 + 0,2q}{(1 - q)(1 - 0,5q)}.$$

Diskrétní váhová funkce je na obr.2.4

Konec příkladu



Obr.2.4

2.3 BILINEÁRNÍ TRANSFORMACE

Aproximaci Z-přenosu z obrazového přenosu je možno získat použitím bilineární transformace. Bilineárních transformací existuje celá řada ze které vybereme Tustinův transformační vztah

$$s \approx w = \frac{2}{T} * \frac{z-1}{z+1}, \tag{2.3 - 1}$$

nebo

$$z = \frac{(2/T) + w}{(2/T) - w}, \tag{2.3 - 2}$$

kde je T...perioda vzorkování.

Z-přenos získaný bilineární transformací $G_B(z)$ je pouze aproximace Z-přenosu, tedy nemůžeme očekávat rovnost $G_B(z) = G(z)$, které byly určeny podle vztahů (2 - 1,...,6b). Používá se pro rozhodování o stabilitě nebo pro aproximaci obrazových přenosů (např. diskretizace přenosu PID regulátorů). Poznamenejme pouze, že přesně platí transformační vztahy

$$s = (\ln z) / T, \text{ nebo } z = \exp(Ts), \tag{2.3 - 3}$$

kteřé není možno přímo použít, protože výsledný přenos pak není algebraickým výrazem - racionální lomenou funkcí v z. Bilineární transformační vztahy aproximují (2 -11).

Př.2.4

Obrazový přenos regulované soustavy je $F(s) = \frac{2}{s^2 + 2,5s + 1}$.

Nalezněte aproximaci Z-přenosu pomocí Tustinovy bilineární transformace. Periodu vzorkování zvolte $T=1$.

Řešení. Dosadíme za "s" aproximaci podle (2 -9) do obrazového přenosu a dostaneme

$$G_T(z) = \frac{2T(z^2 + 2z + 1)}{z^2(4 + 5T + T^2) + z(2T^2 - 8) + (4 - 5T + T^2)}$$

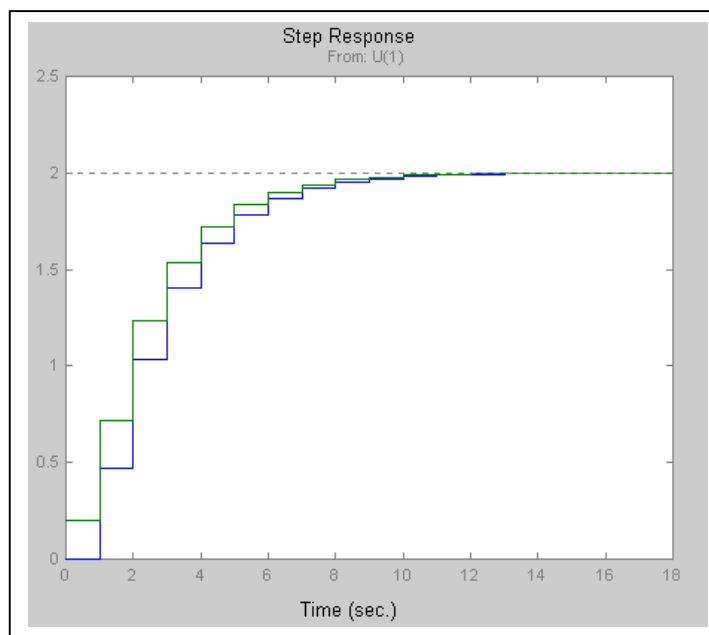
Pro $T=1$ pak vypočteme

$$G_T(z) = \frac{0,2z^2 + 0,4z + 0,2}{z^2 - 0,6z}$$

Diskrétní přechodová charakteristika vypočítaná z aproximovaného Z-přenosu (zelená) a Z- přenosu vypočteného v Př.2.1 (modrá) je na obr.2.5

Porovnejte obě odezvy a pokuste vysvětlit důvod rozdílů průběhů. Zkontrolujte ustálené hodnoty.

Konec příkladu



Obr.2.5 Přechodové charakteristiky k příkladu 2.4.

3 SOFTWAREVÁ PODPORA DISKRETIZACE

Praktické numerické výpočty diskrétních přenosů v prostředí MATLABu se používají transformační funkce z Control System Toolboxu. Z celého rozsáhlého produktu se omezíme pouze na příkaz **c2d** k transformaci spojitého obrazového přenosu na diskrétní. Další popis funkcí naleznete ve "Stručném manuálu MATLABu pro předměty teorie řízení" na internetové adrese http://www.fm.vslib.cz/~krt/krt_cz/vyuka/text/matlab/html.htm . Podrobný popis a přehled všech funkcí je možno najít v "Helpu" tohoto toolboxu.

Předpokládáme, že data, se kterými se operuje, jsou uložena ve workspace.

Funkce c2d

Diskretizace spojitého obrazového přenosu

Syntaxe funkce

$$\begin{aligned} \text{sysd} &= \text{c2d}(\text{sys}, T_s), \\ \text{sysd} &= \text{c2d}(\text{sys}, T_s, \text{method}) \end{aligned} \tag{2.4 - 1}$$

kde je **sysd** diskrétní Z přenos
sys spojitý obrazový přenos vytvořený příkazem **tf**
Ts perioda vzorkování
method pomocí tohoto parametru ('string') se definuje

'zoh' ...tvarovač nultého řádu
'foh' ...modifikovaný tvarovač 1.řádu
'tustin' ...bilineární transformace (Tustinova) $s = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1}$

Př.2.5

Diskretizujte obrazový přenos $F(s) = \frac{2}{s^2 + 2,5s + 1}$. Perioda vzorkování $T=1$ sec.

Řešení:

a) Pro tvarovač nultého řádu je zápis programu je na obr.2.6.

b) Pro bilineární transformaci je na obr. 2.7

```

» sd2=c2d(s,1,'tustin')

Transfer function:
0.2 z^2 + 0.4 z + 0.2
-----
z^2 - 0.6 z

Sampling time: 1

```

Obr.2.7 Zápis diskretizace pro Tustinovu bilineární transformaci

```

» s=tf([2],[1 2.5 1])

Transfer function:
2
-----
s^2 + 2.5 s + 1

» sd=c2d(s,1,'zoh')

Transfer function:
0.4728 z + 0.2076
-----
z^2 - 0.7419 z + 0.08208

Sampling time: 1

```

Obr.2.6 Zápis programu pro tvarovač nultého řádu

4 LITERATURA

- [1] FRANKLIN, F. G., POWEL, J. D., WORKMAN, L. M.: Digital Control of Dynamic Systems. Addison Wesley Longman, Inc. Third edition, 2003.
- [2] GOODWIN, G. C., GRAEBE, S. F., SALGADO, M. E.: Control System Design. Prentice Hall. 2001.
- [3] FÖLLINGER, O.: Zeitdiskrete Steuerungssysteme. 2.Auflage. R. Oldenbourg Verlag GmbH, München, 1982
- [4] GRACE, A., LAUB, J. A., LITTLE, J. N., THOMPSON, C. M.: Control System Toolbox For Use with MATLAB. User's Guide. The Math Works, Inc. 1995
- [5] MODRLÁK, O.: 1992. Teorie automatického řízení II (Cvičení). Ediční středisko VŠST, Liberec, 1. , sv.200, s. 270