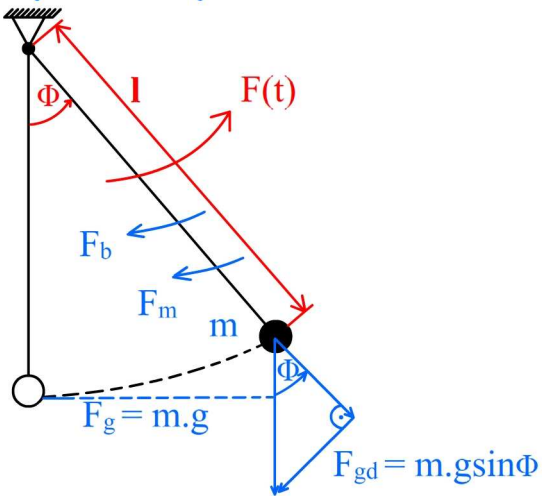


Nelineárne systémy diferenciálnych rovníc

Pr. Uvažujme matematické kyvadlo na obr. 1, kde závažie o hmotnosti m [kg], ktoré pôsobí silou

$$F_g = m \cdot g \text{ [N]} \text{ je zavesené na prúte o dĺžke } l, \text{ ktorého hmotnosť môžeme zanedbať.} \quad (1.1)$$

Fyzikálne kyvadlo



- Φ [rad] – uhol vychýlenia kyvadla
- m – hmotnosť závažia
- l – dĺžka závesu
- g – gravitačná konštanta
- B – koeficient tlmenia

Obr. 1

Úloha: Zostavte matematický a simulačný model kyvadla v jazyku Matlab.

$$F_v = F(t) \rightarrow \text{budiaca sila (vyvedie DS z rovnovážnej polohy)} \quad (1.2)$$

$F_m \rightarrow$ sila zotrvačnosti

$F_b \rightarrow$ brzdná sila (odpor vzduchu + tangenciálna zložka tiažovej sily) F_{gd}

d'Alambertov princíp:

$$F_m + F_b + F_{gd} - F(t) = 0 \quad \sum F_i = 0 \text{ (ťažisko)} \quad (1.3)$$

• $F_m = m \cdot l \cdot \frac{d^2\Phi(t)}{dt^2} = m \cdot l \cdot \ddot{\Phi}(t) \rightarrow$ sila zotrvačnosti

• $F_b = B \cdot l \cdot \frac{d\Phi}{dt} = B \cdot l \cdot \dot{\Phi}(t) \rightarrow$ brzdiaca sila \sim obvodovej rýchlosti telesa (1.4)

$l \cdot \dot{\Phi}(t) = v(t)$ rýchlosť záv.

$F_{gd} = m \cdot g \cdot \sin \Phi \rightarrow$ tangenciálna zložka tiaže (1.5)

$F(t) = \frac{M(t)}{l} \rightarrow$ budiaca sila, $M(t)$ vonkajší moment (1.6)

$m \cdot l \cdot \ddot{\Phi}(t) + B \cdot l \cdot \dot{\Phi}(t) + m \cdot g \cdot \sin \Phi = \frac{M(t)}{l}$ NDR 2rádu s pravou stranou

$\ddot{\Phi}(t) + \underbrace{\frac{B}{m}}_{a_1} \dot{\Phi}(t) + \underbrace{\frac{g}{l}}_{a_0} \sin \Phi = \underbrace{\frac{1}{m \cdot l^2}}_A M(t) \rightarrow$ normovaná DR (1.7)

$m \cdot l \cdot \ddot{\Phi}(t) + B \cdot l \cdot \dot{\Phi}(t) + m \cdot g \cdot \sin \Phi = 0 \rightarrow$ autonómna DR

↑
Bez pravej strany

Substitúcia: $x_1(t) = 0(t)$; $x_2(t) = \dot{0}(t)$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{B}{m}x_2(t) - \frac{g}{l}\sin(x_1(t)) \quad \rightarrow \text{budiaca sila} \quad \text{substitučný kanonický tvar} \quad (1.8)$$

prepis do Matlabu:

```
% funkcia 'kyvadlo.m' - kmitanie vychyleného kyvadla s tlmením
function xdot = kyvadlo(t,x)
l=0.6; B=1e-2; g=9.81; m=0.2038;
xdot = [x(2); -B/m*x(2)-g/l*sin(x(1))];
```

```
% súbor 'kyv23sol.m' na riešenie DR kyvadla
Tspan = [1 5]; %t0 = 0; tfin = 5; časovy interval na výpočet
x0 = [1;0]; % počiatočné podmienky
opt=odeset('AbsTol',1,'RelTol',1);
[t,x] = ode23('kyvadlo',Tspan, x0, opt);
subplot(211), plot(t,x(:,1), ':',t,x(:,2),'-'); title('Kyvadlo')
xlabel('t[s]'), ylabel('uhol [rad], rych [rad/s]');
subplot(212), plot(x(:,1), x(:,2));
```