– Návrh regulátora metódou rozmiestňovania pólov

Pre dynamický proces navrhnite diskrétny regulátor metódou pole-placement.
- **odsimulujte priebehy y(t), e(t), u(t)**
- **dokážte stabilitu URO (AP + BQ = Až)**
- **overte výpočtom ustálené hodnoty y(∞), e(∞), u(∞)**
- **vyjadrite diferenčnú rovnicu regulátora**

Diskrétna prenosová funkcia má tvar: $Gp(z) = \dfrac{0.0219z^{-1} + 0.0667z^{-2} + 0.0126z^{-3}}{1 - 2.0785z^{-1} + 1.4373z^{-2} - 0.3307z^{-3}} \times z^{-2}$

Hľadáme diskrétny regulátor v tvare: $Gr(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)} = \dfrac{q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} + q_3z^{-3}}{1 - z^{-1}}$

CHRURO: $1 + Gp(z) \times Gr(z) = A(z) \times P(z) + B(z) \times Q(z) \times z^{-d}$

Princíp metódy: $AP + BQz^{-d} = A_z$ -> riešenie systému rovníc

$$(1 - 2.0785z^{-1} + 1.4373z^{-2} - 0.3307z^{-3}) \times (1 - z^{-1}) \times (1 + p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + p_3z^{-3} + p_4z^{-4}) +$$
$$+ z^{-2} \times (0.0219z^{-1} + 0.0667z^{-2} + 0.0126z^{-3}) \times (q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} + q_3z^{-3}) =$$
$$= (1 - 0.3z^{-1}) \times (1 - 0.3z^{-1}) \times (1 - 0.3z^{-1}) \times (1 - 0.3z^{-1}) \times (1 - 0.3z^{-1}) \times (1 - 0.3z^{-1}) \times (1 - 0.3z^{-1}) \times (1 - 0.3z^{-1})$$

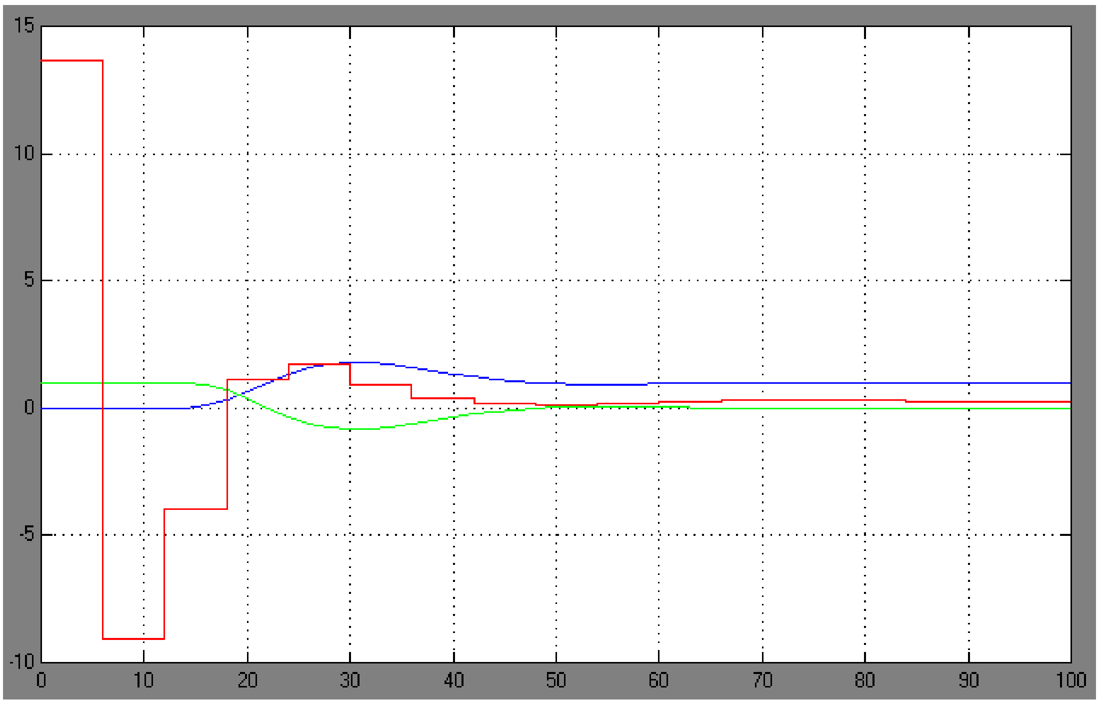
Po roznásobení a porovnaní koeficientov pri rovnakých mocninách z som dostal:

$p_1 = 0.678$	$q_0 = 13.635558$
$p_2 = 1.091084$	$q_1 = -27.100534$
$p_3 = 0.932025$	$q_2 = 18.027713$
$p_4 = 0.151755$	$q_3 = -3.977764$

$$P(z) = (1 - z^{-1}) \times (1 + 0.678z^{-1} + 1.091084z^{-2} + 0.932025z^{-3} + 0.151755z^{-4}) =$$
$$= 1 - 0.322z^{-1} + 0.413084z^{-2} - 0.159059z^{-3} - 0.780270z^{-4} - 0.151755z^{-5}$$

Prenos regulátora: $Gr(z) = \dfrac{13.635558 - 27.100534z^{-1} + 18.027713z^{-2} - 3.977764z^{-3}}{1 - 0.322z^{-1} + 0.413084z^{-2} - 0.159059z^{-3} - 0.780270z^{-4} - 0.151755z^{-5}}$

Simulácia priebehov y(t), e(t), u(t):



Proces má 80%-né preregulovanie, čo vyplýva z toho, že sme mu vnútili póly 0,3 – totiž póly okolo nuly vplývajú na robustnosť regulátora. Aj akčný zásah je veľmi veľký, ak to porovnáme s predchádzajúcimi riešeniami – 13,65. Výhoda je, že proces je vždy stabilný, a čas regulácie je len 45 minút.

Stabilita URO:

Obvod je vždy stabilný, lebo pomocou želaného polynómu (čo sa rovná CHRURO) sme mu vnútili len stabilné póly – 0,3.

Ustálené hodnoty:

$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z} G_{YW} \frac{z}{z-1} = \lim_{z\to 1}\frac{BQ}{AP+BQ} = 1 \Rightarrow \lim_{z\to 1} AP = 0$, čo platí vtedy, ak $\sum p_i = -1$

$$\sum p_i = -0.322 + 0.413084 - 0.159059 - 0.78027 - 0.151755 = -1$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)\times\left(\frac{1}{1+Gz\times Gr}\right)\times\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{0}{0.05917992} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)\times\left(\frac{Gr}{1+Gz\times Gr}\right)\times\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{0.01645}{0.05917973} = 0.2779668$$

Diferenčná rovnica regulátora:

u(k) = 0.322u(k-1) – 0.413084u(k-2) + 0.159059u(k-3) + 0.78027u(k-4) + 0.151755u(k-5) +
+ 13.635558e(k) – 27.100534e(k-1) + 18.027713e(k-2) – 3.977764e(k-3)

Úloha 8. – Návrh klasického deadbeat regulátora

a.) Pre Váš proces navrhnite
- klasický deadbeat regulátor
- klasický deadbeat regulátor s ohraničením akčného zásahu
b.) Dokážte stabilitu URO
c.) Overte ustálené hodnoty y, e, u s využitím vzťahov použitých pri odvodení metódy
d.) Simulujte priebehy u, e, y

Deadbeat regulátor – ukončenie regulačného pochodu za konečný počet krokov k_{min}

Uvažujme všeobecný tvar diskrétneho regulátora: $Gr(z) = \dfrac{Q(z)}{1-P(z)} = \dfrac{q_0 + q_1 z^{-1} + ... + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - ... - p_m z^{-m}}$

Diskrétna prenosová funkcia procesu: $Gp(z) = \dfrac{B(z)}{A(z)} z^{-d} = \dfrac{b_1 z^{-1} + ... + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + ... + a_m z^{-m}} z^{-d}$

Pre klasický deadbeat regulátor bude: $Gr(z) = \dfrac{q_0 \times A(z)}{1 - q_0 \times B(z) \times z^{-d}}$

Pre výpočet koeficientov platia vzťahy: $q_0 = u(0) = 1/\sum b_i$

$q_1 = a_1 * q_0$ $\quad$ $p_{1+d} = b_1 * q_0$
$q_2 = a_2 * q_0$ $\quad$ $p_{2+d} = b_2 * q_0$
$q_m = a_m * q_0$ $\quad$ $p_{m+d} = b_m * q_0$

Podmienky správnosti riešenia: $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ $\qquad$ $\sum_{i=0}^{m} q_i = \dfrac{1}{K}$

Stabilita:

Prenosová funkcia regulátora je: $G_{YW} = P(z^{-1}) = p_1 z^{-1} + ... + p_m z^{-m} = \dfrac{p_1 z^{m-1} + ... + p_{m-1} z + p_m}{z^m} = \dfrac{q_0 B(z)}{z^m}$

Charakteristická rovnica URO má m-násobný koreň v nule. Uzavretý regulačný obvod má m-násobný pól v nule, stabilita je teda daná samotným návrhom regulátora a nemusí sa testovať.

<u>Klasický deadbeat regulátor:</u>

$$Gp(z) = \frac{0.0219 z^{-1} + 0.0667 z^{-2} + 0.0126 z^{-3}}{1 - 2.0785 z^{-1} + 1.4373 z^{-2} - 0.3307 z^{-3}} \times z^{-2}$$

$q_0 = 1/\sum b_i = 1/0.1012 = 9.8814$
$q_1 = a_1 * q_0 = -20.5385$
$q_2 = a_2 * q_0 = 14.2025$
$q_3 = a_3 * q_0 = -3.2678$

$p_1 = 0$
$p_2 = 0$
$p_3 = b_1 * q_0 = 0.2164$
$p_4 = b_2 * q_0 = 0.6591$
$p_5 = b_3 * q_0 = 0.1245$

$$Gr(z) = \frac{9.8814 - 20.5385 z^{-1} + 14.2025 z^{-2} - 3.2678 z^{-3}}{1 - 0.2164 z^{-3} - 0.6591 z^{-4} - 0.1245 z^{-5}}$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 0.2164 + 0.6591 + 0.1245 = 1 \qquad \sum_{i=0}^{m} q_i = 9.8814 - 20.5385 + 14.2025 - 3.2678 = \frac{1}{3.6} = 0.2776$$

Diferenčná rovnica regulátora:

u(k) = 0.2164u(k-3) + 0.6591u(k-4) + 0.1245u(k-5) +
9.8814e(k) – 20.5385e(k-1) + 14.2025e(k-2) – 3.2678e(k-3)

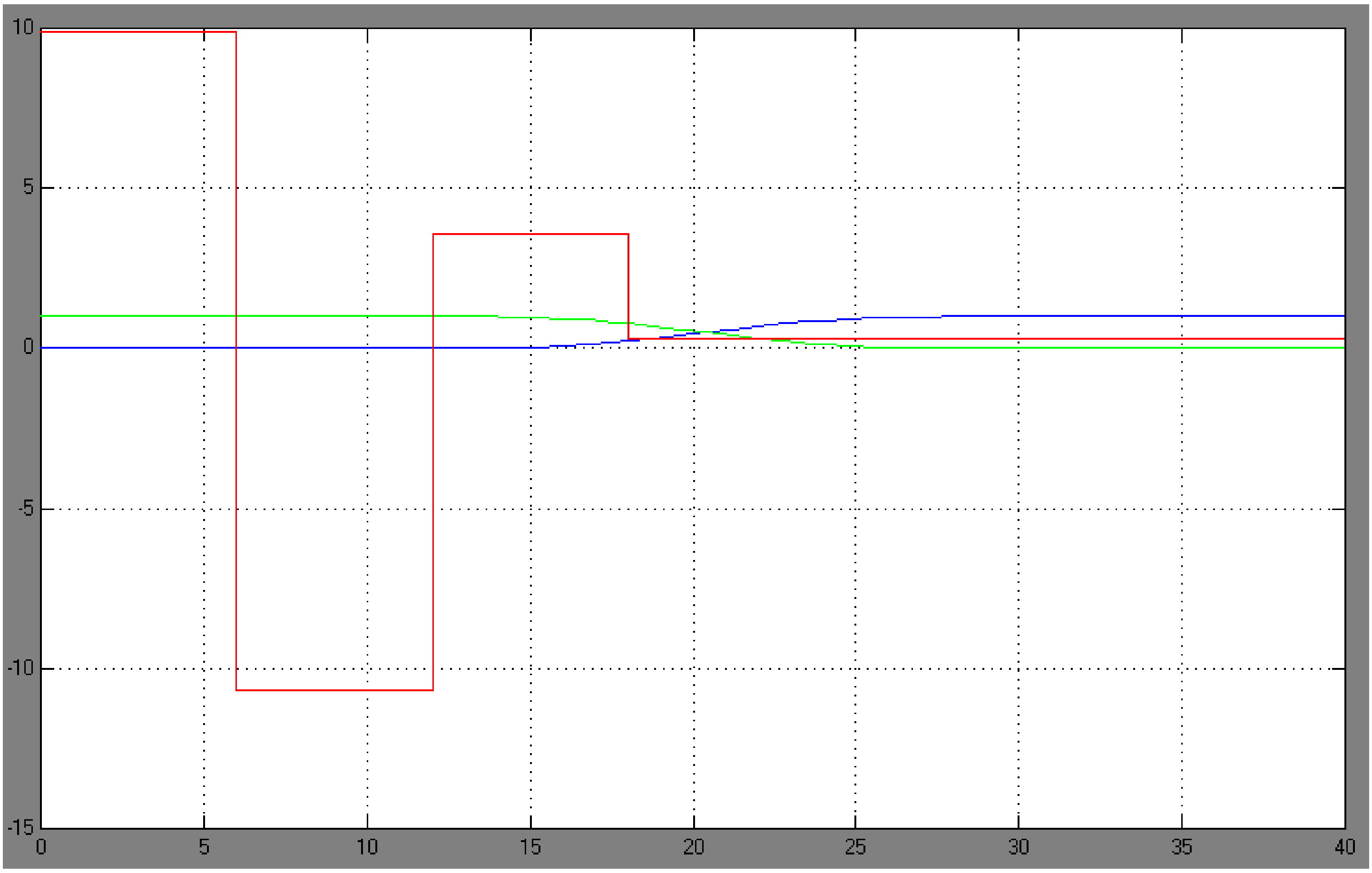
Ustálené hodnoty:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{z\to1}\left(\frac{z-1}{z}\right) \times G_{YW} \times \left(\frac{z}{z-1}\right) = \lim_{z\to1} P(z^{-1}) = 0.2164z^{-3} + 0.6591z^{-4} + 0.1245z^{-5} = 1$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{z\to1}\left(\frac{z-1}{z}\right) \times G_{EW} \times \left(\frac{z}{z-1}\right) = \lim_{z\to1} 1 - P(z^{-1}) = 1 - 0.2164z^{-3} - 0.6591z^{-4} - 0.1245z^{-5} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{z\to1}\left(\frac{z-1}{z}\right) \times G_{UW} \times \left(\frac{z}{z-1}\right) = \lim_{z\to1} Q(z^{-1}) = 9.8814 - 20.5385z^{-1} + 14.2025z^{-2} - 3.2678z^{-3} = 0.2776$$

Simulácia y(t), e(t), u(t):



Pomocou deadbeat regulátora sme dosiahli, že čas ustálenia je len 25,5 minút a proces nemá žiadne preregulovanie. Maximálna hodnota akčného zásahu 9,8814.

Klasický deadbeat regulator s ohraničením akčného zásahu:

maximálny akčný zásah bol: 9.8814 – z toho 90% je približne 9.

Pre výpočet koeficientov platia vzťahy:

$q_0 = u(0) =$ predpíše sa

$s = 1/\sum b_i$

$q_1 = q_0*(a_1-1)+s$

$q_2 = q_0*(a_2-a_1)+a_1*s$

$q_m = q_0*(a_m-a_{m-1})+a_{m-1}*s$

$q_{m+1} = a_m(-q0+s)$

$p_{1+d} = q_0*b_1$

$p_{2+d} = q_0*(b_2-b_1)+b_1*s$

$p_{m+d} = q_0*(b_m-b_{m-1})+b_{m-1}*s$

$p_{m+d+1} = b_m*(-q_0+s)$

$q_0 = 9$
$s = 1/\sum b_i = 9.8814$
$q_1 = 9*(-2.0785-1)+9.8814 = -17.8251$
$q_2 = 9*(1.4373+2.0785)-2.0785*9.8814 = 11.1037$
$q_3 = 9*(-0.3307-1.4373)+1.4373*9.8814 = -1.7095$
$q_4 = -0.3307*(-9+9.8814) = -0.2915$

$p_1 = 0$
$p_2 = 0$
$p_3 = 9*0.0219 = 0.1971$
$p_4 = 9*(0.0667-0.0219)+0.0219*9.8814 = 0.6196$
$p_5 = 9*(0.0126-0.0667)+0.0667*9.8814 = 0.1722$
$p_6 = 0.0126*(-9+9.8814) = 0.0111$

$$Gr(z) = \frac{9-17.8251z^{-1}+11.1037z^{-2}-1.7095z^{-3}-0.2915z^{-4}}{1-0.1971z^{-3}-0.6196z^{-4}-0.1722z^{-5}-0.0111z^{-6}}$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 0.1971+0.6196+0.1722+0.0111 = 1$$

$$\sum_{i=0}^{m} q_i = 9-17.8251+11.1037-1.7095-0.2915 = \frac{1}{3.6} = 0.2776$$

Diferenčná rovnica regulátora:

u(k) = 0.1971u(k-3) + 0.6196u(k-4) + 0.1722u(k-5) + 0.0111u(k-6) +
9e(k) – 17.8251e(k-1) + 11.1037e(k-2) – 1.7095e(k-3) – 0.2915e(k-4)

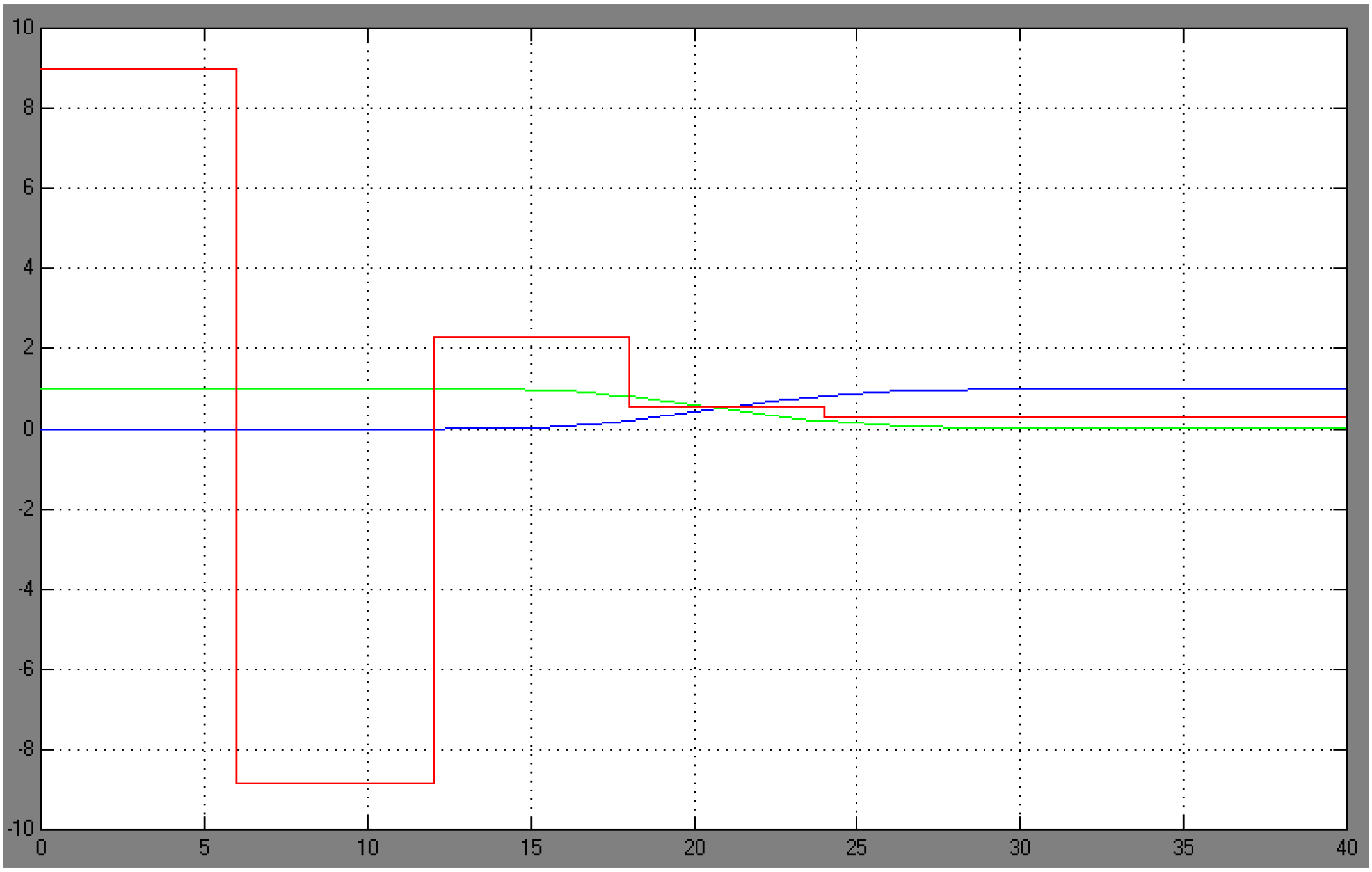
Ustálené hodnoty:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)\times G_{YW}\times\left(\frac{z}{z-1}\right) = \lim_{z\to 1} P(z^{-1}) = 0.1971z^{-3}+0.6196z^{-4}+0.1722z^{-5}+0.0111z^{-6} = 1$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)\times G_{EW}\times\left(\frac{z}{z-1}\right) = \lim_{z\to 1} 1-P(z^{-1}) = 1-0.1971z^{-3}-0.6196z^{-4}-0.1722z^{-5}-0.0111z^{-6} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)\times G_{UW}\times\left(\frac{z}{z-1}\right) = \lim_{z\to 1} Q(z^{-1}) = 9-17.8251z^{-1}+11.1037z^{-2}-1.7095z^{-3}-0.2915z^{-4} = 0.2776$$

Simulácia y(t), e(t), u(t):



Akčnému zásahu sme predpísali maximálnu hodnotu 9 -> čas ustálenia je v tomto prípade trošku väčší, 27 minút a proces takisto nemá žiadne preregulovanie.

Úloha 9. – Návrh všeobecných diskrétnych regulátorov s využitím algebraickej teórie

Navrhnite diskrétny regulátor umožňujúci dosiahnuť
a.) stabilné čas.-opt. riadenie (slabá verzia)
b.) konečné čas.-opt. riadenie (silná verzia)
c.) konečné čas.-opt. riadenie s ohraničením akčného zásahu (silná + ohraničenie)
d.) feed-forward riadenie
e.) minimalizáciu $\|E\|^2 \to \min$ **(kvadratický regulátor)**

Slabá verzia:

Východická: $Gp(z) = \dfrac{B(z)}{A(z)}$ $\quad d(A,B) = 1$ $\quad W(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ $\quad d(f,g) = 1$

Hľadáme: $Gr(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$ $\quad d(Q,P) = 1$

$$Gp(z) = \frac{0.0219z^{-3} + 0.0667z^{-4} + 0.0126z^{-5}}{1 - 2.0785z^{-1} + 1.4373z^{-2} - 0.3307z^{-3}} \qquad W(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

1.) $d(A,g)=1 \qquad A_0=\frac{A}{D}=1-2.0785z^{-1}+1.4373z^{-2}-0.3307z^{-3} \qquad g_0=\frac{g}{D}=1-z^{-1}$

2.) Faktorizácia

$A_0=A_0^+\times A_0^-$ -> A0 má len stabilné póly, takže: $A_0^+=1-2.0785z^{-1}+1.4373z^{-2}-0.3307z^{-3}$, $A_0^-=1$

$B=0.0219z^{-3}\times(1+0.2025z^{-1})\times(1+2.8393z^{-1})=B^+\times B^-$ -> $B^+=1+0.2025z^{-1}$, $B^-=0.0219z^{-3}+0.0622z^{-4}$

$f=f^+\times f^-$ -> $f^+=f^-=1$

3.) Diofantická rovnica: $gA_0^-X'+B^-Y'=f^+ \qquad d(g,B^-)=1$

$(1-z^{-1})\times 1\times X'+(0.0219z^{-3}+0.0622z^{-4})\times Y'=1$

určenie stupňov X', Y', ak : $A'X'+B'Y'=1$
$st(A')+st(B')>st(f^+)$ -> podmienka platí, lebo 1 + 4 > 0
$st(X')=st(B')-1=4-1=3\Rightarrow X'=x_0+x_1z^{-1}+x_2z^{-2}+x_3z^{-3}$
$st(Y')=st(A')-1=1-1=0\Rightarrow Y'=y_0$

$(1-z^{-1})\times(x_0+x_1z^{-1}+x_2z^{-2}+x_3z^{-3})+(0.0219z^{-3}+0.0622z^{-4})\times y_0=1$

$z^0: x_0=1$	$x_0=1$
$z^{-1}: x_1-x_0=0$	$x_1=1$
$z^{-2}: x_2-x_1=0$	$x_2=1$
$z^{-3}: x_3-x_2+0.0219y_0=0$	$x_3=0.7396$
$z^{-4}: -x_3+0.0622y_0=0$	$y_0=11.8906$

$X'=1+z^{-1}+z^{-2}+0.7396z^{-3}$
$Y'=11.8906$

4.) Regulátor: $Gr(z)=\frac{Y'A_0^+}{X'B^+g_0}=\frac{11.8906\times(1-2.0785z^{-1}+1.4373z^{-2}-0.3307z^{-3})}{(1+z^{-1}+z^{-2}+0.7396z^{-3})\times(1+0.2025z^{-1})\times(1-z^{-1})}$

$$Gr(z)=\frac{11.8906-24.7146z^{-1}+17.0904z^{-2}-3.9322z^{-3}}{1+0.2025z^{-1}-0.2604z^{-3}-0.7923z^{-4}-0.1498z^{-5}}$$

5.) Diferenčná rovnica regulátora:

u(k) = -0.2025u(k-1) + 0.2604u(k-3) + 0.7923u(k-4) + 0.1498u(k-5) +
11.8906e(k) – 24.7146e(k-1) + 17.0904e(k-2) – 3.9322e(k-3)

6.) Regulačná odchýlka: $E(z)=A_0^-X'f^-=1\times(1+z^{-1}+z^{-2}+0.7396z^{-3})\times 1=1+z^{-1}+z^{-2}+0.7396z^{-3}$

7.) Počet krokov: $k_e=1+st(E)=4$

8.) Riadiaci zásah: $U(z)=\dfrac{A_0 f^- Y'}{B^+ g_0}=\dfrac{(1-2.0785z^{-1}+1.4373z^{-2}-0.3307z^{-3})\times 1\times 11.8906}{(1+0.2025z^{-1})\times(1-z^{-1})}$

$U(z)=\dfrac{11.8906-24.7146z^{-1}+17.0904z^{-2}-3.9322z^{-3}}{1-0.7975z^{-1}-0.2025z^{-2}}$ -> nie je konečná postupnosť

$$U(z)=11.8906z^{0}-15.2321z^{-1}+7.3406z^{-2}-1.1626z^{-3}+0.5593z^{-4}+0.2106z^{-5}+0.2813z^{-6}+...$$

9.) Výstupná veličina:

$$Y(z)=\frac{Y' B^- f^-}{g}=\frac{11.8906\times(0.0219z^{-3}+0.0622z^{-4})\times 1}{1-z^{-1}}=\frac{0.2604z^{-3}+0.7396z^{-4}}{1-z^{-1}}$$
$$Y(z)=0.2604z^{-3}+1z^{-4}+....$$

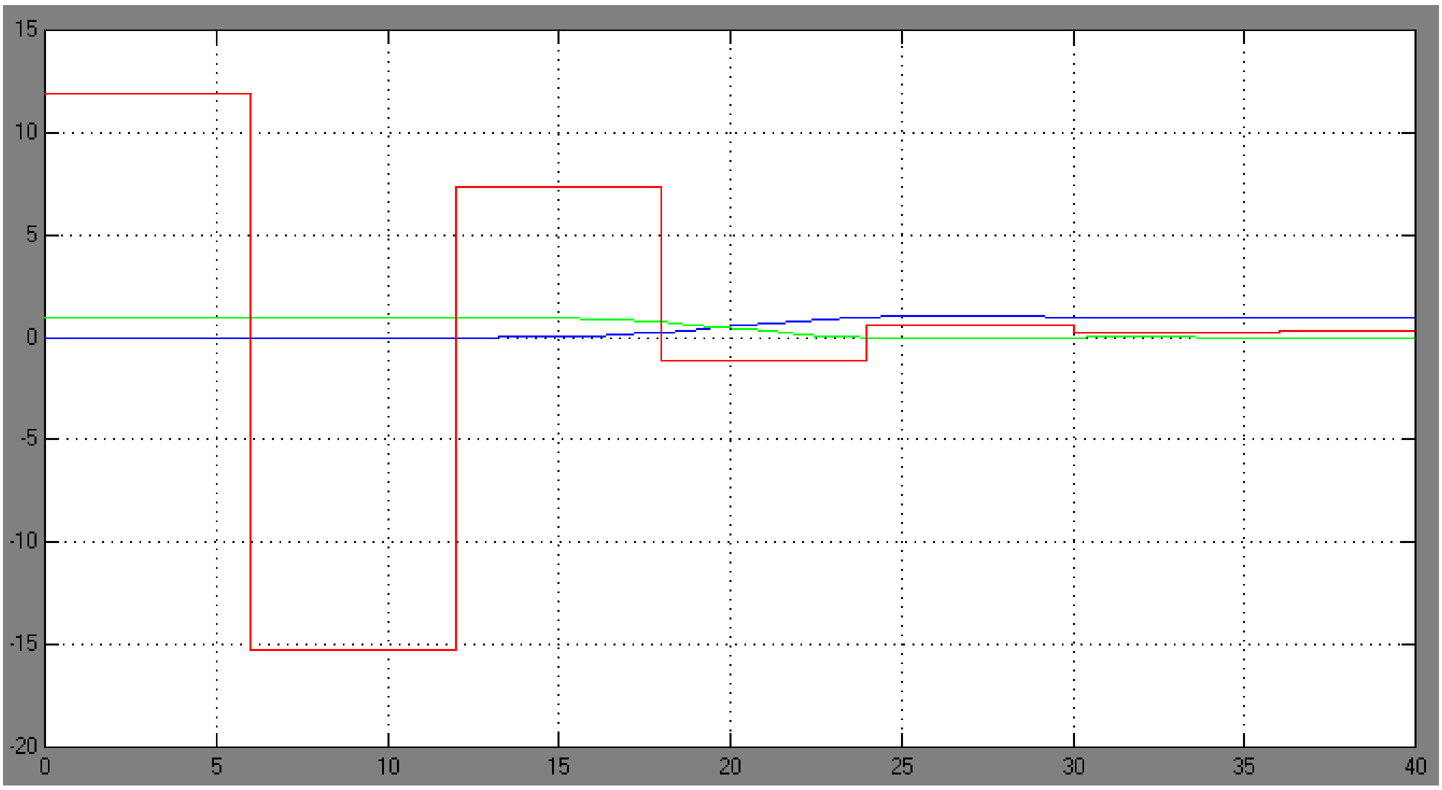
10.) Ustálené hodnoty:

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)\times\left(\frac{Gz\times Gr}{1+Gz\times Gr}\right)\times\left(\frac{z}{z-1}\right)=\frac{0.03380964}{0.03380964}=1$$
$$\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)\times\left(\frac{1}{1+Gz\times Gr}\right)\times\left(\frac{z}{z-1}\right)=\frac{0}{0.03380964}=0$$
$$\lim_{t\to\infty} u(t)=\lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)\times\left(\frac{Gr}{1+Gz\times Gr}\right)\times\left(\frac{z}{z-1}\right)=\frac{0.00939}{0.03380964}=0.2777314$$

11.) Stabilita URO: $CHRURO(z)=A_0^+ B^+ f^+=(1+0.2025z^{-1})(1-0.6487z^{-1})(1-0.6789z^{-1})(1-0.7509z^{-1})$

Charakteristická rovnica uzavretého obvodu má len také póly, ktoré ležia v jednotkovej kružnice, takže URO je stabilný.

12.) Simulácia:



Pomocou slabej verzie algebraického regulátora sme dosiahli, že čas ustálenia je 27 minút a proces má 5%-né preregulovanie. Maximálna hodnota akčného zásahu je 11,8906. Aj z obrázku, aj z delenie vidieť, je akčný zásah nie je konečná postupnosť – regulátor nedrží hodnoty medzi periódami vzorkovania (dôvod preregulovania, a slabého kmitania).

Silná verzia:

$$Gp(z) = \frac{0.0219z^{-3} + 0.0667z^{-4} + 0.0126z^{-5}}{1 - 2.0785z^{-1} + 1.4373z^{-2} - 0.3307z^{-3}} \qquad W(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

1.) $d(A,g) = D = 1$ $\quad g_0 = \dfrac{g}{D} = 1 - z^{-1}$ -> g0 sa nerovná 1 -> použijeme modifikovanú silnú verziu, medzi riadený proces a regulátor sa zaradí integračný člen rádu, ktorý sa rovná rádu g (referenčnej premennej).

$$g_p = (1 - z^{-1})$$
$$A = g_p \times A_{stare} = 1 - 3.0785z^{-1} + 3.5158z^{-2} - 1.768z^{-3} + 0.3307z^{-4}$$

$$d(A,g) = D = (1 - z^{-1}) \qquad A_0 = \frac{A}{D} = 1 - 2.0785z^{-1} + 1.4373z^{-2} - 0.3307z^{-3} \qquad g_0 = \frac{g}{D} = 1$$

2.) Faktorizácia

$A_0 = A_0^+ \times A_0^-$ -> A_0 má len stabilné póly, takže: $A_0^+ = 1 - 2.0785z^{-1} + 1.4373z^{-2} - 0.3307z^{-3}$, $A_0^- = 1$

$B = 0.0219z^{-3} \times (1 + 0.2025z^{-1}) \times (1 + 2.8393z^{-1}) = B^+ \times B^-$ -> $B^+ = 1 + 0.2025z^{-1}$, $B^- = 0.0219z^{-3} + 0.0622z^{-4}$

$f = f^+ \times f^-$ -> $f^+ = f^- = 1$

3.) Diofantická rovnica: $gA_0^- X' + BY' = f^+$

$$(1 - z^{-1}) \times 1 \times X' + (0.0219z^{-3} + 0.0667z^{-4} + 0.0126z^{-5}) \times Y' = 1$$

určenie stupňov X', Y', ak : $A'X' + B'Y' = 1$

$st(A') + st(B') > st(f^+)$ -> podmienka platí, lebo 1 + 5 > 0

$st(X') = st(B') - 1 = 5 - 1 = 4 \Rightarrow X' = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + x_3 z^{-3} + x_4 z^{-4}$

$st(Y') = st(A') - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow Y' = y_0$

$$(1 - z^{-1}) \times (x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + x_3 z^{-3} + x_4 z^{-4}) + (0.0219z^{-3} + 0.0667z^{-4} + 0.0126z^{-5}) \times y_0 = 1$$

$z^0 : x_0 = 1$	$x_0 = 1$
$z^{-1} : x_1 - x_0 = 0$	$x_1 = 1$
$z^{-2} : x_2 - x_1 = 0$	$x_2 = 1$
$z^{-3} : x_3 - x_2 + 0.0219y_0 = 0$	$x_3 = 0.7836$
$z^{-4} : x_4 - x_3 + 0.0667y_0 = 0$	$x_4 = 0.1245$
$z^{-5} : -x_4 + 0.0126y_0 = 0$	$y_0 = 9.8814$

$X^{'} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + 0.7836z^{-3} + 0.1245z^{-4}$

$Y^{'} = 9.8814$

4.) Regulátor: $Gr(z) = \dfrac{Y^{'}A_0^{+}}{X^{'}g_0 g_p} = \dfrac{9.8814 \times (1 - 2.0785z^{-1} + 1.4373z^{-2} - 0.3307z^{-3})}{(1 + z^{-1} + z^{-2} + 0.7836z^{-3} + 0.1245z^{-4}) \times 1 \times (1 - z^{-1})}$

$$Gr(z) = \frac{9.8814 - 20.5385z^{-1} + 14.2025z^{-2} - 3.2678z^{-3}}{1 - 0.2164z^{-3} - 0.6591z^{-4} - 0.1245z^{-5}}$$

5.) Diferenčná rovnica regulátora:

u(k) = 0.2164u(k-3) + 0.6591u(k-4) + 0.1245u(k-5) +
9.8814e(k) – 20.5385e(k-1) + 14.2025e(k-2) – 3.2678e(k-3)

6.) Regulačná odchýlka:

$$E(z) = A_0^{-} X^{'} f^{-} = 1 \times (1 + z^{-1} + z^{-2} + 0.7836z^{-3} + 0.1245z^{-4}) \times 1 = 1 + z^{-1} + z^{-2} + 0.7836z^{-3} + 0.1245z^{-4}$$

7.) Počet krokov: $k_e = 1 + st(E) = 5$

8.) Riadiaci zásah: $U(z) = \dfrac{A_0 f^{-} Y^{'}}{g_0 g_p} = \dfrac{(1 - 2.0785z^{-1} + 1.4373z^{-2} - 0.3307z^{-3}) \times 1 \times 9.8814}{1 \times (1 - z^{-1})}$

$$U(z) = \frac{9.8814 - 20.5385z^{-1} + 14.2025z^{-2} - 3.2678z^{-3}}{1 - z^{-1}}$$

$$U(z) = 9.8814z^{0} - 10.6571z^{-1} + 3.5454z^{-2} + 0.2776z^{-3} + 0.2776z^{-4} ...$$

9.) Výstupná veličina:

$$Y(z) = \frac{Bf^{-}Y^{'}}{g} = \frac{(0.0219z^{-3} + 0.0667z^{-4} + 0.0126z^{-5}) \times 1 \times 9.8814}{1 - z^{-1}} = \frac{0.2164z^{-3} + 0.6591z^{-4} + 0.1245z^{-5}}{1 - z^{-1}}$$

$$Y(z) = 0.2164z^{-3} + 0.8755z^{-4} + 1z^{-5} ....$$

10.) Ustálené hodnoty:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{z \to 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) \times \left(\frac{Gz \times Gr}{1 + Gz \times Gr} \right) \times \left(\frac{z}{z-1} \right) = \frac{0.028083}{0.028083} = 1$$

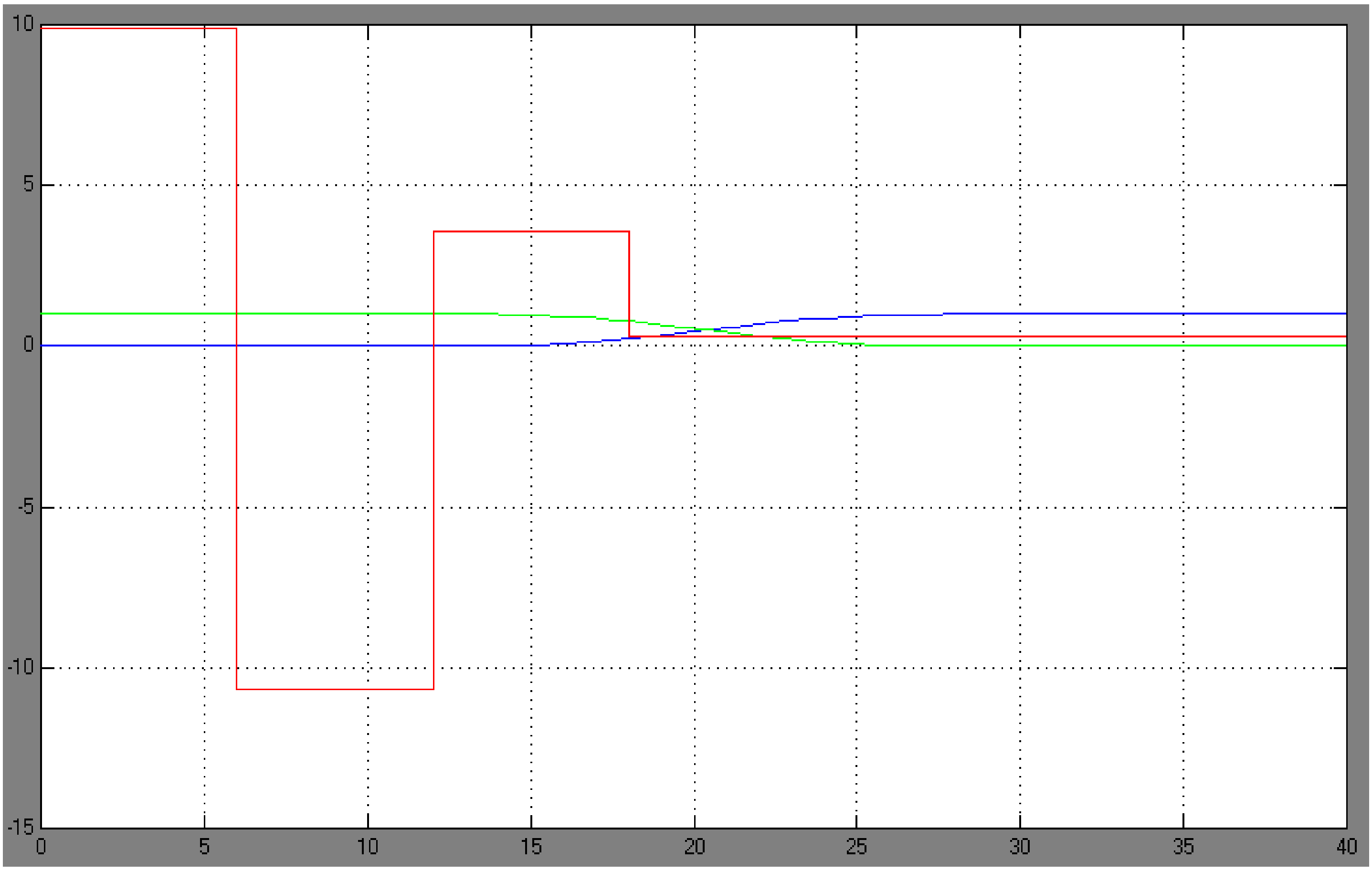
$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{z \to 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) \times \left(\frac{1}{1 + Gz \times Gr} \right) \times \left(\frac{z}{z-1} \right) = \frac{0}{0.028083} = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = \lim_{z \to 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) \times \left(\frac{Gr}{1 + Gz \times Gr} \right) \times \left(\frac{z}{z-1} \right) = \frac{0.007799}{0.028083} = 0.2777125$$

11.) Stabilita URO: $CHRURO(z) = A_0^{+} B^{+} f^{+} = (1 + 0.2025z^{-1})(1 - 0.6487z^{-1})(1 - 0.6789z^{-1})(1 - 0.7509z^{-1})$

Charakteristická rovnica uzavretého obvodu má len také póly, ktoré ležia v jednotkovej kružnice, takže URO je stabilný.

12.) Simulácia:



Pomocou silnej verzie algebraického regulátora sme dosiahli, že čas ustálenia je 25,5 minút a proces nemá žiadne preregulovanie. Maximálna hodnota akčného zásahu je 9,8814. Aj z obrázku, aj z delenie vidieť, je akčný zásah je konečná postupnosť – regulátor drží hodnoty medzi periódami vzorkovania (nevzniklo ani preregulovanie ani kmity).

Silná verzia s obmedzením akčného zásahu

Cieľ: realizácia akčného zásahu, ktorý neprekročí predpísané ohraničenie $|u| \le v$

Využijeme výsledky zo silnej verzie (partikulárne riešenie), ktoré modifikujeme pomocou danej požiadavky.

Všeobecné riešenie: $\begin{array}{l} X_v = X' + BH \\ Y_v = Y' - (gA_0^-)H \end{array}$ $\quad H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + \ldots + h_p z^{-p}$, hľadáme H(z) s min. stupňom

Maximálny akčný zásah je 9.8814 -> použijem 90%-né obmedzenie $|u| \le 8.9$

Nech H = h_0

$$Y_v = 9.8814 - ((1 - z^{-1}) \times (1)) \times h_0 = 9.8814 - h_0 + h_0 z^{-1}$$

$$U(z) = \frac{A_0 f^-}{g_0 g_p} Y_v = \frac{(1 - 2.0785z^{-1} + 1.4373z^{-2} - 0.3307z^{-3}) \times 1 \times (9.8814 - h_0 + h_0 z^{-1})}{1 \times (1 - z^{-1})} =$$

$$= \frac{9.8814 - h_0 + (3.0785h_0 - 20.538)z^{-1} + (14.203 - 3.5158h_0)z^{-2} + (1.7680h_0 - 3.2678)z^{-3} - 0.3307h_0 z^{-4}}{1 - z^{-1}}$$

$$U(z) = (9.8814 - h_0)z^0 + (2.0785h_0 - 10.6566)z^{-1} + (3.5464 - 1.4373h_0)z^{-2} + (0.3307h_0 + 0.2768)z^{-3}$$

h_0 určíme zo systému nerovníc:

-8.9 <= 9.8814 – h0 <= 8.9
-8.9 <= 2.0785h0 – 10.6566 <= 8.9
-8.9 <= 3.5464 – 1.4373h0 <= 8.9
-8.9 <= 0.3307h0 + 0.2786 <= 8.9

0.9814 <= h0 <= 18.7814
0.8451 <= h0 <= 9.4090
-3.7248 <= h0 <= 8.6596
-27.7551 <= h0 <= 26.0702

$$\mathrm{h}_0 \in < 0.9814; 8.6596 >$$

zvolím si $h_0 = 3.7804$

$$X_v = X' + BH = (1 + z^{-1} + z^{-2} + 0.7836z^{-3} + 0.1245z^{-4}) + (0.0219z^{-3} + 0.0667z^{-4} + 0.0126z^{-5}) \times h_0$$
$$X_v = 1 + z^{-1} + z^{-2} + 0.8664z^{-3} + 0.3767z^{-4} + 0.0476z^{-5}$$
$$Y_v = 6.1010 + 3.7804z^{-1}$$

1.) Regulátor: $Gr(z) = \dfrac{Y_v A_0^+}{g_p g_0 X_v} = \dfrac{(6.1010 + 3.7804z^{-1}) \times (1 - 2.0785z^{-1} + 1.4373z^{-2} - 0.3307z^{-3})}{(1 - z^{-1}) \times (1 + z^{-1} + z^{-2} + 0.8664z^{-3} + 0.3767z^{-4} + 0.0476z^{-5})}$

$$Gr(z) = \frac{6.101 - 8.9005z^{-1} + 0.9114z^{-2} + 3.416z^{-3} - 1.2502z^{-4}}{1 - 0.1336z^{-3} - 0.4897z^{-4} - 0.3291z^{-5} - 0.0476z^{-6}}$$

2.) Diferenčná rovnica regulátora:

u(k) = 0.1336u(k-3) + 0.4897u(k-4) + 0.3291u(k-5) + 0.0476u(k-6) +
6.101e(k) – 8.9005e(k-1) + 0.9114e(k-2) + 3.416e(k-3) – 1.2502e(k-4)

3.) Regulačná odchýlka:

$$E(z) = A_0^- X_v f^- = 1 \times (1 + z^{-1} + z^{-2} + 0.8664z^{-3} + 0.3767z^{-4} + 0.0476z^{-5}) \times 1 =$$
$$= 1 + z^{-1} + z^{-2} + 0.8664z^{-3} + 0.3767z^{-4} + 0.0476z^{-5}$$

4.) Počet krokov: $k_e = 1 + st(E) = 6$

5.) Riadiaci zásah:

$$U(z) = \frac{A_0 f^-}{g_0 g_p} Y_v = \frac{(1 - 2.0785z^{-1} + 1.4373z^{-2} - 0.3307z^{-3}) \times 1 \times (6.1010 + 3.7804z^{-1})}{1 \times (1 - z^{-1})} =$$
$$= \frac{6.1010 - 8.9z^{-1} + 0.9119z^{-2} + 3.4159z^{-3} - 1.2502z^{-4}}{1 - z^{-1}}$$

$$U(z) = 6.1010z^0 - 2.7990z^{-1} - 1.8871z^{-2} + 1.5288z^{-3} + 0.2786z^{-4} + 0.2786z^{-5} + \ldots$$

6.) Výstupná veličina:

$$Y(z) = \frac{Bf^{-}Y_v}{g} = \frac{(0.0219z^{-3} + 0.0667z^{-4} + 0.0126z^{-5}) \times 1 \times (6.1010 + 3.7804z^{-1})}{1 - z^{-1}} =$$

$$= \frac{0.1336z^{-3} + 0.4897z^{-4} + 0.3290z^{-5} + 0.0476z^{-6}}{1 - z^{-1}}$$

$$Y(z) = 0.1336z^{-3} + 0.6233z^{-4} + 0.9523z^{-5} + 1z^{-6} + \ldots$$

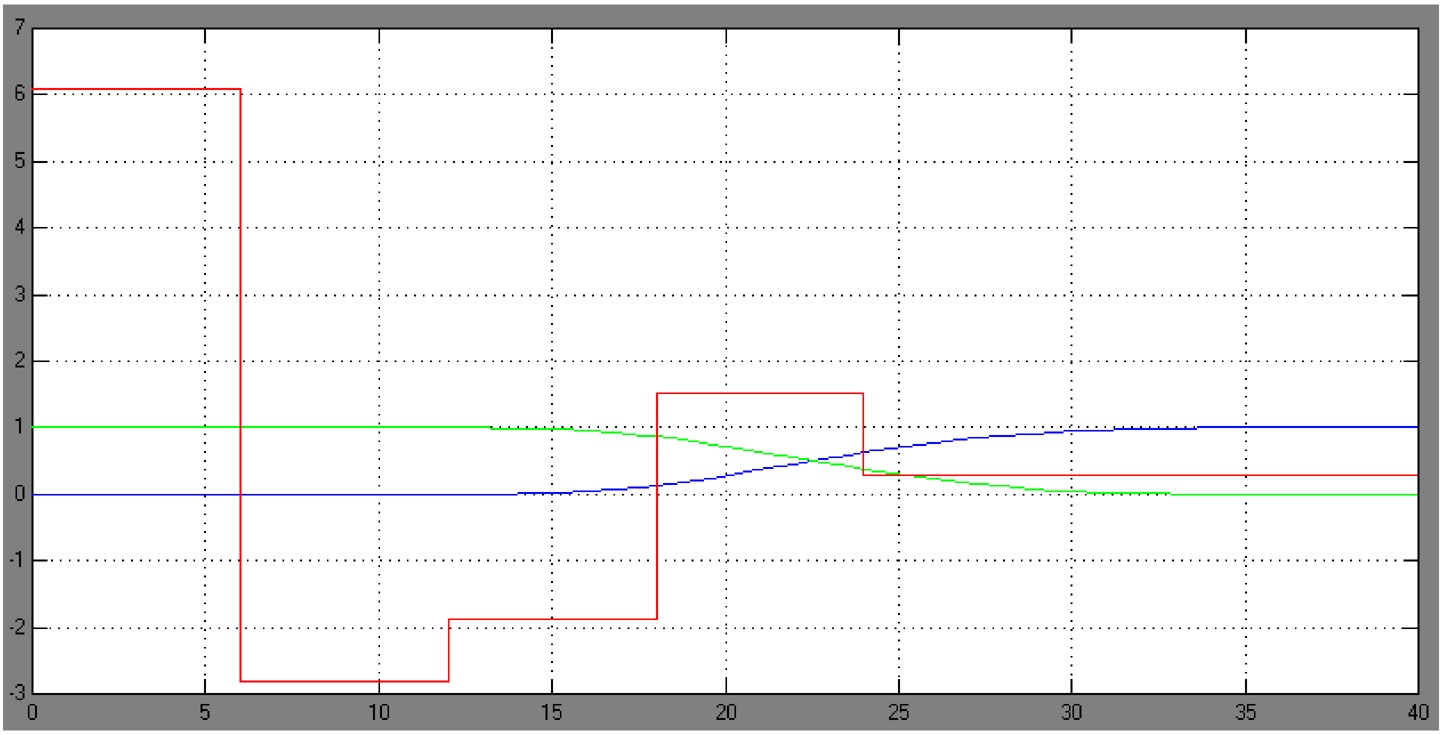
7.) Ustálené hodnoty:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)\times\left(\frac{Gz\times Gr}{1+Gz\times Gr}\right)\times\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{0.028093}{0.028093} = 1$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)\times\left(\frac{1}{1+Gz\times Gr}\right)\times\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{0}{0.028093} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)\times\left(\frac{Gr}{1+Gz\times Gr}\right)\times\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{0.007808}{0.028093} = 0.2779696$$

8.) Simulácia:



Akčnému zásahu sme predpísali maximálnu hodnotu 8.9 -> čas ustálenia je v tomto prípade trošku väčší, 30 minút a proces takisto nemá žiadne preregulovanie (dôsledok silnej verzie). Maximálna hodnota akčného zásahu je 6.1010.

9.) Stabilita URO:

$$CHRURO(z) = A_0^{+}B^{+}f^{+} = (1 + 0.2025z^{-1})(1 - 0.6487z^{-1})(1 - 0.6789z^{-1})(1 - 0.7509z^{-1})$$

Charakteristická rovnica uzavretého obvodu má len také póly, ktoré ležia v jednotkovej kružnice, takže URO je stabilný.

Feed-Forward riadenie

Priama väzba: $G_{r2}(z)=\frac{S(z)}{P(z)}$ Spätná väzba: $G_{r1}(z)=-\frac{Q(z)}{P(z)}$

Riešil som slabú verziu: $\begin{aligned} gO+B^{-}S&=1 \\ AX+B^{-}Q&=1 \end{aligned}$

$(1-z^{-1})\times O+(0.0219z^{-3}+0.0622z^{-4})\times S=1$

Pre prvú rovnicu som použil modifikovaný Euklidov algoritmus (Ježek, Kozák)

g	B-	C	F	Red.	q*z^-k	t	O	S
$1-z^{-1}$	$0.0219z^{-3}+0.0622z^{-4}$	1	Y				$1+z^{-1}+z^{-2}+0.7396z^{-3}$	11.89061
				B/A	$-0.0622z^{-3}$	X/Y		
$1-z^{-1}$	$0.0841z^{-3}$	1	Y				$1+z^{-1}+z^{-2}$	11.89061
				B/A	$-0.0841z^{-2}$	X/Y		
$1-z^{-1}$	$0.0841z^{-2}$	1	Y				$1+z^{-1}$	11.89061
				B/A	$-0.0841z^{-1}$	X/Y		
$1-z^{-1}$	$0.0841z^{-1}$	1	Y				1	11.89061
				B/A	-0.0841	X/Y		
$1-z^{-1}$	-0.0841	1	Y				0	11.89061
				A/B	$11.89061z^{-1}$	Y/X		
1	-0.0841	1	X				0	11.89061
				C/B	-11.89061	-Y		
1	-0.0841	0	X				0	0
				B/A	-0.0841	X/Y		
1	0	0	Y				0	0

$O=1+z^{-1}+z^{-2}+0.7396z^{-3}$
$S=11.8906$

Pre druhú rovnicu metódu neurčitých koeficientov:

$(1-2.0785z^{-1}+1.4373z^{-2}-0.3307z^{-3})\times X+(0.0219z^{-3}+0.0622z^{-4})\times Q=1$

určenie stupňov X, Q:
$st(A)+st(B^{-})>0$ -> podmienka platí, lebo 3 + 4 > 0
$st(X)=st(B^{-})-1=4-1=3 \Rightarrow X=x_0+x_1z^{-1}+x_2z^{-2}+x_3z^{-3}$
$st(Q)=st(A)-1=3-1=2 \Rightarrow Q=q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}$

$$(1-2.0785z^{-1}+1.4373z^{-2}-0.3307z^{-3})\times(x_0+x_1z^{-1}+x_2z^{-2}+x_3z^{-3})+$$
$$+(0.0219z^{-3}+0.0622z^{-4})\times(q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2})=1$$

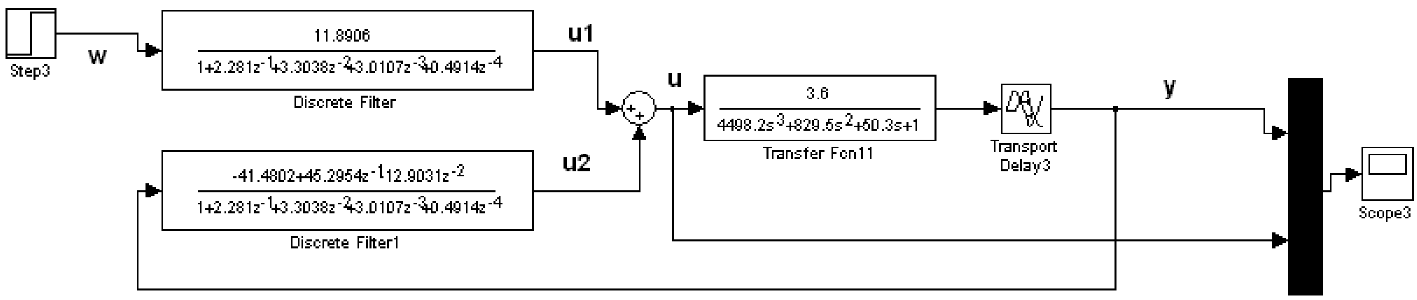
$$
\begin{aligned}
&z^0: x_0 = 1 \\
&z^{-1}: x_1 - 2.0785x_0 = 0 \\
&z^{-2}: x_2 - 2.0785x_1 + 1.4373x_0 = 0 \\
&z^{-3}: x_3 - 2.0785x_2 + 1.4373x_1 - 0.3307x_0 + 0.0219q_0 = 0 \\
&z^{-4}: -2.0785x_3 + 1.4373x_2 - 0.3307x_1 + 0.0219q_1 + 0.0622q_0 = 0 \\
&z^{-5}: 1.4373x_3 - 0.3307x_2 + 0.0219q_2 + 0.0622q_1 = 0 \\
&z^{-6}: -0.3307x_3 + 0.0622q_2 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_0 = 1 \\
&x_1 = 2.0785 \\
&x_2 = 2.8829 \\
&x_3 = 2.4269 \\
&q_0 = 41.4802 \\
&q_1 = -45.2954 \\
&q_2 = 12.9031
\end{aligned}
$$

$$X = 1 + 2.0785z^{-1} + 2.8829z^{-2} + 2.4269z^{-3}$$

$$Q = 41.4802 - 45.2954z^{-1} + 12.9031z^{-2}$$

Schéma obvodu:



1.) Regulátory:

$$G_{r1}(z) = -\frac{Q(z)}{P(z)} = -\frac{Q(z)}{B^{+}X(z)} = -\frac{(41.4802 - 45.2954z^{-1} + 12.9031z^{-2})}{(1 + 0.2025z^{-1}) \times (1 + 2.0785z^{-1} + 2.8829z^{-2} + 2.4269z^{-3})}$$

$$G_{r1}(z) = -\frac{41.4802 - 45.2954z^{-1} + 12.9031z^{-2}}{1 + 2.281z^{-1} + 3.3038z^{-2} + 3.0107z^{-3} + 0.4914z^{-4}}$$

$$G_{r2}(z) = \frac{S(z)}{P(z)} = \frac{S(z)}{B^{+}X(z)} = \frac{11.8906}{(1 + 0.2025z^{-1}) \times (1 + 2.0785z^{-1} + 2.8829z^{-2} + 2.4269z^{-3})}$$

$$G_{r2}(z) = \frac{11.8906}{1 + 2.281z^{-1} + 3.3038z^{-2} + 3.0107z^{-3} + 0.4914z^{-4}}$$

2.) Diferenčné rovnice regulátorov:

Pre $G_{r1}(z)$: u2(k) = -2.281u2(k-1) – 3.3038u2(k-2) – 3.0107u2(k-3) – 0.4914u2(k-4) - 41.4802y(k) + 45.2954y(k-1) – 12.9031y(k-2)

Pre $G_{r2}(z)$: u1(k) = -2.281u1(k-1) – 3.3038u1(k-2) – 3.0107u1(k-3) – 0.4914u1(k-4) + 11.8906w(k)

u(k) = u1(k) + u2(k) = -2.281u1(k-1) – 3.3038u1(k-2) – 3.0107u1(k-3) – 0.4914u1(k-4) + 11.8906w(k) – 2.281u2(k-1) – 3.3038u2(k-2) – 3.0107u2(k-3) – 0.4914u2(k-4) - 41.4802y(k) + 45.2954y(k-1) – 12.9031y(k-2)

3.) Riadiaci zásah:

$$U(z)=\frac{SA_0}{B^+g_0}f=\frac{11.8906\times(1-2.0785z^{-1}+1.4373z^{-2}-0.3307z^{-3})}{(1+0.2025z^{-1})\times(1-z^{-1})}$$

$$U(z)=\frac{11.8906-24.71461z^{-1}+17.0904z^{-2}-3.9322z^{-3}}{1-0.7975z^{-1}-0.2025z^{-2}}$$ -> nie je konečná postupnosť

$$U(z)=11.8906z^{0}-15.2318z^{-1}+7.3508z^{-2}-1.1543z^{-3}+0.5679z^{-4}+0.2192z^{-5}+\ldots$$

4.) Regulačná odchýlka:

$$E(z)=f\times O=1+z^{-1}+z^{-2}+0.7396z^{-3}$$

5.) Výstupná veličina:

$$Y(z)=W(z)-E(z)=W(z)-f\times O(z)=(1z^{0}+1z^{-1}+\ldots)-(1+z^{-1}+z^{-2}+0.7396z^{-3})=0.2624z^{-3}+1z^{-4}+\ldots$$

6.) Ustálené hodnoty:

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{z\to 1}G_{Y/W}=\lim_{z\to 1}(B^-S)=\lim_{z\to 1}(0.0219z^{-3}+0.0622z^{-4})\times 11.8906=1$$

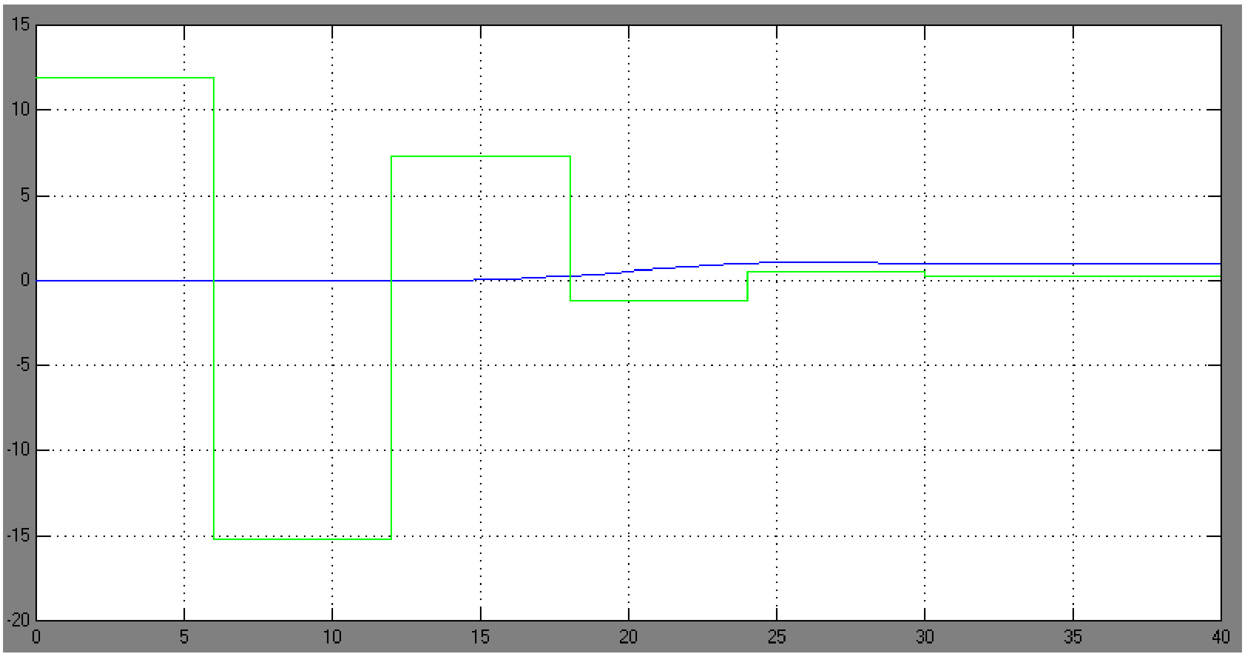
$$\lim_{t\to\infty}u(t)=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)\times U(z)=(1-z^{-1})\times\frac{11.8906\times(1-2.0785z^{-1}+1.4373z^{-2}-0.3307z^{-3})}{(1+0.2025z^{-1})\times(1-z^{-1})}=0.2778$$

7.) Stabilita URO:

$$CHRURO(z)=A_0^+B^+f^+=(1+0.2025z^{-1})(1-0.6487z^{-1})(1-0.6789z^{-1})(1-0.7509z^{-1})$$

Charakteristická rovnica uzavretého obvodu má len také póly, ktoré ležia v jednotkovej kružnice, takže URO je stabilný.

8.) Simulácia:



Pomocou FFW riadenia sme dosiahli, že čas ustálenia je 24 min., a maximálne preregulovanie je 5% - to vyplýva z toho, že riešená slabá verzia nedrží hodnotu medzi periódami vzorkovania – U(z) nie je konečná postupnosť.