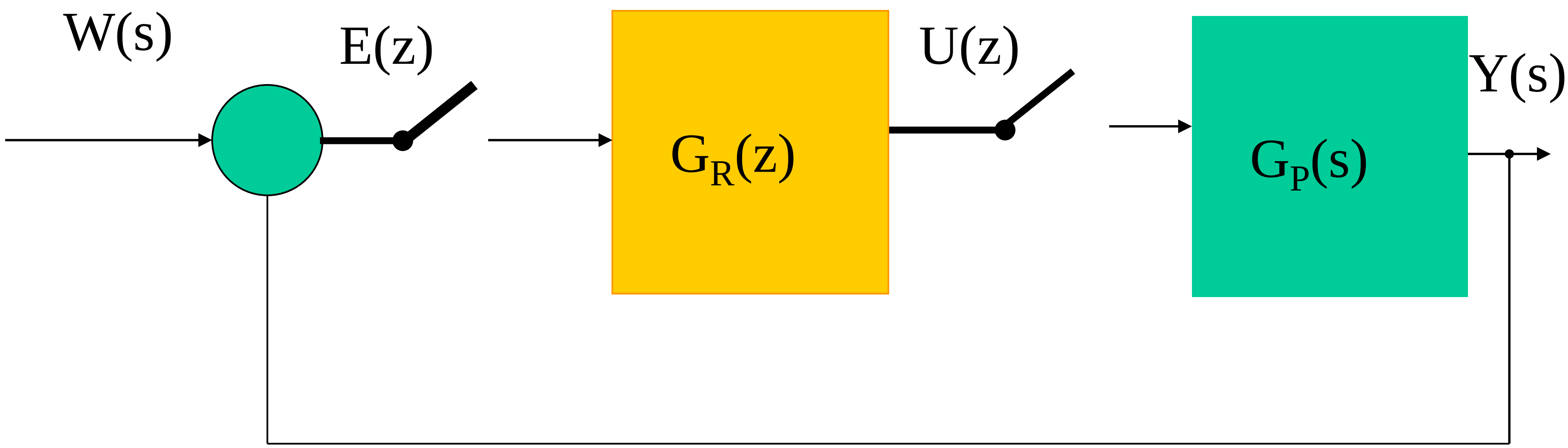
# Deadbeat (DB) regulátory

- Podmienky nulovej regulačnej odchýlky
- Silná a slabá verzia ukončenia regulačného pochodu
- Deadbeat regulátory bez ohraničenia a s ohraničením riadiaceho zásahu

# Určenie podmienok dosiahnutia nulovej regulačnej odchýlky v diskrétnom regulačnom obvode

Uvažujme jednoduchý diskrétny regulačný obvod




$$G_R(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{1-z^{-1}}=\frac{Q(z)}{P(z)}$$

$$G_{y/w}(z,\varepsilon)=\frac{G_p(z,\varepsilon)G_R(z)}{1+G_p(z)G_R(z)}=\frac{Y(z)}{W(z)}$$

$$G_{E/W}(z)=\frac{1}{1+G_p(z)G_R(z)}=\frac{E(z)}{W(z)}=1-G_{y/w}(z)$$

$$G_{E/W}(z,\varepsilon)=1-G_{Y/W}(z,\varepsilon)$$

# Určenie podmienok ukončenia regulačného pochodu za konečný počet krokov

1. Najbežnejším a kvalitatívne novým prvkom v diskrétnej teórii automatického riadenia je požiadavka ukončenia regulačného pochodu za konečný počet intervalov vzorkovania

Tento spôsob riešenia sa v literatúre označuje ako riadenie za konečný počet krokov (deadbeat control) alebo ako konečné časovo-optimálne riadenie(KČOR).

Pre praktické účely a možnosti realizácie riadiaceho zásahu počítačom je potrebné rozlišovať dva prípady:

a. slabá verzia ukončenia regulačného pochodu za konečný počet krokov
b. silná verzia ukončenia regulačného pochodu za konečný počet krokov

Slabá verzia ukončenia regulačného pochodu za **konečný počet krokov** sa dá realizovať vtedy, ak pri nulových počiatočných podmienkach riadenej sústavy môžeme riadiacim zásahom $u(k)$ pre $k = 0,1,2,\ldots,k_{MIN}$ dosiahnuť nulovú regulačnú odchýlku (od kroku $k \geq k_{MIN}$).

$$e(k) = w(k) - y(k)\Big| = 0, \qquad k \geq k_{MIN}$$

**Slabá verzia** teda vyžaduje konečnosť polynómu $E(z)$ a nulové hodnoty regulačnej odchýlky od kroku $k \geq k_{MIN}$ pričom hodnoty regulačnej odchýlky nemusia byť nulové medzi okamihmi vzorkovania.

Riadiaci zásah $U(z)$ nemusí byť pri slabej verzii polynóm s konečným počtom členov a diskrétna prenosová funkcia URO $G_{Y/W}(z)$ je racionálne lomená funkcia.

Aby odchýlka *E(z)* bola konečným polynómom je potrebné kompenzovať všetky polynómy, ktoré existujú v jej menovateli, t.j. ak

$$E(z) = (1 - G_{Y/W}(z))W(z) = \left(1 - \frac{B(z).Q(z)}{A(z)P(z)+B(z)Q(z)}\right)\frac{f(z)}{(1-z^{-1})^m C(z)}$$

$$= \frac{A(z).P(z)}{A(z)P(z)+B(z)Q(z)} \cdot \frac{f(z)}{(1-z^{-1})^m C(z)}$$

**Silná verzia** ukončenia regulačného pochodu za konečný počet krokov sa dá realizovať vtedy, ak pri nulových počiatočných podmienkach regulovaného systému môžeme riadiacim zásahom *u(k)* pre $k=0,1,...,k_{MIN}$ dosiahnuť nulovú regulačnú odchýlku (aj pre $\varepsilon \neq 0$).

$$e(k,\varepsilon) = w(k,\varepsilon) - y(k,\varepsilon) \Big| = 0, \quad k \geq k_{MIN}$$

(kde $k_{MIN}$ je minimálny počet krokov odkedy je regulačná odchýlka nulová aj medzi okamihmi vzorkovania)

**<u>Poz.</u> U silnej verzie je polynóm regulačnej odchýlky $E(z)$ ako aj polynóm riadiaceho zásahu $U(z)$ konečný a diskrétny prenos uzavretého regulačného obvodu je racionálne lome-nou funkciou.**

# *Návrh všeobecného diskrétneho regulátora umožňujúceho ukončiť regulačný pochod za najmenší počet krokov*

## Klasický prístup

Klasický prístup ukončenia regulačného pochodu za konečný počet krokov bol prvýkrát formulovaný Jurym .

1. Uvažujeme, že referenčná premenná je jednotkový skok

   w(t) = 1(t), (môže byť aj pre ľubovoľný ref. signál)
   w(k) = 1(k), pre k=0,1,2,...

2. Ak označíme minimálny počet krokov, za ktorý je regulačný pochod ukončený $k_{MIN}$, potom platí:

$$y(k) = w(k) = 1 \text{ pre } k \geq k_{MIN}$$
$$u(k) = u(k_{MIN}) \quad \text{pre } k \geq k_{MIN}$$

(Riadiaci zásah je ustálený na konečnej hodnote a regulovaná veličina dosiahne žiadanú hodnotu za $k_{MIN}$ krokov.)

Z-obraz referenčnej premennej (w(k) = 1)

$$W(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

**Z-obraz referenčnej premennej w(k) = 1(k) je**

$$W(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots,$$

**Výstupná regulovaná veličina je vyjadrená postupnosťou u KČOR**

$$Y(z) = y(0)z^{0} + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \ldots + 1[z^{-kMIN} + z^{-(kMIN+1)} + \ldots]$$

**Riadiaci zásah U(z):**

$$U(z) = u(0) + u(1) + \ldots + u(k_{MIN})[z^{-kMIN} + z^{-(kMIN+1)} + \ldots]$$

$$G_{y/w}(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = (1 - z^{-1})Y(z) = P(z)$$

$$= (1 - z^{-1})(y(0)z^{0} + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \ldots)$$

$$= y(1)z^{-1} - y(1)z^{-2} + y(2)z^{-2} - y(2)z^{-3} + \ldots +$$

$$= p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3} + p_4 z^{-4} + \ldots = P(z)$$

$$G_{y/w} = \frac{B(z)Q(z)}{A(z)P(z) + B(z)Q(z)}$$

# Porovnaním LP A PP pri rovnakých mocninách „ z “ :

$$y(1)z^{-1} - y(1)z^{-2} + y(2)z^{-2} - y(2)z^{-3} + y(3)z^{-3} + \ldots + =$$

$$= p_1 z^{-1} \quad + \quad p_2 z^{-2} \quad + \quad p_3 z^{-3} \quad + \quad p_4 z^{-4} + \ldots = P(z)$$

$p_1 = y(1)$

$p_2 = y(2) - y(1)$

$p_3 = y(3) - y(2)$

:

$p_m = y(k_{MIN}) - y(k_{MIN-1}) = 1 - y(k_{MIN-1})$

$k_{MIN} = M.$

$\sum p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_M = 1$

$$\frac{U(z)}{W(z)} = q_0+q_1z^{-1}+\ldots+q_Mz^{-M} = Q(z)$$

$$G_{u/w}(z) = \frac{U(z)}{W(z)} = (1-z^{-1})U(z) = Q(z)$$

$$= (1-z^{-1})(u(0)z^{0} + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \ldots)$$

$$= u(0) - u(0)z^{-1} + u(1)z^{-1} - u(1)z^{-2} + u(2)z^{-2} - u(2)z^{-3} + \ldots +$$

$$= q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} + q_3z^{-3} + q_4z^{-4} + \ldots = Q(z)$$

***Porovnaním LP a PP pri rovnakých mocninách „z“ dostaneme***

$q_0 = u(0)$

$q_1 = u(1) - u(0)$

…

$q_M = u(M) - u(M-1)$

$\sum q_i = q_1+q_2+\ldots+q_M = u(M) = 1/K$

***K – je zosilnenie procesu***

$$G_p(1) = \frac{y(M)}{u(M)} = \frac{1}{u(M)} = K$$

**Prenosová funkcia uzavretého diskrétneho regulačného obvodu je:**

$$G_{Y/W}(z) = \frac{G_p(z)G_R(z)}{1+G_p(z)G_R(z)} = \frac{Y(z)}{W(z)} = P(z) = p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \cdots p_Mz^{-M}$$

$$G_P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{P(z)W(z)}{Q(z)W(z)} = \frac{p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \ldots + p_Mz^{-M}}{q_0 + q_1z^{-1} \ldots + \ldots q_Mz^{-M}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$= \frac{\frac{p_1}{q_0}z^{-1} + \frac{p_2}{q_0}z^{-2} + \ldots + \frac{p_M}{q_0}z^{-M}}{(1 + \frac{q_1}{q_0}z^{-1} + \frac{q_2}{q_0}z^{-2} + \ldots + \frac{q_M}{q_0}z^{-M})} = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \ldots + b_Mz^{-M}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \ldots + a_Mz^{-M}}$$

**Kompenzačný typ regulátora**

$$G_R(z) = \frac{1}{G_p(z)} \frac{G_{y/w}(z)}{1 - G_{y/w}(z)}$$

**Koeficienty DB regulátora**

$$\frac{p_1}{q_0} = b_1, \frac{p_2}{q_0} = b_2 \ldots \frac{p_M}{q_0} = b_M$$

$$\frac{q_1}{q_0} = a_1, \frac{q_2}{q_0} = a_2, \ldots, \frac{q_M}{q_0} = a_M$$

$$\frac{p_1}{q_0} = b_1, \frac{p_2}{q_0} = b_2 \ldots \frac{p_M}{q_0} = b_M$$

$$\frac{q_1}{q_0} = a_1, \frac{q_2}{q_0} = a_2, \ldots, \frac{q_M}{q_0} = a_M$$

$$q_1 = a_1 q_0 \qquad p_1 = b_1 q_0$$

$$q_2 = a_2 q_0 \qquad p_2 = b_2 q_0$$

: :

$$q_M = a_M q_0 \qquad p_M = b_M q_0$$

Pretože $\sum p_i = 1$

$\sum b_i q_0 = 1$ **odtial'** $q_0 = 1 / \sum b_i = 1/(b_1 + b_2 + \ldots + b_M) = u(0)$

- **Prvá hodnota riadiaceho zásahu je nepriamo úmerná súčtu koeficientov čitateľa diskrétnej prenosovej funkcie riadeného procesu.**

- so zmenтovaním periódy vzorkovania sa zmenšujú aj hodnoty koeficientov $b_i$, klesá aj ich súčet a naopak hodnota u(0) bude vzrastať.

- potom nevyhnutné je vyberať takú periódu vzorkovania, aby počiatočná hodnota u(0) (ktorá je vypočítaná) bola aj technicky realizovateľná.

Dosadením za $q_i$ a $p_i$ do prenosovej funkcie regulátora a úpravou:

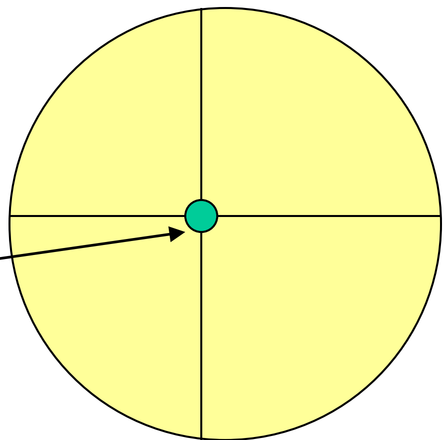
$$G_R(z) = \frac{q_0(1+a_1z^{-1}+...+a^Mz^{-M})}{1-q_o(b_1z^{-1}+...+b^Mz^{-M})} = \frac{q_0A(z)}{1-q_0B(z)}$$

Diskrétna prenosová funkcia riadenia uzavretého regulačného obvodu

$$G_{Y/W}(z) = p_1z^{-1}+p_2z^{-2}+...+p_Mz^{-M} = P(z) =$$

$$= \frac{p_1z^{M-1}+p_2z^{M-2}+...+p^Mz^0}{z^M}$$

$(z^M\text{-}0)$



Prenosová fcia URO s DB regulátorom

$$G_{Y/W}(z) = \frac{q_0(b_1 z^{M-1} + b_2 z^{M-2} + \ldots + b_M)}{z^M} = \frac{q_0 B(z)}{z^M} = \frac{Y(z)}{W(z)}$$

Charakteristická rovnica diskrétneho uzavretého obvodu je:

$$1 + G_p(z).G_R(z) = z^M$$

teda má M pólov v počiatku z-roviny, regulovaná veličina za M krokov (M je rád systému) dosiahne žiadanú hodnotu referenčnej premennej.

**Ak proces riadenia obsahuje dopravné oneskorenie, potom diskrétna prenosová funkcia má tvar:**

$$G_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-d} = \frac{b_1 z^{-(1+d)} + \ldots + b_M z^{-(M+d)}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_M z^{-M}} =$$

$$= \frac{\bar{b}_1 z^{-1} + \ldots + \bar{b}_d z^{-d} + \bar{b}_{d+1} z^{-(1+d)} + \ldots + \bar{b}_{M+d} z^{-(M+d)}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_M z^{-M} + a_{M+1} z^{M+1+} \ldots + a_{M+d} z^{-(M+d)})} =$$

$$= \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ldots + p_{M+d} z^{-(M+d)}}{q_0 + q_1 z^{-1} + \ldots + q_{M+d} z^{-(M+d)}}$$

$M+d=\gamma$

**Koeficienty** $\bar{b}_1 = \bar{b}_2 = \ldots = \bar{b}_d = 0, \quad a_{M+1} = a_{M+2} = \ldots = a_{M+d} = 0$

$\bar{b}_{1+d} = b_1$ (až odtiaľ začína)

$\bar{b}_{2+d} = b_2$

..........

$\bar{b}_{M+d} = b_M$

**Výstupná regulovaná veličina dosiahne žiadanú hodnotu referenčnej premennej w(k) za M+d krokov (kde d je dopravné oneskorenie, ktoré sa zo spojitého dopravného oneskorenia určí vzťahom $d=D/T$ a T je perióda vzorkovania) t.j.**

**$y(k) = w(k) = 1$, pre $k \geq M+d$**

**$u(k) = u(M)$, pre $k \geq M$ (ustálená** hodnota postupnosti riadiaceho zásahu)

$$q_1 = a_1 q_0 \qquad p_1 = \bar{b}_1 q_0 = 0$$

$$q_2 = a_2 q_0 \qquad p_2 = \bar{b}_2 q_0 = 0$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$q_M = a_M q_0 \qquad p_d = \bar{b}_d q_0 = 0$$

---

$$q_{M+1} = a_{M+1} q_0 = 0 \qquad p_{d+1} = \bar{b}_{d+1} q_0 = b_1 q_0$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$q_\gamma = a_\gamma\, q_0 = 0 \qquad p_\gamma = b_\gamma\, q_0 = b_M\, q_0$$

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \ldots + q_M z^{-M}}{1 - p_{1+d} z^{-(1+d)} - \ldots - p_{M+d} z^{-(M+d)}} = \frac{q_0 A(z)}{1 - q_0 B(z) z^{-d}} = \frac{Q(z)}{1 - P(z)} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

## Prenosová fcia URO s DB regulátorom

$$G_{Y/W}(z) = \frac{q_0 B(z)}{z^{M+d}} = \frac{Y(z)}{W(z)}$$

**Charakteristická rovnica URO:** $z^{M+d} = 0$

# DB regulátor s ohraničením riadiaceho zásahu

$$P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots p_M z^{-M} + p_{M+1} z^{-(M+1)} \qquad Q(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + \ldots + q_{M+1} z^{(M+1)}$$

$$G_P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{P(z)\cancel{W(z)}}{Q(z)\cancel{W(z)}} = \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ldots + p_M z^{-M} + p_{M+1} z^{-(M+1)}}{q_0 + q_1 z^{-1} \ldots + \ldots q_M z^{-M} + q_{M+1} z^{-(M+1)}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$= \frac{(p'_1 z^{-1} + p'_2 z^{-2} + \ldots + p'_M z^{-M})(\alpha - z^{-1})}{(q'_0 + q'_1 z^{-1} \ldots + \ldots + q'_M z^{-M})(\alpha - z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_M z^{-M}} =$$

$$= \frac{\alpha p'_1 z^{-1} - p'_1 z^{-2} + \alpha p'_2 z^{-2} - p'_2 z^{-3} \ldots + \alpha p'_M z^{-M} - p'_M z^{-(M+1)}}{\alpha q'_0 - q'_0 z^{-1} + \varepsilon q'_1 z^{-1} - q_1 z^{-2} \ldots + \alpha q'_M z^{-M} - q'_M z^{-(M+1)}}$$

$$= \frac{(\alpha p'_1 z^{-1} - p'_1 z^{-2} + \alpha p'_2 z^{-2} - p'_2 z^{-3} + \ldots + \alpha p'_M z^{-M} - p'_M z^{-(M+1)}}{\alpha q'_0 (1 + (-\frac{1}{\alpha} + \frac{q'_1}{q'_0}) z^{-1} + (-\frac{q'_1}{\alpha q'_0} + \frac{q'_2}{q'_0}) z^{-2} + \ldots + (-\frac{q'_{M-1}}{\alpha q'_0} + \frac{q'_M}{\alpha q'_0}) z^{-M} - \frac{q'_M}{\alpha q_0} z^{-(M+1)})} =$$

$$= \frac{\frac{p'_1}{q'_0} z^{-1} + (-\frac{p'_1}{\alpha q'_0} + \frac{p'_2}{q'_0}) z^{-2} + \ldots + (-\frac{p'_{M-1}}{\varepsilon q'_0} + \frac{p'_M}{q'_0}) z^{-M} + \frac{p'_M}{\alpha q'_0} z^{-(M+1)}}{(1 + (-\frac{1}{\alpha} + \frac{q'_1}{q'_0}) z^{-1} + (-\frac{q'_1}{\alpha q'_0} + \frac{q'_2}{q'_0}) z^{-2} + \ldots + (-\frac{q'_{M-1}}{\alpha q'_0} + \frac{q'_M}{\alpha q'_0}) z^{-M} - \frac{q'_M}{\alpha q_0} z^{-(M+1)})} =$$

$$
\begin{aligned}
q_1' &= a_1 q_0' & p_1' &= b_1 q_0' \\
q_2' &= a_2 q_0' & p_2' &= b_2 q_0' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_m' &= a_M q_0' & p_M' &= b_M q_0'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \alpha q_0' & p_1 &= \alpha p_1' \\
q_1 &= (\alpha q_1' - q_0') & p_2 &= (\alpha p_2' - p_1') \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\
q_M &= (\alpha q_M' - q_{M-1}') & p_M &= (\alpha p_M' - p_{M-1}') \\
q_{M+1} &= -q_M' & p_{M+1} &= -p_M'
\end{aligned}
$$

$$\sum p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_{M+1} = 1$$

$$q_0' = q_0 - \frac{1}{b_1 + b_2 + \ldots + b_M} = q_0 - \frac{1}{\sum b_i}$$

$$q_0 = \alpha q_0' = u(0); \quad q_0' = q_0 - \frac{1}{b_1 + b_2 + \ldots + b_m} = q_0 - \frac{1}{\sum b_i}$$

$$P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots p_M z^{-M} + p_{M+1} z^{-(M+1)} \qquad Q(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + \ldots + q_{M+1} z^{(M+1)}$$

$$G_P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{P(z)\cancel{W(z)}}{Q(z)\cancel{W(z)}} = \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ldots + p_M z^{-M} + p_{M+1} z^{-(M+1)}}{q_0 + q_1 z^{-1} \ldots + \ldots q_M z^{-M} + q_{M+1} z^{-(M+1)}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$= \frac{(p'_1 z^{-1} + p'_2 z^{-2} + \ldots + p'_M z^{-M})(\alpha - z^{-1})}{(q'_0 + q'_1 z^{-1} \ldots + \ldots + q'_M z^{-M})(\alpha - z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_M z^{-M}} =$$

$$= \frac{\alpha p'_1 z^{-1} - p'_1 z^{-2} + \alpha p'_2 z^{-2} - p'_2 z^{-3} \ldots + \alpha p'_M z^{-M} - p'_M z^{-(M+1)}}{\alpha q'_0 - q'_0 z^{-1} + \varepsilon q'_1 z^{-1} - q_1 z^{-2} \ldots + \alpha q'_M z^{-M} - q'_M z^{-(M+1)}}$$

$$= \frac{(\alpha p'_1 z^{-1} - p'_1 z^{-2} + \alpha p'_2 z^{-2} - p'_2 z^{-3} + \ldots + \alpha p'_M z^{-M} - p'_M z^{-(M+1)}}{\alpha q'_0 (1 + (-\frac{1}{\alpha} + \frac{q'_1}{q'_0}) z^{-1} + (-\frac{q'_1}{\alpha q'_0} + \frac{q'_2}{q'_0}) z^{-2} + \ldots + (-\frac{q'_{M-1}}{\alpha q'_0} + \frac{q'_M}{\alpha q'_0}) z^{-M} - \frac{q'_M}{\alpha q_0} z^{-(M+1)})} =$$

$$= \frac{\frac{p'_1}{q'_0} z^{-1} + (-\frac{p'_1}{\alpha q'_0} + \frac{p'_2}{q'_0}) z^{-2} + \ldots + (-\frac{p'_{M-1}}{\varepsilon q'_0} + \frac{p'_M}{q'_0}) z^{-M} + \frac{p'_M}{\alpha q'_0} z^{-(M+1)}}{(1 + (-\frac{1}{\alpha} + \frac{q'_1}{q'_0}) z^{-1} + (-\frac{q'_1}{\alpha q'_0} + \frac{q'_2}{q'_0}) z^{-2} + \ldots + (-\frac{q'_{M-1}}{\alpha q'_0} + \frac{q'_M}{\alpha q'_0}) z^{-M} - \frac{q'_M}{\alpha q_0} z^{-(M+1)})} =$$

# DB regulátor s ohraničením riadiaceho zásahu

$q_0 = u_0$ predpíšeme

$$q_1 = q_0(a_1 - 1) + \frac{1}{\sum b_i}$$

$$q_2 = q_0(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum b_i}$$

$$q_3 = q_0(a_3 - a_2) + \frac{a_2}{\sum b_i}$$

.......... .......... .......... .......

$$q_{M-1} = q_0(a_{M-1} - a_{M-2}) + \frac{a_{M-2}}{\sum b_i}$$

$$q_M = q_0(a_M - a_{M-1}) + \frac{a_{M-1}}{\sum b_i}$$

$$q_{M+1} = a_M\left(-q_0 + \frac{1}{\sum b_i}\right)$$

$$p_1 = q_0 b_1$$

$$p_2 = q_0(b_2 - b_1) + \frac{b_1}{\sum b_i}$$

$$p_3 = q_0(b_3 - b_2) + \frac{b_2}{\sum b_i}$$

.......... .......... .......... .......

$$p_{m-1} = q_0(b_{M-1} - b_{M-2}) + \frac{b_{M-2}}{\sum b_i}$$

$$p_M = q_0(b_M - b_{M-1}) + \frac{b_{M-1}}{\sum b_i}$$

$$p_{M+1} = -b_M\left(q_0 - \frac{1}{\sum b_i}\right)$$