

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Hálkova 6, 461 17 Liberec 1, CZ

Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Teorie automatického řízení I.

ANALÝZA DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

Studijní materiály

Doc. Ing. Osvald Modrlák, CSc.



Katedra řídicí techniky

Obsah

1. Úvod	2
2. Matematický popis dynamických systémů	3
2.1 Klasifikace dynamických systémů	3
2.2 Vnější a vnitřní popis	5
2.3 Matematicko-fyzikální analýza	6
3. Analýza lineárních dynamických systémů v časové oblasti	10
3.1 Odezva systému na obecný signál, konvoluce	11
3.2 Diferenciální rovnice	14
3.3 Obrazový přenos	16
3.3.1 Definice obrazového přenosu, vlastnosti, póly, nuly, řád astatizmu	16
3.3.2 Odezva soustavy 1. řádu, sériové řazení soustav 1. řádu	20
3.3.3 Soustava 2. řádu	22
3.3.4 Systémy s dopravním zpožděním	27
3.3.5 Model dynamického systému s poruchovou veličinou	29
3.3.6 Popis členů a prvků v regulační technice	30
3.4 Bloková algebra	31
3.4.1 Signální rovnice	32
3.4.2 Metoda postupných úprav	34
3.4.3 Masonův vzorec	39
3.5 Metoda geometrického místa kořenu	42
3.5.1 Základní pojmy, kořenový hodograf	42
3.5.2 Zobrazování komplexních čísel	45
3.5.3 Vlastnosti a konstrukce geometrického místa kořenových hodografů	47
3.5.4 Vlastnosti geometrického místa kořenů	49
4.4 Stabilita ve frekvenční oblasti, Nyquistovo kritérium stability	55
4.4.1 Formulace Nyquistových podmínek stability	56
4.4.2 Kontrola skutečného počtu oběhů kritického bodu	60
4.4.3 Relativní stabilita, fázová a amplitudová bezpečnost	66
Literatura	68

1. ÚVOD

Automatická regulace a řízení se stává v současné době integrální součástí strojírenských výrobků, dodávaných technologických celků a zařízení. V průmyslové praxi jsou zcela běžné regulace tlaku, teploty, výkonu, polohy, otáček, hladiny, koncentrace atd. Automatická regulace nejen že ušetří obsluhu rutinních a opakovaných činností, ale také zajišťuje kvalitu produkce včetně komfortu pro obslužný personál. Je skutečností, že dokonalá regulace a řízení zvyšuje konkurenceschopnost výrobků na domácích i zahraničních trzích.

V posledních letech se v řízení a regulaci prosazují **číslicové řídicí a regulační systémy**, které jsou v německé literatuře označovány jako "Prozeßleitsysteme", v anglické jako "Process control system". S politováním je však nutno konstatovat, že i přes bouřlivé využívání číslicové techniky, počítačů a mikropočítačů, je regulace spojitých soustav **nejčastěji realizována pomocí spojitých nebo quazi-spojitých (číslicových) PID-regulátorů**.

Řídicí a regulační systémy jsou přirozeně využívány pro řízení a regulaci rozsáhlých technologických celků s mnoha regulačními a řídicími smyčkami. PID regulátory jsou u těchto systémů realizovány softwarově jako **funkční bloky**.

Pro regulaci jednoduchých regulačních obvodů jsou v současnosti používány spjité **kompaktní PID** nebo **dvou- a třípolohové regulátory**. Jedná se např. o regulace tlaku, teploty, polohy, otáček, výšky hladiny, koncentrace chemických roztoků atd.

Teorie řízení poskytuje matematický aparát pro analýzu a syntézu systémů automatické regulace. V současné době z hlediska zpracování signálů a odpovídajícího hardware je možno teorii řízení rozdělit na

- 1) Teorii řízení spojitých systémů
- 2) Teorii řízení diskrétních systémů

Teorie řízení spojitých systémů zahrnuje analýzu a syntézu spojitých lineárních a nelineárních systémů. Základy analýzy spojitých systémů jsou studovány v základních předmětech automatické regulace ke kterým počítáme "Základy spojitého řízení".

Teorie řízení diskrétních systémů se zabývá analýzou a syntézou diskrétních systémů, které zpracovávají signály pouze ve zvolených periodách času. Tyto systémy využívají zpravidla pro realizaci řídicích zákonů mikroprocesorů nebo mikropočítačů, které jsou opatřeny A/D a výstupními D/A převodníky.

Cílem kurzu **Teorie řízení I.** je prohloubení znalostí a praktických návyků z analýzy, syntézy a identifikace spojitých lineárních dynamických systémů v návaznosti na „Základy spojitého řízení“. Předmět je zaměřen na principy experimentální identifikace, na metody optimálního návrhu parametrů PID regulátoru a na frekvenční metody syntézy regulačního obvodu. Je zahrnuta i problematika rozvětvených regulačních obvodů. Teoretická i praktická výuka využívá softwarové podpory Matlabu.

Cílem kurzu **Teorie řízení II.** je seznámit studenty s metodami odhadu parametrů diskrétních modelů, se základy číslicového řízení, se základy analýzy ve stavovém prostoru včetně estimace stavu a stavovou regulací, se základy nelineární regulace, s fuzzy metodami a aplikací neuronových sítí, s analýzou a syntézou systémů s více vstupy a výstupy. Teoretická i praktická výuka využívá také softwarové podpory Matlabu.

2. MATEMATICKÝ POPIS DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

Analýza a syntéza dynamických systémů se realizuje pomocí matematického modelu. Dynamické vlastnosti reálných a průmyslových systémů se všemi vazbami a interakcemi lze jen stěží vyjádřit matematickým modelem, který by byl dostatečně obecný a použitelný v praxi. Zavádí se proto nejdříve zjednodušující předpoklady, které umožní vytvořit zjednodušený fyzikální model. Matematický model se pak odvozuje z fyzikálních zákonů aplikovaných na tento fyzikální model nebo pomocí metod identifikace na základě měření vstupů a výstupů zkoumaného dynamického systému.

2.1 KLASIFIKACE DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

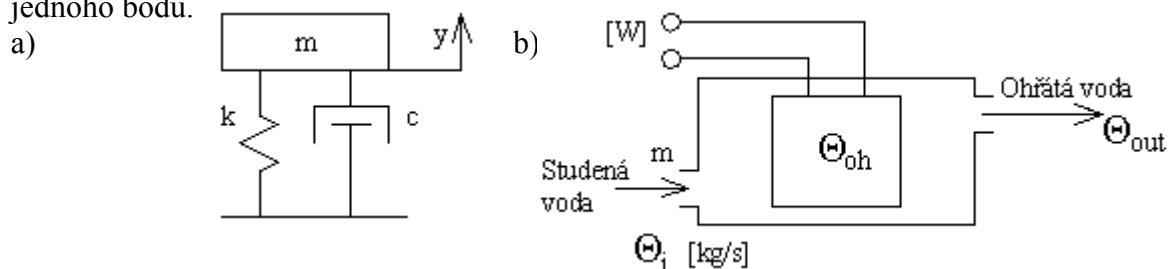
Reálný dynamický systém má hmoty a média rozložené v **prostoru**, které mohou být ve vzájemné interakci. Hmoty a média tvoří kontinua /1/. Tak např. pružina má hmotu rozloženou v prostoru ve tvaru válce vytvarovaného do šroubovice. Jiným příkladem může být těleso elektrického ohříváku, jehož hmota je rozložena v prostoru ve tvaru válce nebo šroubovice.

Fyzikální modely je možno rozdělit do dvou skupin podle následujících hledisek:

- hmoty a média tvoří kontinua rozložená v prostoru. Hovoříme pak o **systémech s rozloženými parametry**.
- hmoty a média jsou koncentrovány do myšlených bodů. Hovoříme pak o **systémech s koncentrovanými parametry**.

Vlastnosti dynamických systémů s rozloženými parametry popisují **parciální diferenciální rovnice** /1/, /2/. Pak hmotu na pružině, pokud uvažujeme rozložení hmoty pružiny v prostoru, pokládáme za systém s rozloženými parametry. Její dynamické vlastnosti v každém bodě prostoru popisují **parciální diferenciální rovnice**. Podobně, pokládáme průtokový ohřivač za systém s rozloženými parametry, uvažujeme-li průběhy teplotních polí jak v objemu kapaliny, tak i v ohřivacím tělese. Bilance energie se pak provádí na každém elementu objemu kapaliny a ohřivacího tělesa.

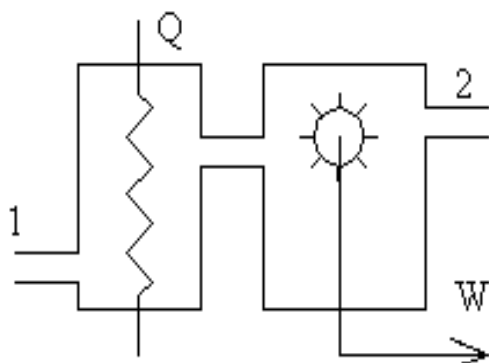
Vlastnosti dynamických systémů s **konceptovanými parametry** popisují **obyčejné diferenciální rovnice** /2/, /3/. Tak např. hmotu na pružině viz Obr.I-1a pokládáme za systém s koncentrovanými parametry, jestliže hmotu pružiny můžeme zanedbat nebo koncentrovat do jednoho bodu.



Obr.I-1 Systémy s koncentrovanými parametry

Podobně průtokový ohřivač na obr.I-1b můžeme pokládat za systém s koncentrovanými parametry, jestliže budeme předpokládat, že teplota vody je v celém objemu stejná. Tento předpoklad je srovnatelný s předpokladem, že hmota kapaliny se koncentruje do jednoho bodu o dané teplotě, která však je časově proměnná. Obdobě předpokládáme, že teplota v topném tělese je také stejná, což odpovídá koncentraci hmoty topného tělesa do jednoho bodu. Pak aplikujeme **makroskopickou bilanci energie** na tyto dva "hmotné body", které jsou ve vzájemné interakci.

Obecný systém s koncentrovanými parametry pro **neizotermní systémy** je schématicky znázorněna obr.I-2. Vstupem jsou média v rovině 1 a přiváděné teplo Q . Výstupem je médium v rovině 2 a mechanická práce W konaná na okolí. Teplota média mezi rovinami



Obr.I – 2. Neizotermní systém s koncentrovanými parametry

1-2 se bere v celém objemu jako stejná, ale časově proměnná. Je zřejmé, že pokud budeme "řídit" výstupy, to je parametry výstupního média a mechanickou práci konanou na okolí parametry vstupního média a přiváděným teplem Q , pak rozložení teplotních, tlakových, rychlostních polí není z hlediska vlastního řízení výstupních parametrů významné a pro účely řízení a regulace se zanedbává.

Vztahy mezi podmínkami na vstupu a výstupu médií a energiemi je v neizotermních systémech popsán **makroskopickou bilancí hmoty, hybnosti a energie**.

Přísně vzato, jsou všechny technologické systémy s rozloženými parametry. Z hlediska řízení a regulace těchto systémů, postačuje zpravidla uvažovat tyto systémy jako systémy s koncentrovanými parametry.

Lineární a nelineární dynamické systémy

Dynamický systém může být obecně popsán nelineárními nebo lineárními diferenciálními rovnicemi. Hovoříme pak o nelineárních nebo lineárních dynamických systémech.

Lineární t-invariantní systém

Lineární t-invariantní dynamický systém je popsán diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty ve tvaru

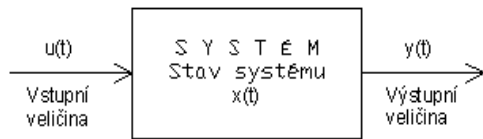
$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1u^{(1)} + b_0u, \text{ pro } m \leq n, \quad (2 - 1)$$

nebo pro systém s poruchovou veličinou

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1u^{(1)} + b_0u + c_{mc}d^{(mc)} + \dots + c_1d^{(1)} + c_0d, \text{ pro } m, mc \leq n, \quad (2 - 2)$$

kde je $u(t)$ vstupní (akční) veličina,
 $y(t)$ výstupní (regulovaná) veličina,
 $d(t)$ poruchová veličina,
 a_i, b_j, c_k jsou koeficienty diferenciální rovnice.

2.2 VNĚJŠÍ A VNITŘNÍ POPIS



Obr.2.3 Lineární dynamický systém

Lineární dynamický systém s **jedním vstupem** $u(t)$ a **jedním výstupem** $y(t)$ je schématicky znázorněn na obr.2.3. V anglosaské literatuře jsou tyto systémy označovány zkratkou **SISO** (Simple input-simple output).

Ze základních předmětů automatické regulace je známo, že matematický popis dynamického systému lze rozdělit na dvě základní skupiny - na **vnější** a **vnitřní popis** dynamického systému.

- **Vnější popis systému** je vyjádření dynamických vlastností systému pomocí relací mezi vstupní a výstupní veličinou. Tento popis neposkytuje informaci o vnitřních stavech systému. Měřením vstupní a výstupní veličiny můžeme získat pouze vnější popis systému.

Relace mezi vstupem a výstupem může být vyjádřena:

- Diferenciální rovnicí (2-1,2)
- Obrazovým přenosem $F(s)$
- Impulsní přechodovou (váhovou) funkcí $g(t)$
- Přechodovou funkcí $h(t)$
- Frekvenčním přenosem $F(i\omega)$
- Frekvenční charakteristikou.

- **Vnitřní popis systému** chápeme jako relaci mezi vstupní veličinou $u(t)$, stavem systému $x(t)$ a výstupní veličinou $y(t)$. Hovoříme pak o **stavových rovnicích systému**.

Obecně lze dynamický systém popsat nelineární vektorovou stavovou rovnicí

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (2 - 3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (2 - 4)$$

- kde $\mathbf{x}(t)$...je n -rozměrný stavový vektor,
 $\mathbf{y}(t)$...je výstup systému
 \mathbf{f} ...je n -rozměrové nelineární vektorové funkce,
 \mathbf{g} ... je skalární funkce.

Je-li dynamický systém lineární a t -invariantní pak platí

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (2 - 5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (2 - 6)$$

- kde $\mathbf{x}(t)$...je n -rozměrný stavový vektor,
 $\mathbf{y}(t)$...je výstup systému

- A ...je matice systému rozměru $[n \times n]$,
- B ...je matice buzení rozměru $[n \times 1]$,
- C ...je matice výstupu rozměru $[1 \times n]$,
- D ...je koeficient převodu $[1 \times 1]$.

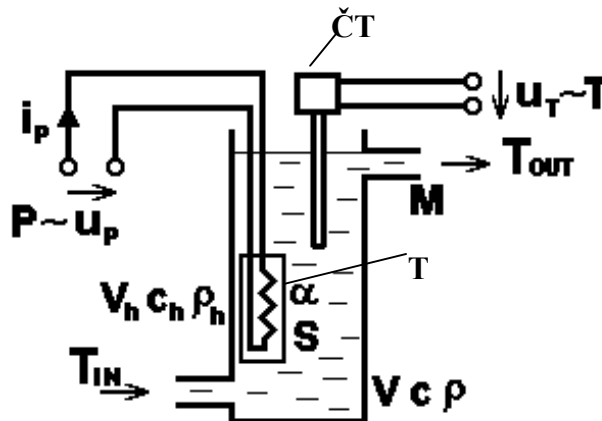
Z matematicko-fyzikální analýzy dynamických systémů při aplikacích makroskopických bilancí hmoty a energie dostáváme zpravidla soustavu rovnic prvního řádu tedy přímo stavový popis.

2.3 MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ ANALÝZA

Z matematicko-fyzikální analýzy dynamických systémů při aplikaci makroskopických bilancí hmoty a energie dostáváme zpravidla soustavu lineárních rovnic prvního řádu, tedy přímo stavový popis. Každá stavová veličina pak představuje konkrétní fyzikální veličinu a struktura stavových rovnic pak vypovídá o vzájemných vazbách mezi stavovými-fyzikálními veličinami. Ukážeme to na následujícím příkladě ohřevu vody v průtokovém ohřívači.

Příklad 1 Matematicko fyzikální analýza průtokového ohřívače vody.

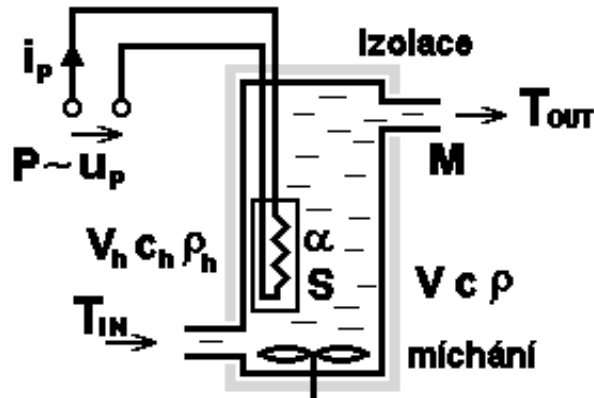
Dynamickou soustavu na Obr.2-1 tvoří průtokový ohřívač **PO**. Vstupní veličinou je výkon **P** topné spirály **TS**. Výstupní veličinou je teplota vody **T** měřená čidlem teploty **ČT**.



Obr.2-4 Dynamická soustava **PO**

Pro účely matematicko fyzikální bude uvažována zjednodušená soustava podle Obr.2-2 a vychází se z podmínek: dokonalé tepelné izolace, konstantního přítoku a objemu vody v ohřívači, promíchávání vody, teplota vody T_{out} a teplota ohřívače T_h nezávisí na prostorových souřadnicích ($T_{out} = T_{out}(t)$, $T_h = T_h(t)$).

- V ... objem vody v ohřívači
- ρ ... měrná hustota vody
- M ... množství protékající vody
- V_h ... objem topného tělesa



T_{IN}	... teplota vody na vstupu
T_{OUT}	... teplota vody na výstupu
S	... teplosměnná plocha topného
	tělesa
c_h	... měrné specifické teplo topného
	tělesa
ρ_h	... měrná hustota topného
	tělesa
α	... koeficient přestupu tepla
ρ	... měrná hustota vody
c	... měrné specifické teplo v.

Obr.2.5 Matematicko-fyzikální analýza

Řešení:

1) Energetická bilance

Za uvedených předpokladů vycházíme ze zákona zachování energie, podle kterého platí

$$\left[\begin{array}{c} \text{Časová změna akumulované} \\ \text{tepelné energie} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Rychlost přívodu} \\ \text{tepelné energie} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Rychlost odvodu} \\ \text{tepelné energie} \end{array} \right],$$

což je možno vyjádřit rovnicí

$$\frac{dU(t)}{dt} = P_{IN} - P_{OUT},$$

kde je $U(t)$ vnitřní (tepelná) energie

P_{IN} rychlost přívodu tepelné energie - přiváděný tepelný výkon

P_{OUT} rychlost odvádění tepelné energie - odváděný tepelný výkon

Makroskopickou bilanci provedeme pro hmotu ohřivače a vody. Tepelná kapacita vody v ohřivači je rovna

$$U = U(t) = c \cdot \rho \cdot V \cdot T_{OUT}(t).$$

a tepelná kapacita tělesa ohřivače je rovna

$$U_h = U_h(t) = c_h \cdot \rho_h \cdot V_h \cdot T_h(t).$$

Nyní můžeme aplikovat zákon zachování energie na těleso ohřivače

$$\frac{d}{dt} [c_h \cdot \rho_h \cdot V_h \cdot T_h(t)] = \alpha \cdot S \cdot [T_{OUT}(t) - T_h(t)] + P(t), \quad (1)$$

Aplikací rovnice energie na objem vody v průtokovém ohřivači dostaneme

$$\frac{d}{dt} [c \cdot \rho \cdot V \cdot T_{OUT}(t)] = M \cdot c \cdot [T_{IN}(t) - T_{OUT}(t)] + \alpha \cdot S \cdot [T_h(t) - T_{OUT}(t)], \quad (2)$$

Jednoduchou úpravou rovnic (1) a (2) vytvoříme soustavu dvou diferenciálních rovnic prvního řádu ve tvaru

$$\frac{d}{dt} T_h(t) = -\frac{\alpha S}{c_h \rho_h V_h} T_h(t) + \frac{\alpha S}{c_h \rho_h V_h} T_{OUT}(t) + \frac{P(t)}{c_h \rho_h V_h} \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} T_{OUT}(t) = \frac{\alpha S}{c \rho V} T_h(t) - \frac{\alpha S + Mc}{c \rho V} T_{OUT}(t) + \frac{Mc}{c \rho V} T_{IN}(t). \quad (4)$$

Soustava rovnic obsahuje dvě budící funkce $P(t)$ a $T_{IN}(t)$. Akční veličinou je elektrický příkon $u(t) = P(t)$, který lze měnit pomocí akčního členu. Druhá vstupní veličina je teplota vstupující vody $T_{IN}(t)$, kterou ale nemohu cíleně ovlivňovat a není ani měřena. Proto ji budeme pokládat za neměřenou poruchovou veličinu $d(t) = T_{IN}(t)$.

2) Ustálené stavy

Pro ustálené stavy musí být splněna podmínka $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} T_h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} T_{OUT}(t) = 0$

Z rovnic (3,4) dostaneme soustavu rovnic

$$T_h(\infty) = T(\infty) + \frac{1}{\alpha S} P(\infty),$$

$$T_{OUT}(\infty) = \frac{\alpha S}{\alpha S + Mc} T_h(\infty) + \frac{Mc}{\alpha S + Mc} T_{IN}(\infty).$$

Řešením těchto rovnic pak dostaneme

$$T_h(\infty) = T_{IN}(\infty) + \frac{\alpha S + Mc}{(\alpha S)(Mc)} P(\infty), \quad (5)$$

$$T_{OUT}(\infty) = T_{IN}(\infty) + \frac{1}{Mc} P(\infty). \quad (6)$$

3) Odvození výsledné diferenciální rovnice

Zavedeme pro zjednodušení zápisu označení

$$y = T_{OUT}(t), \quad x = T_h(t), \quad u = P(t); \quad d = T_{IN}(t)$$

$$a_{11} = \frac{\alpha S}{c_h \rho_h V_h}; \quad a_{21} = \frac{\alpha S}{c \rho V}; \quad a_{22} = \frac{\alpha S + Mc}{c \rho V}; \quad b_{11} = \frac{1}{c_h \rho_h V_h}; \quad b_{22} = \frac{Mc}{c \rho V};$$

Diferenciální rovnice (3) a (4) pak mají tvar

$$x'(t) = -a_{11}x(t) + a_{11}y(t) + b_{11}u(t), \quad (7)$$

$$y'(t) = a_{21}x(t) - a_{22}y(t) + b_{22}d(t) \quad \rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{a_{21}} [y'(t) + a_{22}y(t) - b_{22}d(t)] \quad (8)$$

Naším úkolem je nalézt matematický model teploty vody v průtokovém ohříváči. Je tedy třeba nejdříve z matematického modelu vyloučit teplotu ohříváku. Použijeme eliminační metodu tak, že nejdříve derivujeme $y'(t)$ a dostaneme

$$y''(t) = a_{21}x'(t) - a_{22}y'(t) + b_{22}d'(t).$$

Nyní je možno za $x'(t)$, $y'(t)$ dosadit z rovnice (7),(8) a $x(t)$ je možno vypočítat z (8). Dostaneme

$$\begin{aligned} y''(t) &= a_{21}[-a_{11}x(t) + a_{11}y(t) + b_{11}u(t)] - a_{22}y'(t) + b_{22}d'(t) = . \\ &= a_{21}\left[-a_{11} \frac{1}{a_{21}}[y'(t) + a_{22}y(t) - b_{22}d(t)] + a_{11}y(t) + b_{11}u(t)\right] - a_{22}y'(t) + b_{22}d'(t) = . \\ &= -(a_{11} + a_{22})y'(t) - (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11})y(t) + a_{21}b_{11}u(t) + a_{11}b_{22}d(t) + b_{22}d'(t) \end{aligned}$$

Zavedeme-li následující označení

$$a_1 = (a_{11} + a_{22}); \quad a_0 = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11}); \quad b_0 = a_{21}b_{22} \quad c_0 = a_{11}b_{22}; \quad c_1 = b_{22};$$

pak je možno diferenciální rovnici druhého řádu do tvaru

$$\boxed{y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = b_0u(t) + c_0d(t) + c_1d'(t)}. \quad (9)$$

4) Obrazový přenos

Aplikujeme-li L-transformaci na diferenciální rovnici (9) při nulových počátečních podmínkách dostaneme

$$Y(s)(s^2 + a_1s + a_0) = b_0U(s) + (c_0 + c_1s)D(s),$$

kde $Y(s) = L\{y(t)\}; U(s) = L\{u(t)\}; D(s) = L\{d(t)\};$

L-obraz výstupu je roven

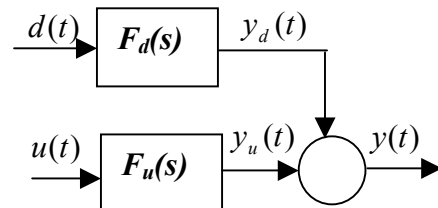
$$\boxed{Y(s) = \frac{b_0}{(s^2 + a_1s + a_0)}U(s) + \frac{(c_0 + c_1s)}{(s^2 + a_1s + a_0)}D(s) = F_U(s) \cdot U(s) + F_d(s) \cdot D(s)}, \quad (10)$$

kde je $F_U(s) = \frac{b_0}{(s^2 + a_1s + a_0)}, F_d(s) = \frac{(c_0 + c_1s)}{(s^2 + a_1s + a_0)},$

$F_U(s)$ je obrazový přenos, který aproximuje dynamické účinky akční veličiny $u(t)$ vzhledem k veličině $y(t)$,

$F_d(s)$ je obrazový přenos, který aproximuje dynamické účinky poruchové veličiny $d(t)$ vzhledem k veličině $y(t)$.

Struktura modelu dynamického systému s účinnem akční a poruchové veličiny je na obr. 2.6.



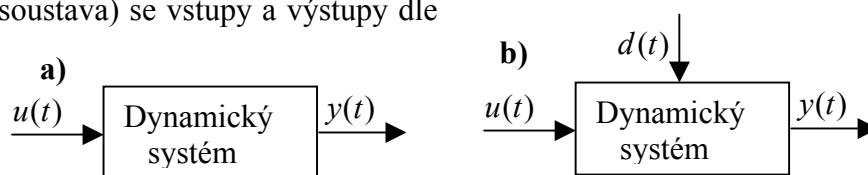
Obr.2.6 Model dynamického systému s poruchou $d(t)$

Literatura

- [1] BIRD, R.B.-STEWART, E.W.-LIGHTFOOT, N.E.: Přenosové jevy. Sdílení hmotnosti, energie a hmoty. ČSAV, Praha, 1968.
- [2] TRKAL, V.: Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa. ČSAV, Praha, 1956.
- [3] HORÁK Fyzika
- [4] BALDA, M.-HANUŠ, B., a kolektiv : Základy technické kybernetiky. SNTL/ALFA Praha 1986.
- [5] NOSKIEVIČ, P.: Modelování a identifikace systémů. MONTANEX a.s., 1999, Ostrava.
- [6] HANUŠ, B.- BALÁTÉ, J.- ŠVARC, I.- ZIKEŠ, F.: Teorie automatického řízení I. I. Část. Skripta Liberec, 1982.
- [7] JANEČEK, J.- MODRLÁK, O.: Základy technické kybernetiky. Příklady. Skripta, Liberec, 1990.

3. ANALÝZA LINEÁRNÍCH DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ V ČASOVÉ OB- LASTI

Analýzou lineárních dynamických systémů rozumíme určování jejich dynamických a statických vlastností. Řadíme sem především dynamické chování systémů na definovaný vstupní signál, odezvy na obecný vstupní signál, problémy stability, vliv parametrů obvodu na stabilitu a jeho odezvu. Pro další výklad bude uvažován dynamický časově invariantní systém (regulovaná soustava) se vstupy a výstupy dle obr.3.1.



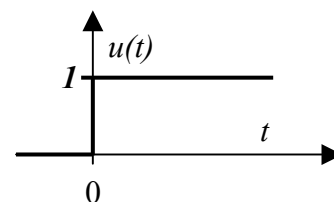
Obr.3.1 Dynamický časově invariantní systém

Vstupní veličinou (buzením, akční veličinou) je signál $u(t)$, výstupní veličinou systému je $y(t)$. Signál $d(t)$ představuje poruchovou veličinu. Definujme vstupní signály jednotkový skok a Diracův impuls.

1) **Jednotkový skok** je definován viz též obr.3.1

$$u(t) = 1(t) = 1 \text{ pro } t \geq 0 \\ = 0 \text{ pro } t < 0$$

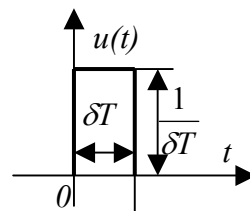
Odezva soustavy na jednotkový skok je **přechodová funkce** $h(t)$, nebo v grafické podobě **přechodová charakteristika**.



Obr.3.1 Jednotkový skok

2) Diracův impuls (jednotkový impuls) – delta funkce viz obr.3.2 je definována

$$\delta = \delta(t) = 0, \text{ pro } t \neq 0; \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1 \rightarrow \lim_{\delta T \rightarrow 0} \frac{1}{\delta T} \cdot \delta T = 1$$



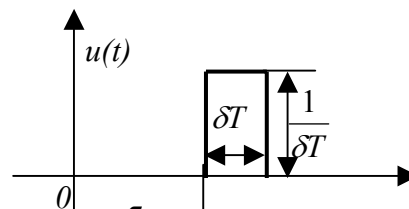
Obr.3.2a Diracův impuls

Odezva soustavy na diracův impuls je **impulzní váhová funkce g(t)**.

Impuls velikosti S chápeme jako Diracův impuls, který se násobí vahou S - velikostí plochy impulsu.

$$u(t) = S \cdot \delta(t).$$

Posunutý Diracův impuls vpravo $u(t) = \delta(t - \tau)$ je na obr.3.2b a jemu odpovídá i posunutá impulzní váhová funkce $g(t - \tau)$.



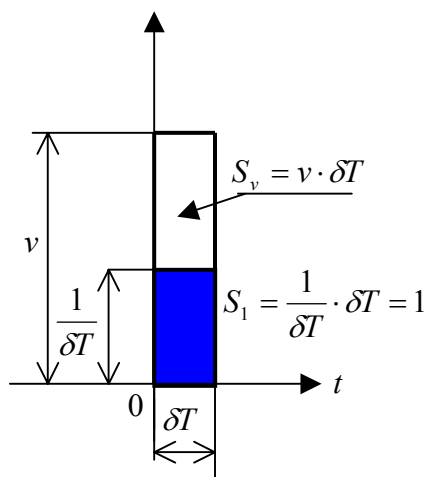
Obr.3.2b Posunutý Diracův impuls

Význam zavedení dynamických charakteristik impulzní váhové a přechodové funkce a jim odpovídajících signálů nespočívá pouze ve srovnávání odezev jednotlivých systémů na uvedené signály, ale umožňuje řešení základního problému analýzy, který spočívá v nalezení odezvy systému na obecný vstupní signál. V následující kapitole si ukážeme výpočet odezvy na obecný vstupní signál ze známé váhové funkce.

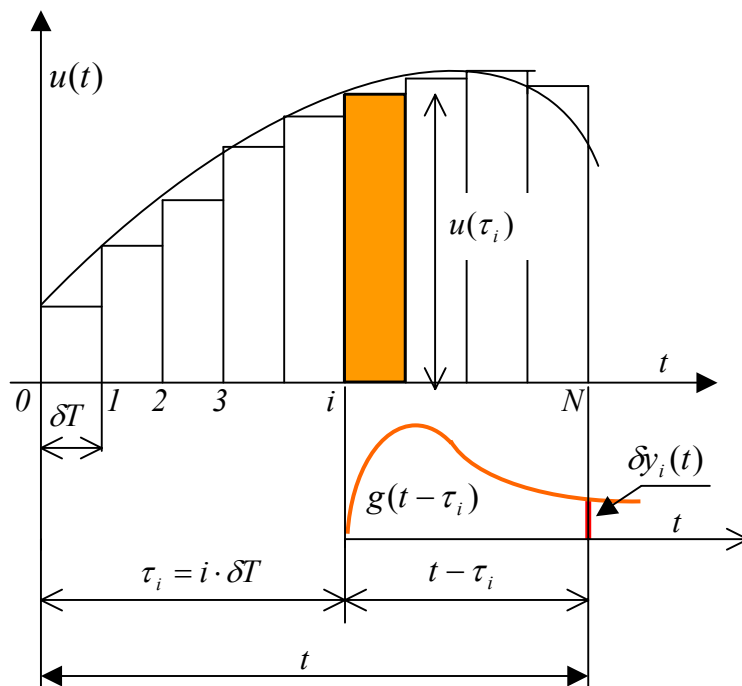
3.1 ODEZVA SYSTÉMU NA OBECNÝ SIGNÁL, KONVOLUCE

Použití váhové funkce k výpočtu odezvy systému na obecnou vstupní funkci $u(t)$ patří k nejstarším postupům. Samozřejmě, použití impulsu šířky $\delta T \rightarrow 0$ je technicky nemožné. Proto se Diracův impuls aproximuje pulsem konečné šířky δT a výškou impulsu v viz obr.3.1-1. Plocha tohoto impulsu pak bude $S_v = v \cdot \delta T$ a protože je systém lineární, je odezva na impuls plochy S_v úměrná váhové funkci $g(t)$ s koeficientem úměrnosti S_v . Platí tedy

$$g_v(t) = S_v \cdot g(t).$$



Obr.3.1-1 Impuls plochy S_v



Obr.3.1-2 Nahrazení spojitého signálu $u(t)$ posloupností impulsů šířky δT

Předpokládejme, že je dána váhová funkce $g(t)$ dynamického systému a průběh vstupního signálu $u(t)$ viz obr.3.1-2 pro který platí předpoklad, že pro $t < 0$ je $u(t) = 0$.

Základní myšlenka uvažovaného postupu spočívá v tom, že průběh vstupního signálu $u(t)$ se rozdělí na N stejných časových intervalů δT . Tím se aproximuje vstupní signál posloupností impulsů konstantní šířky δT a výšky $u(\tau_i)$ viz obr. 3.1-2, které jsou ale posunuté vzhledem k počátku o časový úsek $\tau_i = i \cdot \delta T$ pro $i = 0, 1, 2, \dots, N$.

V čase t se podílí i -tý impuls na výstup soustavy velikostí $\delta y_i(t)$, která je dána součinem plochy impulsu $S_i = \delta T \cdot u(\tau_i)$ a posunuté váhové funkce $g(t - \tau_i)$

$$\delta y_i(t) = S_i g(t - \tau_i) = \delta T \cdot u(\tau_i) \cdot g(t - \tau_i)$$

Celkový účinek všech impulsů od $i = 0$ až $N - 1$ je roven součtu všech dílčích odezev $\delta y_i(t)$ a platí

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \delta y_i(t) = \sum_{i=0}^{N-1} u(\tau_i) \cdot g(t - \tau_i) \cdot \delta T$$

Pro limitní případ, když $N \rightarrow \infty$ a $\delta T \rightarrow 0$ a čas je roven $t = N \cdot \delta T$, pak sumy přechází na integrály a platí

$$y(t) = \lim_{N \rightarrow \infty, \delta T \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \delta y_i(t) = \sum_{i=0}^{N-1} u(\tau_i) \cdot g(t - \tau_i) \cdot \delta T = \int_0^t u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau.$$

Tento integrál se nazývá konvolutorním integrálem a určuje výstup systému $y(t)$ při známé váhové funkci $g(t)$ a dané vstupní funkci $u(t)$ při nulových počátečních podmínkách. Je možno ukázat, že platí rovnost

$$y(t) = u(t) * g(t) = \int_0^t u(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t u(t - \tau) g(\tau) d\tau \quad (3.1 - 1)$$

Příklad 3.1 - 1

Určete odezvu soustavy s váhovou funkcí $g(t) = e^{-2t}$ na

- obecný skokový signál velikosti $u(t) = C \cdot 1(t)$.
- na rampovou funkci $u(t) = t$, pro $t < 0$ je $u(t) = 0$.

Řešení: a) Obecně platí

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = \int_0^t C \cdot 1(\tau) e^{-2(t-\tau)} d\tau = C e^{-2t} \int_0^t 1(\tau) e^{2\tau} d\tau = C e^{-2t} \left[\frac{1}{2} e^{2\tau} \right]_0^t$$

Dosazením mezí a po úpravě dostaneme

$$y(t) = C e^{-2t} \cdot \left[\frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{2} \right] = C \cdot 0,5(1 - e^{-2t})$$

b) Pro rampovou funkci platí

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = \int_0^t \tau \cdot e^{-2(t-\tau)} d\tau = e^{-2t} \int_0^t \tau \cdot e^{2\tau} d\tau$$

Integrál $\int_0^t \tau \cdot e^{2\tau} d\tau$ určíme z tabulek nebo metodou per partes $\int u'v = uv - \int uv'$.

Volíme $u' = e^{2\tau}$, $v = \tau \rightarrow u = 0,5e^{2\tau}$, $v' = 1$

$$\int_0^t \tau \cdot e^{2\tau} d\tau = \left[0,5e^{2\tau} \tau - 0,5 \int_0^t e^{2\tau} d\tau \right]_0^t = \left[0,5te^{2t} - 0,25e^{2\tau} \right]_0^t = 0,5te^{2t} - 0,25e^{2t} + 0,25.$$

Výstup je pak roven

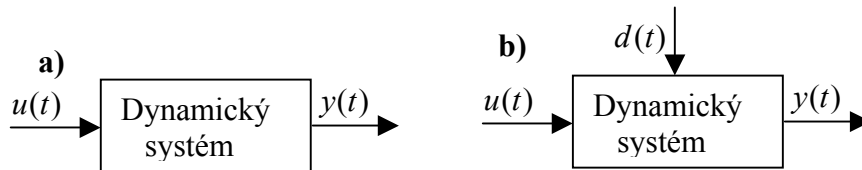
$$y(t) = e^{-2t} \int_0^t \tau \cdot e^{2\tau} d\tau = e^{-2t} \left[0,5te^{2t} - 0,25e^{2t} + 0,25 \right] = 0,5 \cdot (0,5e^{-2t} - 0,5 + t).$$

Derivace výstupního signálu je $y'(t) = -0,5e^{-2t} + 0,5$.

konec příkladu 3.1 – 1

3.2 DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Uvažujme dynamický t -invariantní systém (regulovanou soustavu) s jedním vstupem a jedním výstupem dle obr.3.2a.



Obr.3.1 Dynamický t -invariantní systém

Výstup systému $y(t)$ je pak možno popsat obyčejnou diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1u^{(1)} + b_0u, \text{ pro } m \leq n, \quad (3.2 - 1)$$

nebo pro systém se vstupující poruchou $d(t)$ pak platí rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1u^{(1)} + b_0u + c_{mc}d^{(mc)} + \dots + c_1d^{(1)} + c_0d, \text{ pro } m, mc \leq n$$

kde je $u(t)$ vstupní (akční) veličina,
 $y(t)$ výstupní (regulovaná) veličina,
 $d(t)$ poruchová veličina,
 a_i, b_j, c_k jsou koeficienty diferenciální rovnice

Připomeneme pouze, že řešení rovnice (3.2 - 1) je dáno součtem homogenního a partikulárního řešení

$$y = y_H + y_P, \quad (3.2 - 2)$$

kde je y_H homogenní řešení, y_P partikulární řešení. Homogenní rovnice k (3.2 - 1) je

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = 0, \quad (3.2 - 3)$$

jejíž **charakteristická rovnice**, hledáme-li řešení ve tvaru $y = e^{\lambda t}$, je polynom v λ je roven

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Charakteristická rovnice má n -kořenů, které mohou být reálné různé, reálné násobné, komplexně sdružené a komplexně sdružené násobné. Tomu pak odpovídá i homogenní řešení, které je tvaru pro

1) Kořeny reálné různé $y_H(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$

2) Kořeny reálné, i -tý kořen násobnosti k

$$y_H(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + e^{\lambda_i t} (C_{i1} + C_{i2} t + \dots + C_{i(k-1)} t^{k-1}) + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$$

3) Kořen komplexně sdružené $\lambda_p = \alpha_p + i\omega_p$

$$y_H(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) + \dots + C_p \exp(\alpha_p + i\omega_p) + \dots + C_n \exp(\lambda_n t)$$

Homogenní řešení obsahuje n -konstant C_k , které se musí určit z počátečních podmínek $y(0), y^{(1)}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$. Počáteční podmínky tedy představují distribuci **vlastní energie systému**.

Partikulární integrál se určí odhadem partikulárního řešení při speciálním tvaru pravé strany, variací konstant nebo jinými vhodnými metodami. Partikulární integrál, který představuje účinek akční nebo poruchové veličiny, reprezentuje distribuci vnější energie.

V teorii automatické regulace se pro řešení diferenciálních rovnic využívá převážně vlastností Laplaceovy transformace viz. [Příloha P2 – LAPLACEOVA TRANSFORMACE](#) tak, jak jste se s ní již seznámili v kurzu „Základy spjitého řízení“

3.3 OBRAZOVÝ PŘENOS

V automatické regulaci pro vyjádření dynamických vlastností systémů se nejčastěji používá vnějšího popisu systému ve formě obrazového přenosu. Obrazový přenos umožňuje zavedení blokové algebry, aplikaci kritérií stability, jednoduchý výpočet odezev soustav atd.

3.3.1 Definice obrazového přenosu, vlastnosti, póly, nuly, řád astatizmu

Obrazový přenos je možno definovat dvěma způsoby

- Jako Laplaceův obraz výstupní veličiny ku Laplaceovu obrazu vstupní veličiny při nulových počátečních podmínkách zleva
- Jako Laplaceův obraz impulsní přechodové (váhové) funkce.

Uvažujme dynamický systém, který je popsán diferenciální rovnicí (3.2 – 1)

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1u^{(1)} + b_0u, \text{ pro } m \leq n,$$

pak, provedeme-li L-transformaci levé a pravé strany diferenciální rovnice při nulových počátečních podmínkách, dostaneme

$$Y(s)(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)U(s).$$

Podle definice obrazového přenosu je tento roven

$$F(s) = \frac{(b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)}{(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)} = \frac{Y(s)}{U(s)} \rightarrow Y(s) = F(s) \cdot U(s), \quad (3.3 - 1)$$

kde je $F(s)$ obrazový přenos,

$$A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \text{ polynom jmenovatele stupně } \partial A = n,$$

$$B(s) = b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0 \text{ polynom čitatele stupně } \partial B = m,$$

$Y(s)$ je L-obraz výstupní veličiny $y(t)$,

$U(s)$ je L-obraz vstupní veličiny $u(t)$.

Vlastnosti obrazového přenosu shrneme bez důkazů do následujících bodů:

- 1) Obrazový přenos nezávisí na budící funkci ani počátečních podmínkách, které dle definice musí být nulové
- 2) Je racionální lomenou funkcí komplexní proměnné s reálnými koeficienty
- 3) Popisuje dynamické vlastnosti jen časově invariantních systémů, které nemění svoje parametry v čase.

Příklad 3.3 – 1

Uvažujme diferenciální rovnici $y''+3y'+2 = u + 0,25u'$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -1$.

Určete: 1) Obrazový přenos

2) Odezvu systému na skokový vstupní $u(t)=2I(t)$ a zadané počáteční podmínky.

Řešení:

1) Označme: $Y(s) = L\{y(t)\}$, $U(s) = L\{u(t)\}$. Pak pomocí (P2 – 6) určíme Laplaceův obraz levé a pravé strany diferenciální rovnice

$$s^2Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) + 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = U(s) + 0,25[sU(s) - u(0)].$$

Jestliže členy s neznámou $Y(s)$ necháme na levé straně a členy známé (L-obraz akční veličiny a zadané počáteční podmínky), pak dostaneme

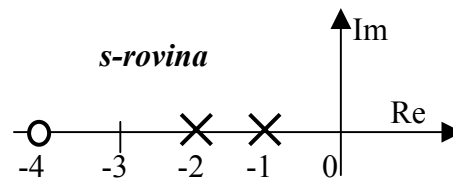
$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) = U(s)(1 + 0,25s) + s \cdot y(0) + y'(0) + 3y(0) - 0,25u(0).$$

L-obraz hledaného řešení je pak roven

$$Y(s) = \frac{1 + 0,25s}{s^2 + 3s + 2} \cdot U(s) + \frac{s \cdot y(0) + y'(0) + 3y(0) - 0,25u(0)}{s^2 + 3s + 2}.$$

Obrazový přenos (má dva póly $s_1 = -1$, $s_2 = -2$ a nulu $s_{B1} = -4$ viz obr. 3.3 – 1) je podle definice roven

$$F(s) = \frac{1 + 0,25s}{s^2 + 3s + 2}.$$



Obr.3.3-1 Poloha pólů a nul

2) a) L-obraz budícího signálu je $U(s) = L\{2 \cdot I(t)\} = \frac{2}{s}$. Budeme předpokládat, že počáteční podmínky jsou zadané zprava. Dosazením počátečních podmínek $y(0+) = 0$, $y'(0+) = -1$ a počáteční podmínky na akční veličině $u(0+) = 2$ dostaneme L-obraz výstupu ve tvaru

$$Y(s) = \frac{1 + 0,25s}{s^2 + 3s + 2} \cdot U(s) + \frac{s + 1,5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1 + 0,25s}{s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{2}{s} + \frac{s + 1,5}{s^2 + 3s + 2} = Y_U(s) + Y_H(s),$$

kde je $Y_U(s) = \frac{1 + 0,25s}{s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{2}{s}$ L-obraz dynamických účinků akční veličiny

$Y_H(s) = \frac{s + 1,5}{s^2 + 3s + 2}$ L-obraz dynamických účinků nenulových počátečních podmínek.

b) Řešení v časové oblasti dostaneme zpětnou transformací rozkladem na parciální zlomky dle (viz. [Příloha č.3](#)). Podle (P3 – 2) provedeme pro $Y_U(s)$ rozklad na parciální zlomky a dostaneme (kořeny jmenovatele jsou $s_1 = 0$; $s_2 = -1$; $s_3 = -2$)

$$Y_U(s) = \frac{1 + 0,25s}{s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{2}{s} = \frac{0,5s + 2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+2} = \frac{1}{s} - \frac{1,5}{s+1} + \frac{0,5}{s+2}$$

Můžete se lehce přesvědčit, že předmět $y_U(t)$ je roven

$$y_U(t) = (1 - 1,5e^{-t} + 0,5e^{-2t}) \cdot 1(t)$$

Podobně pro $Y_H(s)$ dostaneme

$$Y_H(s) = \frac{s + 1,5}{(s+1)(s+2)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} = \frac{0,5}{s+1} + \frac{0,5}{s+2} \hat{=} (0,5e^{-t} + 0,5e^{-2t}) \cdot 1(t) = y_H(t)$$

Výsledná odezva systému $y(t)$ je rovna součtu

$$y(t) = y_U(t) + y_H(t) = (1 - 1,0e^{-t} + 1,0e^{-2t}) \cdot 1(t)$$

Derivace $y'(t)$ je rovna

$$y'(t) = y_U'(t) + y_H'(t) = (1,0e^{-t} - 2,0e^{-2t}) \cdot 1(t)$$

Kontrola zadaných počátečních podmínek pro $t = 0$: $y(0) = 1$; $y'(0) = -1$

Je zřejmé, že souhlasí se zadáním.

Konec příkladu 3.3 - 1

Obrazový přenos je možno obecně ještě vyjádřit ve tvaru

$$F(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^r (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)} \quad (3.3 -$$

2)

kde $n + r$ je řád soustavy (systému),
 r je řád astatizmu,
 $n + r > m$ je **podmínka fyzikální realizovatelnosti**

Polynom ve jmenovateli obrazového přenosu se nazývá **charakteristický polynom** a jeho kořeny se nazývají **póly systému (soustavy)**. Charakteristický polynom je možno vyjádřit ve tvaru součinu kořenových činitelů, tj.

$$s^r (a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0) = s^r (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n),$$

kde s_i , pro $i = 1, 2, \dots, a$; a $s_{a+1} = s_{a+2} = \dots = s_{n+r}$ jsou póly systému.

Kořeny polynomu v čitateli obrazového přenosu se nazývají **nuly systému**. Polynom v čitateli můžeme také vyjádřit jako součin kořenových činitelů, tj.

$$b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0 = b_m (s - s_{B1})(s - s_{B2}) \dots (s - s_{Bm})$$

kde s_{Bj} pro $j = 1, 2, \dots, m$ jsou nuly systému.

Vyjádříme-li obrazový přenos pomocí pólů a nul dostaneme

$$F(s) = \frac{b_m (s - s_{B1})(s - s_{B2}) \dots (s - s_{Bm})}{s^r a_n (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)} \quad (3.3 - 3)$$

Je zřejmé, že dynamické vlastnosti lineárního dynamického systému jsou jednoznačně určeny póly a nulami systému spolu s poměrem koeficientů u nejvyšších mocnin v čitateli a jmenovateli. Póly a nuly se zobrazují v komplexní rovině **s-rovině**. Jsou-li všechny póly a nuly reálné, můžeme obrazový přenos vyjádřit ve tvaru

$$F(s) = \frac{(1 + sT_{B1})(1 + sT_{B2}) \dots (1 + sT_{Bm})}{s^r (1 + sT_1)(1 + sT_2) \dots (1 + sT_n)} K \quad (3.3 - 4)$$

kde $\tau_i = -1 / s_i$ jsou **časové konstanty** soustavy
 $T_{Bj} = -1 / s_{Bj}$ jsou **časové konstanty čitatele** obrazového přenosu
 $K = b_0 / a_0$ je **zesílení soustavy**.

Řád astatizmu je významná charakteristika dynamického systému a označuje **násobnost nulového pólu** $t \rightarrow \infty$. Pro $r = 0$ hovoříme o **statickém systému**, pro $r \geq 1$ se dynamický systém označuje jako **systém astatický**. Astatický systém má vždy integrační charakter, protože operátorem násobení $1/s^r$ odpovídá v časové oblasti r-násobné integraci. Přechodová funkce pro $t \rightarrow \infty$ se asymptoticky blíží k mocninné funkci $C \cdot t^r$, tedy k přímce, parabole atd.

Příklad 3.3 – 2

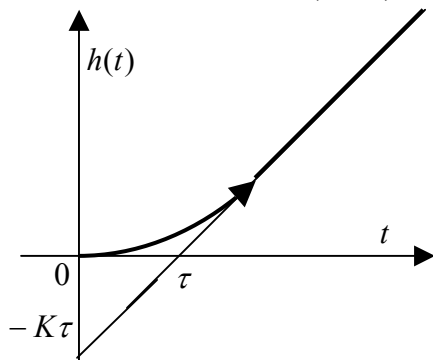
Určete přechodovou funkci servomotoru, jehož obrazový přenos je

$$F(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)} = \frac{\Phi(s)}{U(s)}$$

kde $\Phi(s)$ L-obraz natočení hřídele
 $U(s)$ L-obraz napětí na řídicí fázi
 τ časová konstanta servomotoru
 K rychlostní konstanta servomotoru

Obraz přechodové funkce $\Phi_H(s)$ a její rozklad na parciální zlomky je

$$H(s) = F(s) \frac{1}{s} = \frac{K}{s^2(\tau s + 1)} = \frac{K/\tau}{s^2(s + 1/\tau)} = \frac{-K\tau}{s} + \frac{K}{s^2} + \frac{K\tau}{s + 1/\tau}$$



Odtud plyne

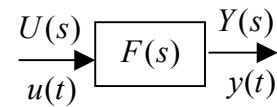
$$h(t) = K[-\tau + \tau \exp(-t/\tau) + t] 1(t)$$

Přechodová charakteristika je na obr. 3.3 – 2

Obr. 3.3 – 2 Přechodová charakteristika soustavy s řádem astaticmu 1

Konec příkladu 3.3 – 2

Obrazový přenos umožňuje reprezentaci dynamického systému pomocí schematické značky, **bloku**, viz obr. 3.3 – 3. Blok se označuje obdélníkem, do kterého zapíšeme obrazový přenos $F(s)$ a označíme vstupní a výstupní signály.



Obr.3.3-3 Blok

3.3.1 Odezva soustavy 1. řádu, sériové řazení soustav 1. řádu

Z matematicko-fyzikální analýzy soustav prvního řádu (RC – členy, hladina v nádrži s volným výtokem atd.) je zřejmé, že soustavy prvního řádu má pouze jeden akumulátor energie (kapacita kondenzátoru, kapacita nádrže atd.).

Matematický popis soustavy 1. řádu a její řešení bylo podrobně provedeno v kurzu „Základy spojitého řízení“ a proto pouze připomeneme závěry a výsledky. Diferenciální rovnice, obrazový přenos je

$$a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_0 u \rightarrow Y(s) = \frac{b_0 / a_1}{s + a_0 / a_1} U(s), \quad F(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} = \frac{K}{\tau s + 1},$$

kde je $K = b_0 / a_0 \dots$ zesílení soustavy, $\tau = a_1 / a_0 \dots$ časová konstanta.

Přechodová funkce je rovna

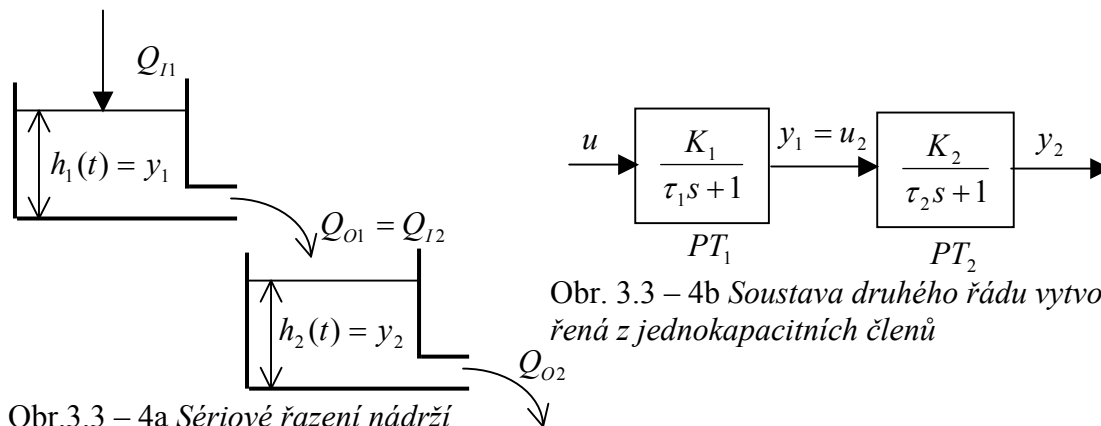
$$h(t) = \frac{b_0}{a_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{a_1}{a_0} \cdot t\right) \right] = K \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\tau} \cdot t\right) \right]$$

Dynamické systémy 1.řádu se v regulační technice označují jako PT1 bloky (členy), kde označuje: P...zesílení bloku, T...časovou konstantu a 1...násobnost časové konstanty.

Sériovým zařazením dvou členů prvního řádu je celkový počet akumulátorů energie dvojnásobný. Tok energie představuje orientovaný graf, který prochází členem 1 na člen 2, viz obr. 3.3 – 4a. To znamená, že výška hladiny $h_2(t)$ neovlivňuje hladiny $h_1(t)$. Jinými slovy, nedochází ke **vzájemnému přelévání energie** mezi nádržemi.

a) Sériové řazení nádrží

b) Blokové schéma sériového zapojení



Obr.3.3 – 4a Sériové řazení nádrží

Obr. 3.3 – 4b Soustava druhého řádu vytvořená z jednoduše kapacitních členů

Sériové řazení p - bloků se stejnou časovou konstantou dává výsledný přenos

$$F(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^p} = \frac{K / \tau^p}{(s + 1/\tau)^p},$$

který má p - násobný pól $-1/\tau$, kde τ je časová konstanta a K je výsledné zesílení.

Vliv sériově řazených bloků se stejnou časovou konstantou (násobných pólů) na výpočet dynamiky odezvy pomocí L-transformace je řešen v [Příloze P3](#). Na následujícím příkladě ukážeme techniku výpočtu odezvy systému s dvěma do série řazenými členy.

Příklad 3.3 – 3

Určete přechodovou funkci soustavy, jejíž obrazový přenos je $F(s) = \frac{1}{(2s + 1)^2}$.

Řešení: Obraz přechodové funkce bude

$$H(s) = F(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{(2s + 1)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1/4}{s(s + 0,5)^2}.$$

L-obraz přechodové funkce má jeden kořen jmenovatele nulový a dva kořeny násobné $s_1 = 0$; $s_2 = s_3 = -0,5$. Zpětná transformace L-obrazů s násobnými kořeny je podrobně vysvětlena v Příloze P3. Zpětná transformace racionální lomené funkce. Provedeme podle [\(P3 – 4\)](#) rozklad na parciální zlomky ve tvaru

$$H(s) = \frac{1/4}{s(s + 0,5)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B_1}{(s + 0,5)} + \frac{B_2}{(s + 0,5)^2}.$$

Koeficienty parciálních zlomků určíme následovně. Podle (P3 – 2) určíme A

$$A = \left[s \cdot \frac{1/4}{s(s+0,5)^2} \right]_{s=0} = 1,$$

a podle (P3 – 5) určíme B_2, B_1

$$B_2 = \left[(s+0,5)^2 \cdot \frac{1/4}{s(s+0,5)^2} \right]_{s=-0,5} = -0,5,$$

$$B_1 = \frac{d}{ds} \left[(s+0,5)^2 \cdot \frac{1/4}{s(s+0,5)^2} \right]_{s=-0,5} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1/4}{s} \right]_{s=-0,5} = \frac{-0,25}{s^2} \Big|_{s=-0,5} = -1.$$

L-obraz je tedy roven

$$H(s) = \frac{1/4}{s(s+0,5)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+0,5)} - \frac{0,5}{(s+0,5)^2} = [1 - e^{-0,5t} - 0,5te^{-0,5t}] = h(t).$$

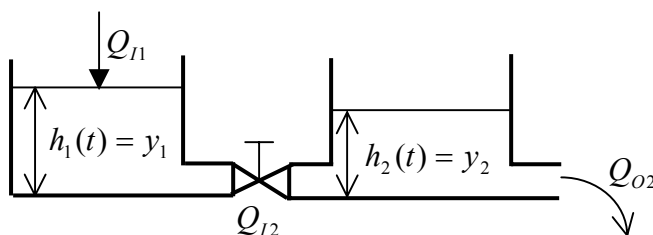
Tam , kde nemůže dojít k nejasnostem, nebudeme zapisovat násobení předmětu jednotkovým skokem.

Konec příkladu 3.3 - 3

3.3.2 Soustava 2. řádu s přenosem

$$F(s) = K \cdot \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Dochází-li k přelévání energie z jednoho akumulátoru do druhého (jako např. v elektrickém RLC obvodu nebo v případě propojených nádob potrubím viz. obr. 3.3 – 5), pak není možno dynamické vlastnosti systému vyjádřit sériovým zapojením dvou členů prvního řádu, ale je nutné je vyjádřit obrazovým přenosem druhého řádu s komplexně sdruženými kořeny ve tvaru



Obr.3.3-5 Soustava druhého řádu tvořená propojenými nádobami

$$F(s) = \frac{b_0}{s^2 + ps + q}, \quad (3.3 - 5)$$

kde kvadratický trojčlen $s^2 + ps + q = 0$ má komplexně sdružené kořeny.

Parametry (b_0, p, q) obrazového přenosu (3.3 – 5) neposkytují bezprostředně informace o rychlosti, tlumení a zesílení systému. Proto se v regulační technice využívá obrazového přenosu ve tvaru

$$F(s) = K \cdot \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = K \frac{1}{(s/\omega_n)^2 + 2\xi(s/\omega_n) + 1} = \frac{K}{(Ts)^2 + 2\xi Ts + 1} \quad (3.3 - 6)$$

kde ω_n je **přirozená úhlová frekvence**
 ξ je **poměrné tlumení**
 K je zesílení soustavy.
 $T = 1/\omega_n$ je násobná časová konstanta

Abychom získali informace a představu o dynamických vlastnostech systému, které jsou popsány pomocí obrazového přenosu (3.3 – 6), vypočteme jeho přechodovou funkci.

Přechodová funkce a její vlastnosti.

Laplaceův obraz přechodové funkce soustavy 2. řádu (3.3 – 6) je

$$H(s) = K \cdot \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Kořeny jmenovatele L-obrazu přechodové funkce je možno vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} \text{a) } s_3 &= 0 \\ \text{b) } s_{1,2} &= \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4(\xi\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \end{aligned}$$

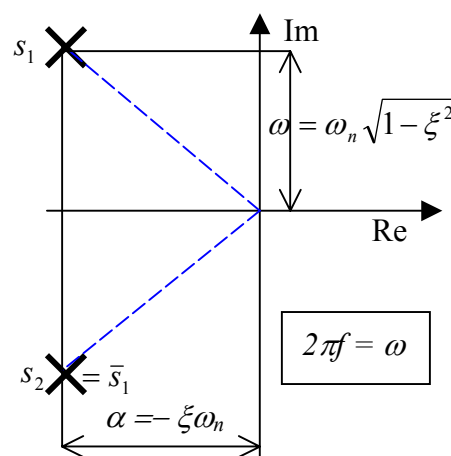
Póly $s_{1,2}$ obecně mohou být reálné různé, reálné násobné, komplexní v závislosti na poměrném tlumení ξ . Je zřejmé, že pro $-1 < \xi < 1$ jsou póly komplexně sdružené a tedy platí

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i \cdot \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = \alpha + i\omega,$$

kde $\alpha = -\xi\omega_n$... je **tlumení soustavy**
 $\omega = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$ je **vlastní kruhová frekvence**.

Umístění pólů v Gaussově rovině je na obr.3.3 – 6

Zpětná transformace racionálně lomené funkce pro kořeny komplexně sdružené je podrobně vysvětlena v [Příloze P3](#). Vytkneme-li zesílení K a provedeme podle [\(P3 – 6\)](#) rozklad na parciální zlomky, dostaneme



Obr.3.3-6 Póly v s -rovině

$$H(s) = K \cdot \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = K \left[\frac{A}{s} + \frac{C}{s + \xi\omega_n - i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\bar{C}}{s + \xi\omega_n + i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \right].$$

Koeficienty rozkladu pro kořeny reálné různé určíme podle (P3 – 3).

$$\text{Pro } s_3 = 0 \quad A = \left[\frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \right]_{s=0} = 1,$$

Komplexní konstantu C určíme pro $s_1 = -\xi\omega_n + i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ z rovnosti

$$C = \left[\frac{\omega_n^2}{s(s + \xi\omega_n + i\omega_n\sqrt{1-\xi^2})} \right]_{s=s_1} = \frac{\omega_n^2}{(-\xi\omega_n + i\omega_n\sqrt{1-\xi^2})(-\xi\omega_n + i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}) + (+\xi\omega_n + i\omega_n\sqrt{1-\xi^2})} = -0,5 + i0,5 \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Komplexně sdružená konstanta \bar{C} je rovna $\bar{C} = -0,5 - i0,5 \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

V souladu s (P3 – 2) určíme absolutní hodnotu $|C| = \sqrt{0,5^2 + 0,5^2 \frac{\xi^2}{1-\xi^2}} = 0,5 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$ a

pro fázi platí $\varphi = \arctg \frac{\text{Im}\{C\}}{\text{Re}\{C\}} = \arctg -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$.

V souladu s (P3 – 8) je možno přechodovou funkci pro $-1 < \xi < 1$ vyjádřit ve tvaru

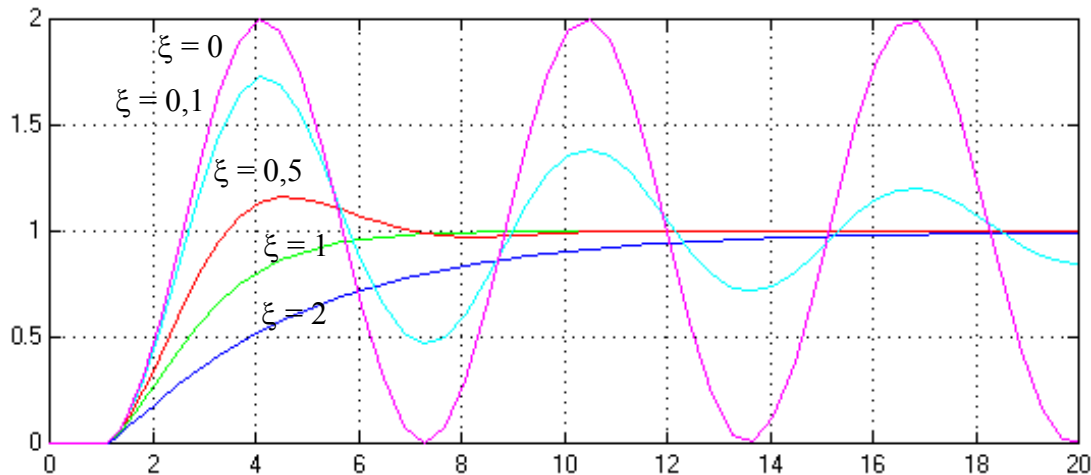
$$h(t) = K \left[1 - \frac{\exp(-\xi\omega_n t)}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \cos[(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}) \cdot t - \arctg(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}})] \right]. \quad (3.3 - 7)$$

Zcela obecně se ξ může měnit od $-\infty$ do $+\infty$. V tab. 3-1 je uvedena hlavní klasifikace dynamických systémů podle velikosti poměrného tlumení ξ .

Poměrné Tlumení	Póly		Klasifikace
$0 < \xi < 1$	$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$	$-\xi\omega_n < 0$	Tlumený (kmitavý)
$\xi = 1$	$s_{1,2} = -\omega_n$		Aperiodický
$\xi = 0$	$s_{1,2} = \pm i\omega_n$		Netlumený (konstantní amplituda)
$\xi > 1$	$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$		Přetlumený
$-1 < \xi < 0$	$s_{1,2} = +\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$	$-\xi\omega_n > 0$	Kmitavý (rostoucí amplituda)

Tab. 3-1

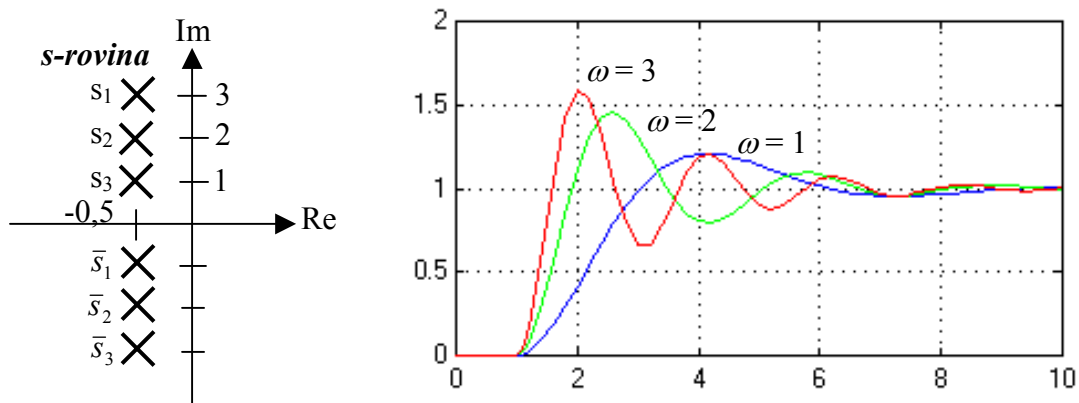
Přechodová charakteristika (3.3 – 7) závisí na třech parametrech: poměrném tlumení ξ , přirozené frekvenci ω_n a na zesílení K . Průběh přechodové charakteristiky pro různé hodnoty ξ je na obr.3.3 – 7. V s-rovině se zobrazují póly a nuly. Jejich vliv na dynamiku soustavy je demonstrován na obr.3.3 – 8a,b,c.



Obr. 3.3 – 7 Přechodová charakteristika soustavy 2. řádu pro různá ξ

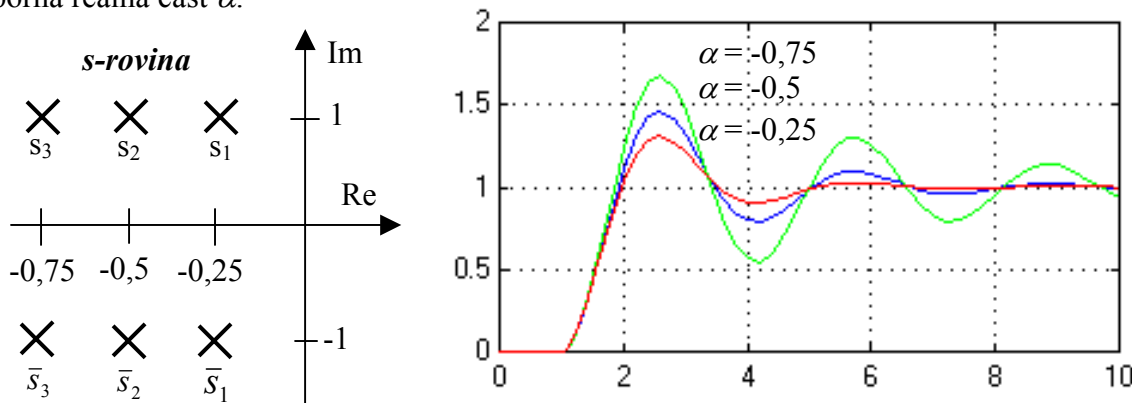
Vliv kořenů na dynamiku soustavy

Vliv komplexně sdružených pólů na dynamiku soustavy je zřejmý z obr.3.3 – 8a,b,c. Na obr.3.3 – 8a je zobrazen účinek pólů na dynamiku odezvy jestliže je konstantní reálná zá-



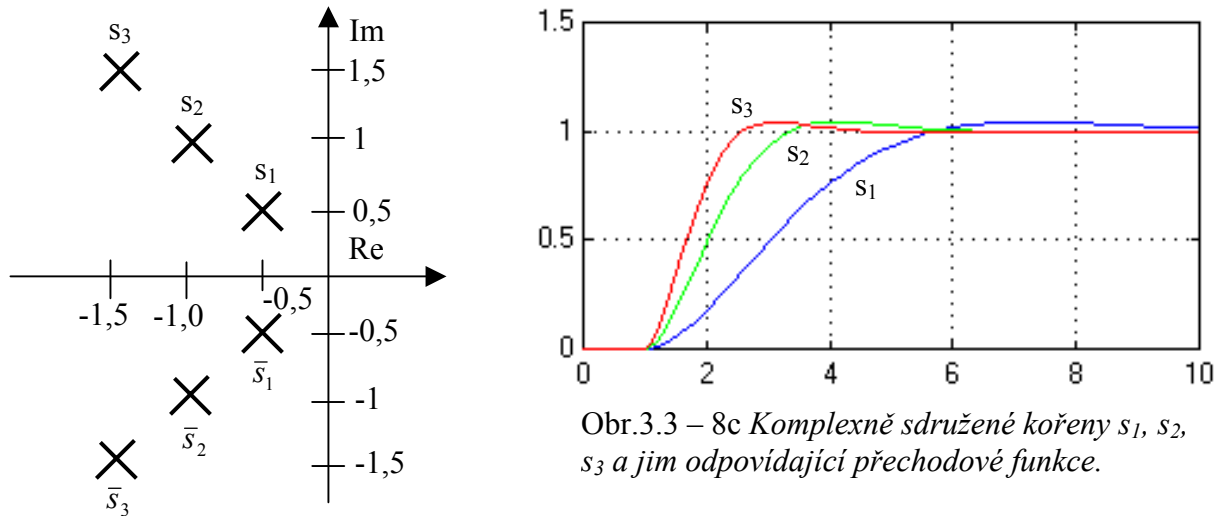
Obr.3.3-8a Póly: $\alpha = -0,5$; $\omega = 1, \omega = 2, \omega = 3$ a jim odpovídající přechodové funkce

porná část α a měníme $i\omega$. Na obr.3.3 – 4b jsou póly voleny tak, že je konstantní $i\omega$ a mění se záporná reálná část α .



Obr.3.3 – 8b Póly $Im s = i, \alpha = -0,25; -0,5; -0,75$ a jim odpovídající přechodové funkce

Na obr.3.3 – 8c jsou zobrazeny póly tak, že se zvětšuje jak reálná tak i imaginární část kořene. Tomu odpovídají i průběhy přechodové charakteristiky.



Charakteristické znaky přechodové charakteristiky

Ukažme v následujícím výpočet některých charakteristických hodnot odezvy (3.3 – 7).

Perioda kmitu přechodové funkce ($0 < \xi < 1$) je

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

Přechodová funkce na **mezi aperiodicity** má násobné kořeny $s_{1,2} = -\omega_n$, je nekmitavá a má tvar

$$h(t) = K[1 - (1 + \omega_n t) \exp(-\omega_n t)].$$

Maximální překmitnutí přechodové funkce systému ($0 < \xi < 1$) je

$$h_{\max} = K \left[1 + \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \right]$$

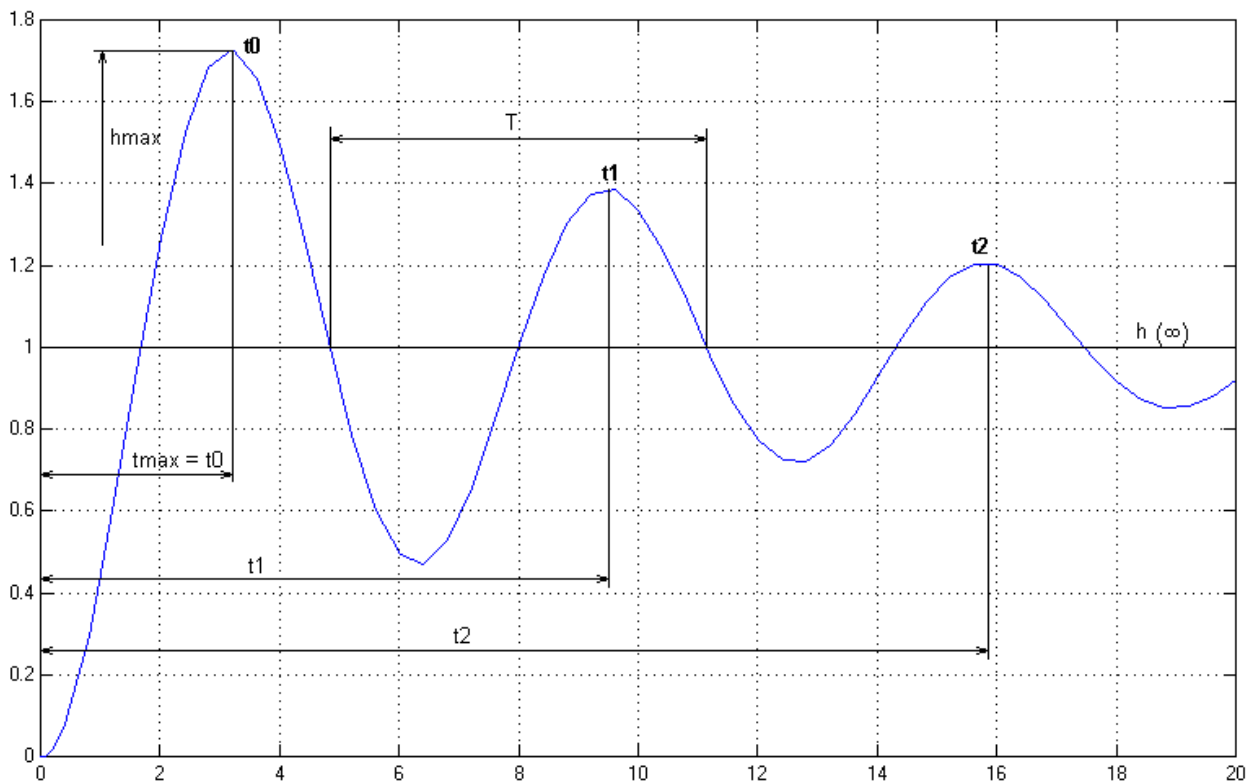
Čas t_{\max} v němž nastává maximální překmitnutí ($0 < \xi < 1$) je

$$t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

Maxima přechodové funkce nastávají v časech ($0 < \xi < 1$)

$$t_k = \frac{(2k+1)\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Perioda kmitu, maximální překývnutí přechodové funkce a časy t_{\max} , t_k jsou v přechodové charakteristice zakresleny na obr. 3.3 – 9.



Obr.3.3 – 9 Přechodové charakteristika

Obrazový přenos s komplexním pólem a nulou.

Uvažujeme-li jeden **komplexní pól** a jednu **komplexní nulu**, pak obrazový přenos má tvar

$$F(s) = K \frac{(1 + sT_{B1})(1 + sT_{B2}) \cdots (1 + sT_{Bm}) [(sT_B)^2 + 2\xi sT_B + 1]}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) \cdots (1 + s\tau_l) [(s\tau)^2 + 2\xi s\tau + 1]} \quad (3.3 - 8)$$

kde komplexně sdruženému pólu $s_c = -a_c \pm i\omega_c$ odpovídá člen 1

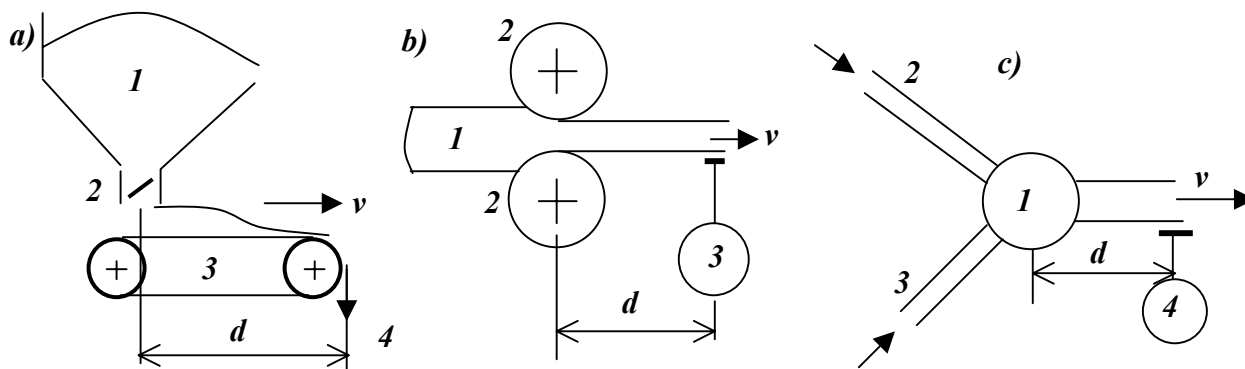
$[(\tau s)^2 + 2\xi \tau s + 1]$, kde $0 \leq \xi \leq 1$ a komplexně sdružené nule člen $(T_B^2 s^2 + 2\xi sT_B + 1)$.

Je zřejmé, že obrazový přenos (3.3 – 8) je možno rozšířit na libovolný počet komplexně sdružených pólů a nul. Připomeneme se, že násobný komplexní póly dynamického systému technicky mohou vzniknout sériovým řazením bloků se stejnými komplexně sdruženými kořeny.

3.3.4 Systémy s dopravním zpožděním

V systémech s konečnou rychlostí šíření signálu se často vyskytuje tzv. **dopravní zpoždění**. Systém reaguje na změnu vstupní veličiny až po určité době, kterou nazýváme dopravním zpožděním a označujeme symbolem T_d .

Příklady regulovaných soustav s **čistě dopravním zpožděním** T_d jsou uvedeny na obr. 3.3 – 10. Na obr. 3.3 – 10a je klasická úloha dávkování tuhého paliva do topeniště. Váhové



Obr.3.3 - 10 Systémy s dopravním zpožděním

množství paliva se nastavuje klapkou 2 v zásobníku 1. Palivo padá na dopravník 3. Rychlost dopravníku je v [m/s]. Vzdálenost mezi násypkou a roštem 4 je d [m]. Systém reaguje na změnu množství paliva za dobu T_d , která je rovna

$$T_d = d / v. \quad (3.3 - 9)$$

Na obr. 3.3 – 10b je schéma válcování plechů. Válcovaný plech 1 prochází válci 2. Rychlost odtahu válcovaného plechu je v [m/s]. Čidlo měřené tloušťky plechu je z technologických důvodů umístěno ve vzdálenosti d od válcovací stolice. Vliv změny vzdálenosti válců se projeví na měření tloušťky plechu za dobu T_d , kterou je možno určit ze vztahu (3.3 – 9).

Na obr. 3.3 – 10c je schéma regulace koncentrace směřováním dvou kapalinných látek. Do směšovacího ventilu 1 jsou přiváděny kapalinné látky 2, 3. Měření koncentrace je možné až po dokonalém smíšení, proto je čidlo koncentrace umístěno ve vzdálenosti d od směšovacího ventilu. Rychlost směsi je v [m/s], také dopravní zpoždění je možno určit opět dle (3.3 – 9).

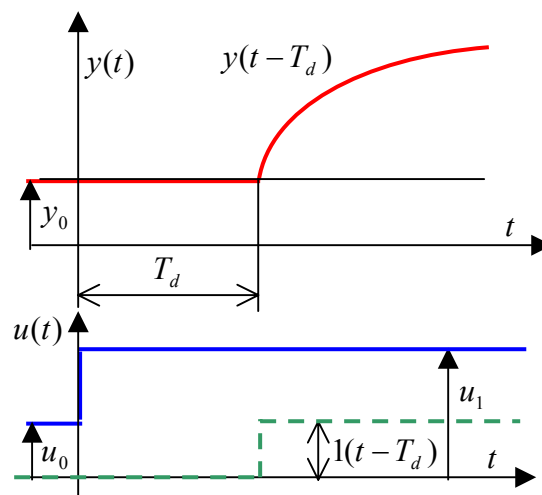
Dopravní zpoždění T_d [sec], se pro všechny uvedené soustavy **projeví jako časový posun odezvy o T_d sekund** viz obr.3.3-10d.

L-obraz funkce posunutý vpravo o T_d se určí pole věty o posunutí (P2-13) viz příloha P2 . Platí

$$L\{y(t - T_d) * 1(t - T_d)\} = Y(s) \cdot e^{-sT_d},$$

kde T_d ... je posun vpravo.

Předpokládejme, že dynamický systém bez dopravního zpoždění je popsán obrazovým přenosem $F_0(s)$, jehož váhová funkce je $g_0(t)$. Pak váhová funkce systému s dopravním zpožděním T_d je **váhové funkce $g_0(t)$ posunutá o T_d vpravo**. Podle Věty o posunutí (P2-13) určíme obrazový přenos soustavy s dopravním zpožděním jako L-obraz posunuté váhové funkce $g(t - T_d)$.



Obr.3.3-10d Odezva soustavy s dopravním zpožděním

Platí

$$G(s) = F(s) = L\{g(t - T_d) \cdot 1(t - T_d)\} = F_0(s) \cdot e^{-sT_d}, \quad (3.3 - 9b)$$

kde je $F_0(s)$ obrazový přenos bez dopravního zpoždění
 T_d dopravní zpoždění [sec], $s \dots$ je komplexní proměnná.
 s je komplexní proměnná.

Diferenciální rovnice systému s dopravním zpožděním má tvar

$$A_n y(t)^{(n)} + \dots + a_1 y(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t - T_d) + \dots + b_m u(t - T_d)^{(m)} \quad (3.3 - 10)$$

Obrazový přenos pro soustavu s dopravním zpožděním T_d a s řádem astatizmu r při reálných kořenech má tvar

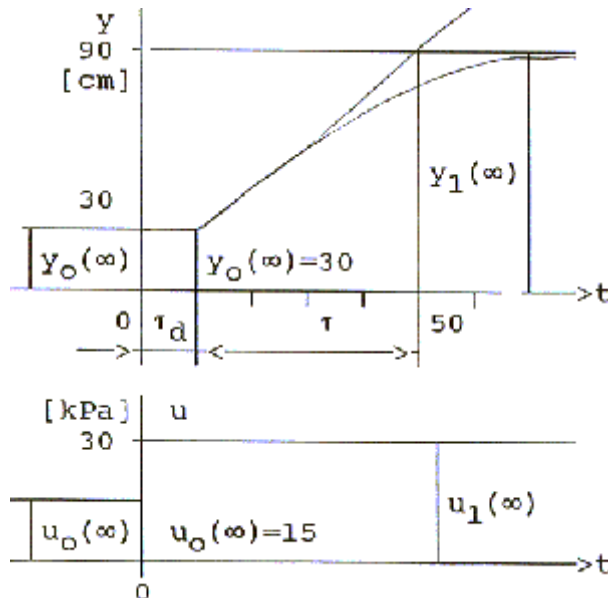
$$F(s) = K \frac{(1 + sT_{B1})(1 + sT_{B2}) \cdots (1 + sT_{Bm})}{s^r (1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) \cdots (1 + s\tau_1)} e^{-sT_d} \quad (3.3 - 11)$$

Uvažujeme-li komplexní pól a nulu, pak obrazový přenos je

$$F(s) = K \frac{(1 + sT_{B1})(1 + sT_{B2}) \cdots (1 + sT_{Bm}) [(sT_B)^2 + 2\xi sT_B + 1]}{s^r (1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) \cdots (1 + s\tau_1) [(s\tau)^2 + 2\xi s\tau + 1]} e^{-sT_d} \quad (3.3 - 12)$$

Příklad 3.3 – 4

Na obr.3.3 – 11 je zakreslena odezva soustavy prvního řádu. Určete diferenciální rovnici soustavy.



Obr.3.3 – 11

Řešení:

Z průběhu odezev lze odečíst:

- dopravní zpoždění $\tau_d = 10 \text{ s}$
- časovou konstantu $\tau = 40 \text{ s}$
- zesílení

$$K = \frac{y_1(\infty) - y_0(\infty)}{u_1(\infty) - u_0(\infty)} = 4$$

Obrazový přenos je

$$F(s) = \frac{4}{40s + 1} e^{-10s}$$

Diferenciální rovnice má tvar

$$40y' + y = 4u(t-10) \eta(t-10)$$

Konec příkladu 3.3 – 4

3.3.5 Model dynamického systému s poruchovou veličinou

Uvažujme dynamický systém s poruchovou veličinou dle obr.3.1b, který je popsán diferenciální rovnicí tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1u^{(1)} + b_0u + c_{mc}d^{(mc)} + \dots + c_1d^{(1)} + c_0d$$

pro $m, mc \leq n$. (3.3 – 13)

Máme-li vyjádřit dynamické účinky akční a poruchové veličiny pomocí obrazových přenosů postupujeme tak, že aplikujeme L-transformaci na levou a pravou stranu diferenciální rovnice při nulových počátečních podmínkách a dostaneme

$$Y(s)(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)U(s) + (c_{mc}s^{mc} + c_{mc-1}s^{mc-1} + \dots + c_1s + c_0)D(s)$$

Obraz výstupu je pak roven

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}U(s) + \frac{C(s)}{A(s)}D(s) = F_u(s)U(s) + F_d(s)D(s), \quad (3.3 - 13)$$

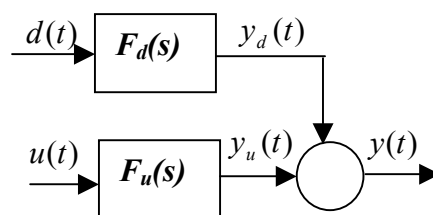
přičemž polynomy $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ a obrazové přenosy $F_u(s)$, $F_d(s)$ jsou rovny

$$\begin{aligned} A(s) &= (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0), \\ B(s) &= (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0) \\ C(s) &= (c_{mc}s^{mc} + c_{mc-1}s^{mc-1} + \dots + c_1s + c_0) \end{aligned} \quad \boxed{F_u(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad F_d(s) = \frac{C(s)}{A(s)},} \quad (3.3 - 14)$$

Struktura modelu dynamického systému s účinkem poruchové veličiny je na obr. 3.3-12.

Obrazový přenos $F_d(s)$ aproximuje dynamické účinky poruchové veličiny $d(t)$ z hledem k výstupní-regulované veličině $y(t)$.

Obrazový přenos $F_u(s)$ aproximuje dynamické účinky akční veličiny $u(t)$ z hledem k výstupní-regulované veličině $y(t)$.



Obr.3.3-12 Model dynamického systému s poruchou $d(t)$

3.3.6 Popis členů a prvků v regulační technice

V technické dokumentaci jsou kromě schématických značek soustav 1.řádu zavedeny další bloky a schématické značky, z nichž ty nejdůležitější jsou přehledně uvedeny v tab.3.2.

Označení	Matematický popis	Obrazový přenos	Přechodová funkce	Schématické značky
P-blok	$y = K \cdot u$	K	K	
I-blok	$y = K_I \int_0^t u d\tau$	$\frac{K_I}{s}$	$K_I t$	
D-blok	$y = K_D \dot{u}$	$K_D s$	$K_D \delta(t)$	
T_D-blok	$y = K \cdot u(t - T_D)$	$K \exp(-sT_D)$	$K \cdot 1(t - T_D)$	
PT1-blok	$\tau \cdot y^{(1)} + y = Ku$	$\frac{K}{\tau s + 1}$	$K \cdot (1 - e^{-t/\tau})$	
DT1-blok	$T_D y^{(1)} + y = Ku^{(1)}$	$\frac{Ks}{T_D s + 1}$	$\frac{K}{T_D} e^{-t/T_D}$	
T2-blok	$T^2 y'' + 2\xi T y' + y = Ku$	$\frac{K}{(Ts)^2 + 2\xi Ts + 1}$	$K[1 - Ae^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega t - tg^{-1} \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}})]$ $A = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}},$ $\omega = \frac{1}{T} \sqrt{1-\xi^2}.$	

Tab. 3.2

Uvedené schématické značky usnadní čtení a porozumění technické dokumentace především z anglosaských zemí.

3.4 BLOKOVÁ ALGEBRA

V technické praxi mohou být dynamické systémy velmi složité, sestavené z mnoha vzájemně propojených částí a prvků. Pro přehledné znázornění jejich funkce, struktury a dynamiky se nejčastěji používají **bloková schémata**. Chceme-li vyjádřit dynamické vlastnosti systému vyjádřeného blokovým schématem, pak systém úprav a pravidel vedoucí k vyjádření dynamických vlastností blokového schématu jako celku, označujeme jako **blokovou algebru**.

Blokové schéma obsahuje **bloky**, **spojovací linky**, **součtové** resp. **rozdílové členy** a **rozvětřovací místa**, kde dochází k větvení signálu. Signál se šíří ve spojovacích větvích pouze jedním směrem a podél větve se nemění. V bloku postupuje signál rovněž jedním směrem - ze vstupu na výstup.

Blok

	Blok se označuje obdélníkem, do něhož se zpravidla napíše obrazový přenos $F = F(s)$ či symbol, charakterizující jeho funkci nebo přechodová charakteristika bloku.
	<i>Bloky u jednorozměrných systémů mají jeden vstup a jeden výstup. Vstupy a výstupy se rozumějí buď v časové oblasti, pak se označují malými písmeny nebo v Laplaceově transformaci, pak se používají velká písmena.</i>

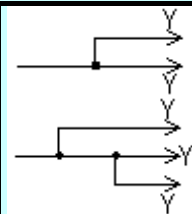
Spojovací linky (větvě)

	Spojovací větve se zobrazují čarami s vyznačeným směrem šíření signálu.
--	---

Součtový, resp. rozdílový člen

	$Y = Y_1 + Y_2$	Součtový, resp. rozdílový člen se označuje kroužkem a znaménko sčítanců se vyznačuje znaménkem +, - s tím, že u záporných signálů se příslušná část kroužku zpravidla vyčerní. Sčítací místo představuje blok s jedním výstupem a více výstupy.
	$Y = Y_2 - Y_1$	
	$Y = Y_2 - Y_1 + Y_3$	

Rozvětvací bod



Rozvětvací bod se označuje tečkou a vyznačuje rozvětvení spojovací linky. Rozvětvací bod můžeme pokládat za blok s jedním vstupem s více výstupy s přenosem rovným jedné.

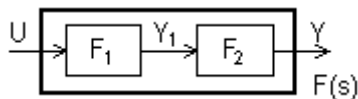
Bloková schémata umožňují určit dynamické vlastnosti schématu jako celku nebo jeho dílčích skupin. Výsledný přenos je možno určit

- Analyticky pomocí signálních rovnic
- Metodou postupných úprav
- Masonovým vzorcem

3.4.1 Signální rovnice

Analyticky postupujeme tak, že zavedeme označení "**pomocný signál**" pro každý signál vyskytující se za sčítacím místem (nebo blokem, pokud schéma neobsahuje součtový člen). Pro každý pomocný signál sestavíme signální rovnici. Signální rovnice tvoří soustavu rovnic, kterou je třeba řešit. U lineárních soustav pracujeme s Laplaceovými obrazy uvažovaných signálů a s obrazovými přenosy bloků. Ukážeme si tento postup na **sériovém, paralelním a zpětnovazebním** zapojení.

a) sériové zapojení



Y_1 je pomocná proměnná

Pro signál $Y_1(s)$ a $Y(s)$ platí:

$$Y_1(s) = F_1(s)U(s)$$

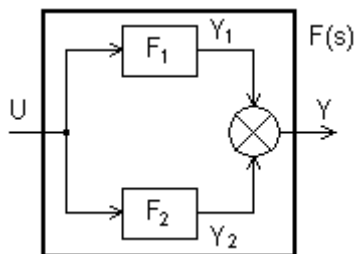
$$Y(s) = F_2(s)Y_1(s) = F_2(s)F_1(s)U(s)$$

$$F_{yu}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = F_1(s)F_2(s) \quad (3.4-1)$$

Tento výsledek je možno zobecnit:

- Výsledný přenos n -sériově řazených členů je roven součinu n obrazových přenosů.

b) paralelní zapojení



Pro signál Y je dán součtem

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) + Y_2(s) = \\ &= F_1(s)U(s) + F_2(s)U(s) = \\ &= [F_1(s) + F_2(s)]U(s) \end{aligned}$$

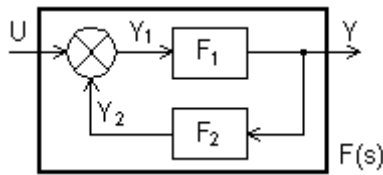
Výsledný přenos je roven

$$F_{yu}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = F_1(s) + F_2(s) \quad (3.4-2)$$

Tento výsledek je možno zobecnit:

- Výsledný přenos n -sériově řazených členů je roven součtu n obrazových přenosů.

c) zpětnovazební zapojení



Vstupní signál je roven

$$Y_1(s) = U(s) + Y_2(s)$$

$$Y_2(s) = F_2(s)Y(s)$$

$$Y(s) = F_1(s)Y_1(s) = F_1(s)[U(s) + F_2(s)Y(s)]$$

$$F_1(s)U(s) + F_1(s)F_2(s)Y(s) = Y(s)$$

Výsledný přenos je roven

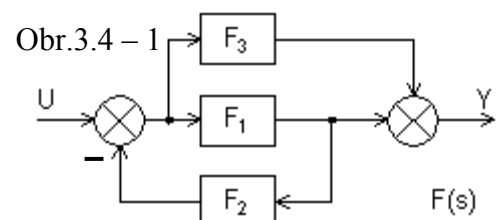
$$F_{yu}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{F_1(s)}{1 - F_1(s)F_2(s)} \quad (3.4 - 3)$$

- Výsledný přenos zpětnovazebního zapojení je dán zlomkem, kde v čitateli je přenos (nebo přenosy) přímé větve a ve jmenovateli je jedna minus součin přenosu ve smyčce.

Příklad 3.4 – 1

Pomocí signálních rovnic určete výsledný přenos $F(s) = \frac{Y}{U}$ blokového schématu, který je na obr.3.4 – 1.

Řešení: 1) Za prvním součtovým místem zvolíme pomocnou proměnnou X . Za druhým součtovým místem je proměnná Y .



2) Sestavíme signální rovnice.

$$X = U - F_1F_2X$$

$$Y = XF_1 + XF_3$$

Protože jsou tři neznámé X , Y , U a máme pouze dvě rovnice pak řešení se nabízí dvojí:

a) jedna neznámá se volí - což nám nevyhovuje

b) volí se poměr proměnných tj. hledáme poměr $F = Y/U$. Vydělíme tedy obě rovnice U a dostaneme

$$X(1 + F_1F_2) = U \quad \frac{X}{U}(1 + F_1F_2) = 1 \quad \begin{bmatrix} (1 + F_1F_2); 0 \\ (F_1 + F_3); -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X/U \\ Y/U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X(F_1 + F_3) - Y = 0 \quad \frac{X}{U}(F_1 + F_3) - \frac{Y}{U} = 0$$

Rovnice přepíšeme do maticového tvaru a řešíme Cramerovou metodou $Y/U = \frac{D_{Y/U}}{D}$,

kde D je determinant soustavy

$D_{Y/U}$ je upravený determinant soustavy, dostaneme

$$D = \det \begin{bmatrix} (1 + F_1F_2); 0 \\ (F_1 + F_3); -1 \end{bmatrix} = -(1 + F_1F_2); \quad D_{Y/U} = \det \begin{bmatrix} (1 + F_1F_2); 1 \\ (F_1 + F_3); 0 \end{bmatrix} = -(F_1 + F_3);$$

Výsledný přenos je roven

$$F(s) = \frac{Y}{U} = \frac{F_1 + F_3}{1 + F_1 F_2}$$

Konec příkladu 3.4 – 1

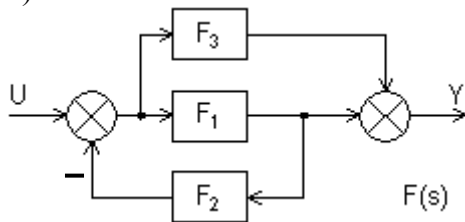
3.4.2 Metoda postupných úprav

Postupnými úpravami blokového schématu viz tab.1 je možno libovolné blokové schéma zjednodušit do těchto tří základních zapojení. Výběr postupných zjednodušujících kroků však není jednoznačný a závisí ve velké míře na zkušenostech řešitele.

Příklad 3.4 – 2

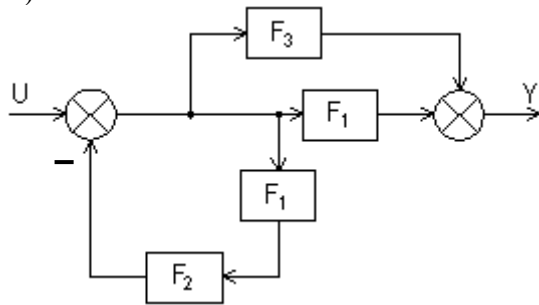
Určete výsledný přenos blokového schématu na obr.3.4 – 1

a)



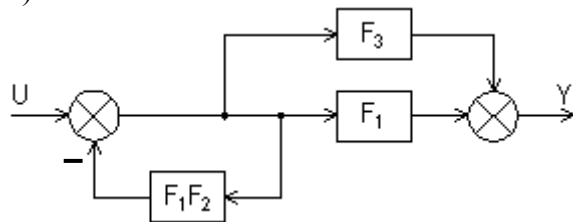
Dané složené blokové schéma

b)



Jedna z možných cest řešení je přenesení rozvětřovacího místa před blok F_1 (úprava č. 6).

c)

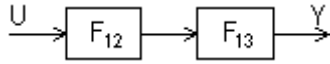


Záměna rozdělovacích míst před blokem F_1 je zřejmá.

d)

Vyjádříme-li přenos zpětnovazebního zapojení

$$F_{12} = \frac{1}{1 + F_1 F_2}$$



a přenos paralelního zapojení

$$F_{13} = F_1 + F_3$$

pak výsledný přenos je roven

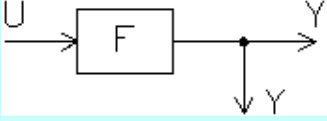
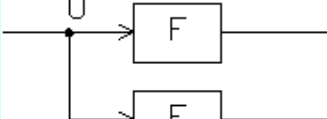
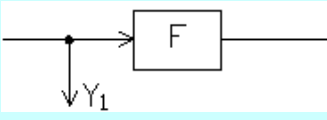
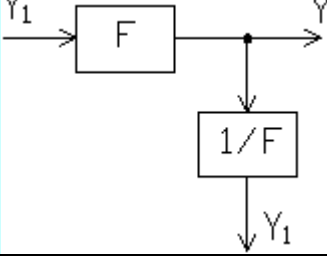
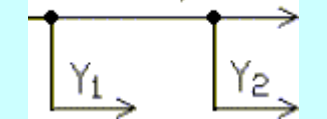
$$F = F_{12} F_{13} = \frac{1}{1 + F_1 F_2} (F_1 + F_3) = \frac{F_1 + F_3}{1 + F_1 F_2}$$

Konec příkladu 3.4 – 2

Tab.3.4-1 Přípustné úpravy blokového schématu

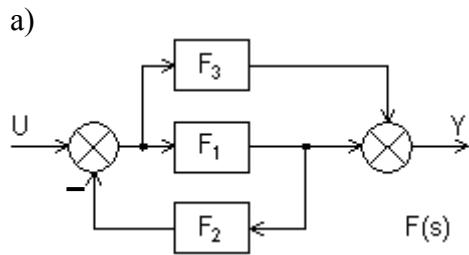
	Schéma	Přenos	Popis
1.		$Y = (Y_1 + Y_2) - Y_3$ $Y = (Y_1 - Y_3) + Y_2$ $Y = Y_1 + Y_2 - Y_3$	Záměna pořadí sčítacích míst nebo změna počtu sčítacích míst (slučování sčítacích míst).
2.		$Y = Y_1 + Y_2$ $Y = Y_1 + Y_2$ $Y = Y_1 + Y_2$	Záměna pořadí sčítacího místa a rozvětvení signálu.

<p>3.</p>		$Y = Y_1 + Y_2$ $Y = Y_1$ $Y = Y_1 + Y_2$ $Y_1 = Y - Y_2 =$ $= (Y_1 + Y_2) - Y_2 =$ $= Y_1$	<p>Záměna pořadí rozvětvení signálu a sčítacího místa.</p>
<p>4.</p>		$Y = FU + Y_1$ $Y = FU + \frac{1}{F} Y_2 F =$ $= FU + Y_2$	<p>Přenesení sčítacího místa před blok.</p>
<p>5.</p>		$Y = F(Y_1 + Y_2)$ $Y = Y_1 F + Y_2 F$	<p>Přenesení sčítacího místa za blok.</p>

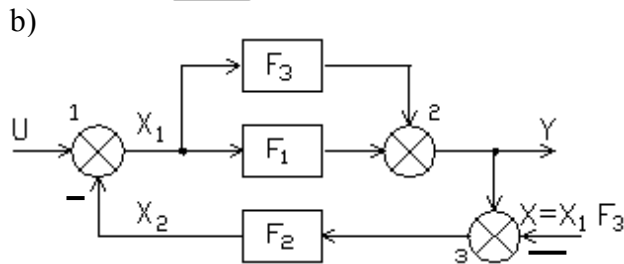
6.	 	$Y = FU$ $Y = FU$ $Y = FU$	Přenesení rozvětovacího místa před blok.
7.	 	$Y = FY_1$ $Y_1 = Y_1$ $Y = FY_1$ $Y_1 = (1/F)Y$ $Y_1 = (1/F)Y =$ $= (1/F)FY_1 = Y_1$	Přenesení rozvětovacího místa za blok
8.		Y $Y_1 = Y_2 = Y$	Rozpojení spojovací linky při současném zavedení bloku rovnosti signálů na obou koncích linky.

Příklad 3.4 – 3

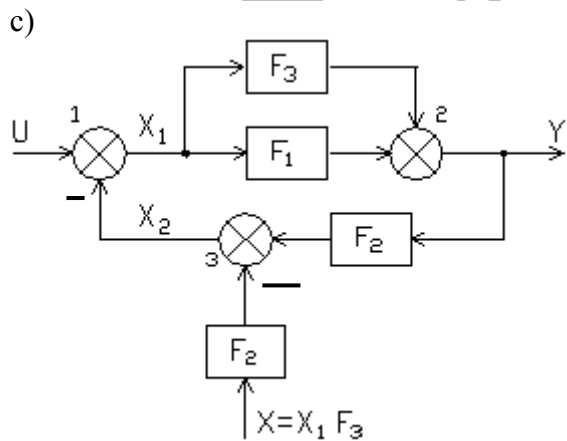
Určete výsledný přenos blokového schématu z příkladu 3.4 – 2



Dané složené schéma. V tomto příkladě provedeme zjednodušení záměnou pořadí rozvětvení signálu sčítacího místa za blokem F_1 (úprava č. 3)



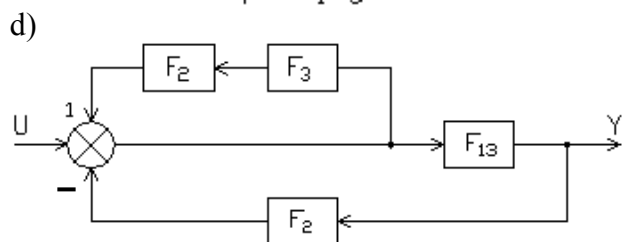
Výsledek úpravy je zřejmý z obr. 3.4-2b. Nyní přeneseme sčítací místo (3) za blokem F_2 (úprava č. 5), viz. obr. 3.4-2c.



V dalším kroku sloučíme sčítací místa 1 a 3 za blokem F_2 (úprava č. 1) a realizujeme signál $X = X_1 F_3$ a paralelní přenos vyjádříme přenosem

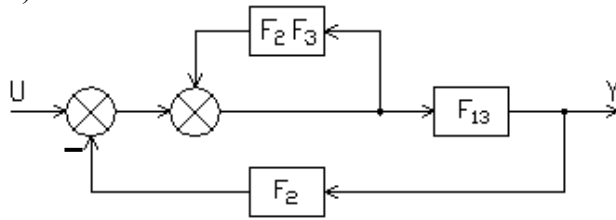
$$F_{13} = F_1 + F_3$$

Výsledek úprav je na obr. 3.4-2d.



Nyní sčítací místo 1 rozdělíme na dvě sčítací místa, sériový přenos je dán přenosem $F_2 F_3$, aby bylo dosaženo sériového zapojení.

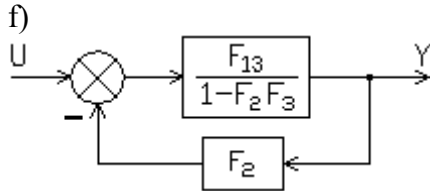
e)



Přenos zpětnovazebního zapojení je

$$\frac{1}{1 - F_2 F_3}$$

Toto schéma je možno zapsat do tvaru



Výsledný přenos je pak roven

$$F = \frac{\frac{F_{13}}{1 - F_2 F_3}}{1 + F_2 \frac{F_{13}}{1 - F_2 F_3}} = \frac{\frac{F_1 + F_3}{1 - F_2 F_3}}{\frac{1 - F_2 F_3 + F_2 (F_1 + F_3)}{1 - F_2 F_3}} = \frac{F_1 + F_3}{1 + F_1 F_2}$$

Z uvedeného příkladu je patrné, že stejný výsledek byl dosažen složitějším a pracnějším způsobem.

konec příkladu 3.4 – 3

3.4.3 Masonův vzorec

Pokud je třeba určit jen výsledný přenos, je možno použít jednoduchého pravidla, publikovaném v roce 1952 Masonem. Pro správné určení výsledného přenosu jsou určující přenosy v přímých větvích, přenosy ve smyčkách a jejich vzájemná poloha.

Přímou větví rozumíme orientovaný signálový tok spojující vstup s výstupem tak, že každý prvek větve se v něm vyskytuje pouze jednou. **Přenos přímé větve** je součin všech přenosů prvků větve.

Zpětnovazební smyčkou resp. **smyčkou** rozumíme naopak uzavřený orientovaný signálový tok (vracíme se do místa, ve kterém již byl) přičemž každý součtový člen i přenosový blok prochází signál ve smyčce pouze jednou.

Pro potřebu Masonova vzorce se vzájemná poloha smyček, nebo vzájemná poloha smyček a přímých větví klasifikuje jako

- a) dotýkající se smyčky resp. dotýkající se smyčka s přímou větví
- b) nedotýkající se smyčky resp. nedotýkající se smyčka s přímou větví.

Nedotýkající se smyčky (resp. smyčka a přímá větev) jsou takové smyčky a větve, které **nemají společné ani sčítací místo ani blok.**

Výsledný přenos je pak dán zlomkem

$$F(s) = \frac{\sum V_k D_k}{D} = \frac{\sum V_k (1 - \sum S_i^1 + \sum S_i^2 - \dots)}{1 - \sum S_i^1 + \sum S_i^2 - \sum S_i^3 + \dots} \quad (3.4 - 4)$$

kde D je tzv. determinant blokového schématu, který je roven

$$D = 1 - \sum S_i^1 + \sum S_i^2 - \sum S_i^3 + \dots \quad (3.4 - 5)$$

kde: $\sum S_i^1$ je součet přenosů všech zpětnovazebních smyček
 $\sum S_i^2$ je součet součinů přenosů dvou nedotýkajících se smyček
 $\sum S_i^3$ je součet součinů přenosů tří nedotýkajících se smyček

obecně:

$\sum S_i^r$ je součet součinů přenosů r -nedotýkajících se smyček až do vyčerpání všech možností

V_K je přenos k -té přímé větve

D_K je determinant té části schématu (diagramu), která se nedotýká k -té přímé větve

Příklad 3.4 – 4

Určete pomocí Masonova vzorce výsledný přenos blokového schématu z příkladu 3.4-2.

Řešení: Nejdříve nalezneme přenosy v přímých větvích a smyčkách

Přenosy v přímých větvích: F_1, F_3

Přenos zpětnovazební smyčky: $-F_1 F_2$

Smyčky i přímé větve se dotýkají!

Výsledný přenos je roven: $F = \frac{F_1 + F_3}{1 + F_1 F_2}$

Konec příkladu 3.4 – 4

Poznámka

Bloková schémata v technické praxi mohou obsahovat více vstupů-vstupních veličin (např. vstup akční veličiny, žádané hodnoty, vstup měřené či neměřené poruchové veličiny atd.). Dále mohou obsahovat kromě výstupního signálu i signály vnitřní.

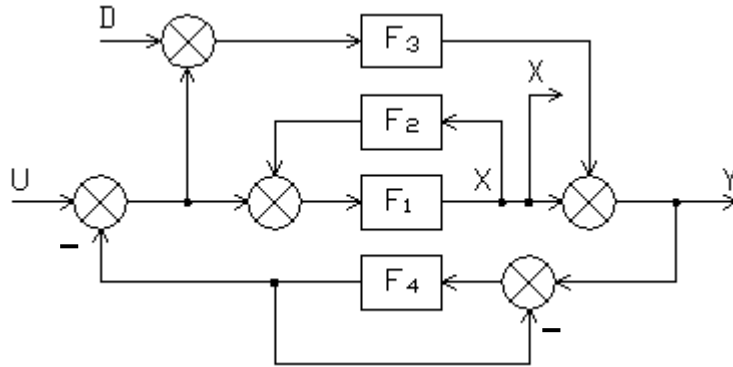
Má-li blokové schéma více možných výstupů či výstupních (vnitřních) signálů, pak obrazový přenos doplňujeme indexem, kde první index označuje uvažovanou výstupní veličinu a druhý index uvažovanou vstupní veličinu (např. F_{yd}). Zbývající vstupní signály jsou pokládány za nulové.

Masonovým vzorcem lze pak snadno vyjádřit dynamické vlastnosti mezi vstupním signálem a libovolným signálem na výstupu nebo uvnitř schématu.

Příklad 3.4 – 5

Určete: a) Přenos F_{yu} blokového schématu na obr. 3.4 – 2 b) Přenos F_{yd} c) Přenos F_{xu}

Řešení: a) $d = 0$; Přenos F_{yu} :



Obr. 3.4 – 2

Determinant soustavy je

$$D = 1 - \underbrace{[F_1F_2 - F_1F_4 - F_4 - F_3F_4]}_{\sum s_i^1} + \underbrace{[F_1F_2(-F_4) + F_1F_2(-F_3F_4)]}_{\sum s_i^2}$$

Determinant první přímé větve pro $k = 1$ označený D_1 je roven

$$D_1 = 1 - \underbrace{[-F_4]}_{\sum s_i^1} = 1 + F_4$$

Determinant druhé přímé větve pro $k = 2$ označený D_2 je roven

$$D_2 = 1 - \underbrace{[F_1F_2 - F_4]}_{\sum_k s_i^1} + \underbrace{[(F_1F_2)(-F_4)]}_{\sum_k s_i^2} = 1 - F_1F_2 + F_4 - F_1F_2F_4$$

Výsledný přenos je roven

$$F_{yu} = \frac{F_1(1 + F_4) + F_3(1 - F_1F_2 + F_4 - F_1F_2F_4)}{1 - [F_1F_2 - F_1F_4 - F_4 - F_3F_4] + [F_1F_2(-F_4) + F_1F_2(-F_3F_4)]} =$$

$$= \frac{F_1(1 + F_4) + F_3(1 - F_1F_2 + F_4 - F_1F_2F_4)}{1 - F_1F_2 + F_1F_4 + F_4 + F_3F_4 - F_1F_2F_4 - F_1F_2F_3F_4}$$

b) $u = 0$; Přenos F_{yd}

Přímá větev: F_3

Přenosy zpětnovazebních smyček a jejich vzájemná poloha se nemění

Přenosy přímých větví: F_1, F_3

Přenosy zpětnovazebních smyček:

$$F_1F_2; -F_1F_4; -F_4; -F_3F_4$$

Vzájemná poloha:

Přímá větev F_1 se nedotýká smyčky $-F_4$

Přímá větev F_3 se nedotýká smyček $-F_4; F_1F_2$

Smyčka F_1F_2 se nedotýká smyčky $-F_4$ a $-F_3F_4$

Přímá větev F_3 se nedotýká smyček $-F_4$ a F_1F_2

Výsledný přenos je roven:

$$F_{yd} = \frac{F_3(1 - F_1F_2 + F_4 - F_1F_2F_4)}{1 - F_1F_2 + F_1F_4 + F_4 + F_3F_4 - F_1F_2F_4 - F_1F_2F_3F_4}$$

c) $d = 0$; Přenos F_{xu}

Přímá větev: F_1

Vzájemná poloha: Přenos větve F_1 se nedotýká $-F_4$,

Výsledný přenos je roven

$$F_{yd} = \frac{F_1(1 + F_4)}{1 - F_1F_2 + F_1F_4 + F_4 + F_3F_4 - F_1F_2F_4 - F_1F_2F_3F_4}$$

Konec příkladu 3.4 – 5

3.5 METODA GEOMETRICKÉHO MÍSTA KOŘENU

V technické praxi se vyskytují systémy, které mohou z různých příčin výrazně měnit své dynamické vlastnosti. Změna dynamických vlastností se může projevit ve změně zesílení regulovaného systému např. vlivem nelinearit typu nasycení, nebo změně parametrů matematického modelu, např. obrazového přenosu atd. Omezíme se zatím pouze na změny v zesílení regulované soustavy, které ovlivňují nejen kvalitu regulačních pochodů ale mohou též způsobit nestabilitu regulačního obvodu. Z tohoto důvodu je třeba kontrolovat odolnost - robustnost uzavřeného regulačního obvodu, na možnou změnu zesílení soustavy.

Klasickou metodou vyšetřování je **metoda geometrického místa kořenů** (anglicky *Root Locus*), jejíž princip a vlastnosti budou v této části vyloženy, včetně softwarové podpory MATLABu, speciálně pak "Control System Toolboxu". Softwarová podpora pak z této metody vytváří pro uživatele velmi účinný a jednoduchý nástroj analýzy i syntézy regulačních obvodů.

Nejdříve si vysvětlíme základní pojmy a následně pak budou popsány vlastnosti kořenových hodografů, metoda geometrického místa kořenů včetně aplikace funkcí Control System Toolboxu `rlocus`, `rlocfind`.

3.5.1 Základní pojmy, kořenový hodograf

Uvažujme přenos otevřeného obvodu $F_0(s)$ viz obr. 2a, jehož přenos je možno vyjádřit ve tvaru

$$F_0(s) = R(s)F(s) = \frac{r_2s^2 + r_0s + r_1}{s} F(s) = K \cdot \frac{(s - s_{B1})(s - s_{B2})}{s} F(s) = K \cdot R_0(s) \cdot F(s),$$

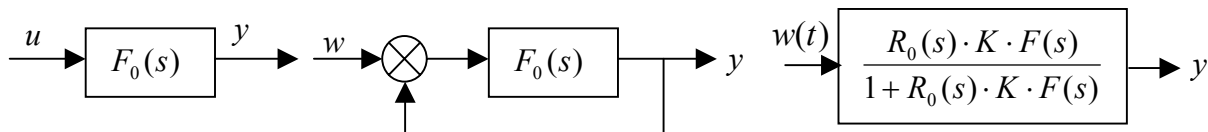
kde je $R(s) = K \cdot R_0(s) \dots$ přenos regulátoru,

$K = \text{Gain} \dots$ je celkové zesílení zpětné vazby,

$R_0(s) \dots$ je struktura regulátoru definována póly a nulami,

$F(s) \dots$ je přenos soustavy.

Pro vyšetřování vlivu zesílení K na vlastnosti uzavřeného obvodu, bude uvažován regulační obvod dle obr.2b. Přenos uzavřeného obvodu je na obr.2c.



Obr.2a Otevřený obvod Obr.2b Uzavřený obvod Obr.2c Přenos uzavřeného obvodu

Obrazový přenos regulované soustavy je zapsán ve tvaru $F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$, kde $A(s), B(s)$ jsou polynomy. Obecně je možno obrazový přenos regulátoru vyjádříme ve tvaru

$$R(s) = K \cdot R_0(s) = K \cdot \frac{R_B(s)}{R_A(s)} = K \cdot \frac{(s - s_{BR1})(s - s_{BR2})}{(s - s_{R1})},$$

kde K je celkové zesílení regulátoru

Přenos *otevřené smyčky* je

$$F_0(s) = K \cdot F(s)R_0(s) = K \frac{B(s) R_B(s)}{A(s) R_A(s)} = K \frac{M(s)}{Q(s)} = K \frac{\prod_{j=1}^{mM} (s - s_{Mj})}{\prod_{k=1}^{nQ} (s - s_{Qk})}, \quad (3.5 - 1)$$

kde je $M(s)$... polynom čitatele otevřené smyčky, $N = mM$ je počet nul otevřené smyčky,
 s_{Mj} ... kořeny čitatele otevřené smyčky – „nuly“, $j = 1, 2, \dots, N$
 $Q(s)$... polynom jmenov. otevřené smyčky, $P = nQ$ je počet pólů otevřené smyčky
 s_{Qk} ... kořeny jmenovatele otevřené smyčky – „póly“, $k = 1, 2, \dots, N$

Přenos *uzavřené smyčky* (uzavřeného obvodu) bude roven

$$F_{uz} = \frac{F_0(s)}{1 + F_0(s)} = \frac{K \cdot \frac{M(s)}{Q(s)}}{1 + K \cdot \frac{M(s)}{Q(s)}} = \frac{R_0(s) \cdot K \cdot F(s)}{1 + R_0(s) \cdot K \cdot F(s)} = \frac{K \cdot B(s) \cdot R_B(s)}{A(s) \cdot R_A(s) + K \cdot B(s) \cdot R_B(s)} \quad (3.5 - 2)$$

Ze vztahu (3.5 – 2) je zřejmé, že **nuly-kořeny čitatele** uzavřené regulační smyčky (racionální lomené funkce (3.5 – 2)) jsou rovny **nulám otevřené** smyčky (3.5 – 1). Póly uzavřené regulační smyčky jsou taková „s“ pro která platí

$$1 + F_0(s) = 1 + K \cdot R_0(s)F(s) = 1 + K \cdot \frac{M(s)}{Q(s)} = 0 \rightarrow K \cdot \frac{M(s)}{Q(s)} = -1. \quad (3.5 - 3)$$

Na následujícím příkladě vysvětlíme vliv změny zesílení otevřené smyčky na rozložení pólů uzavřené smyčky v s-rovině.

Příklad 3.5-1

Uvažujme přenos otevřené smyčky ve tvaru $K \frac{M(s)}{Q(s)} = \frac{K}{s(s+2)}$. Přenos

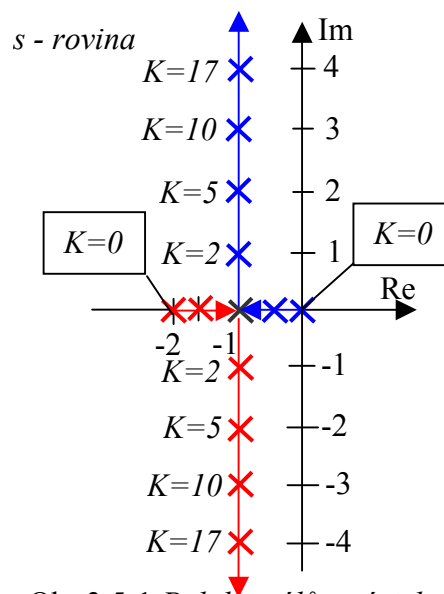
uzavřené smyčky je roven $F_{uzsm}(s) = \frac{K}{s^2 + 2s + K}$. Póly uzavřené smyčky je možno v tomto příkladě spočítat řešením kvadratické rovnice $s^2 + 2s + K = 0$, pro které platí

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4K}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - K}. \quad (1)$$

V tab.3.5-1 jsou uvedeny hodnoty pólů s_1 a s_2 pro zvol. hodnoty $K = 0; 0,2; 0,4; 0,6; \dots, 37$.

K	s_1	s_2
0	0	-2
0,2	-0,105	-1,895
0,4	-0,225	-1,775
0,6	-0,367	-1,663
0,8	-0,553	-1,447
1,0	-1	-1
2,0	-1+i	-1-i
3,0	-1+1,414i	-1-1,414i
5,0	-1+2i	-1-2i
10	-1+3i	-1-3i
17	-1+4i	-1-4i
26	-1+5i	-1-5i
37	-1+6i	-1-6i

Tab.3.5-1



Obr.3.5-1 Poloha pólů v závislosti na zesílení otevřené smyčky

Na obr.3.5-1 jsou zobrazeny póly v s -rovině pro $K \geq 0$. Poloha pólů je označena x pro zvolenou zesílení. Pro $K = 0$ jsou póly uzavřené smyčky rovny pólům otevřené smyčky ($s_1 = 0, s_2 = -2$). Při rostoucím K lze vidět změnu polohy obou pólů, takže se vytvořili dvě větve. Větve vycházející z pólu $s_1 = 0$ (modrá) směřuje doleva, větve vycházející z pólu $s_2 = -2$ (červená) směřuje doprava. Pro takto volená zesílení je soustava *přetlumená* ($0 \leq K < 1$). Pro $K = 1$ se obě větve stýkají v bodě -1 . Póly jsou dvojnásobné $s_1 = s_2 = -1$, uzavřená smyčka je *aperiodická*. Při dalším zvyšování K jsou póly komplexní, které však mají konstantní hodnotu reálné části. Reálná část je rovna -1 . První větve představuje komplexní číslo $-1 + i\omega$, druhá větve pak kořen komplexně sdružený $-1 - i\omega$. Uzavřená smyčka je *tlumená*, u které při rostoucím K roste i úhlová frekvence ω . Pro žádnou hodnotu zesílení $K \geq 0$ nedosáhnou póly pravé poloroviny, tedy uzavřená smyčka je stabilní pro libovolné $K \geq 0$.

Změna polohy pólů uzavřené smyčky pro $K \geq 0$ vytváří trajektorie, kterým se říká **kořenové hodografy**. V našem příkladě byly kořenové hodografy vypočteny podle rovnice (1) z charakteristického polynomu uzavřené smyčky.

Konec příkladu 3.5-1

Kořenový hodograf: Pro změnu zesílení K otevřené smyčky poloha pólů uzavřené smyčky vytváří trajektorie, které se nazývají **kořenový hodograf**.

Postup, který byl použit pro konstrukci kořenového hodografu v uvedeném příkladě, však není možné použít u složitějších úloh vyšších řádů. V roce 1948 a 1950 publikoval Evans [4,5] pro konstrukci kořenových hodografů graficko-početní metodu, která se nazývá v angličtině „Root Locus Techniques“ v češtině pak „Metoda geometrického místa kořenů“. Tato technika umožňuje ze známých nul a pólů otevřené smyčky a zesílení K grafickým způsobem určit póly uzavřené smyčky v komplexní rovině. Kromě analýzy uzavřené smyčky umožňuje také syntézu regulačních obvodů. Základní principy této metody geometrického místa kořenů budou v dalším textu vysvětleny.

Na základě odvozeného přenosu uzavřené smyčky dle (3.5 – 2) je zřejmé, že póly uzavřené smyčky musí vyhovovat rovnosti (3.5 – 3) pro každé zesílení K

$$F_0(s) = \frac{M(s)}{Q(s)} = -\frac{1}{K}. \quad (3.5 - 4)$$

Z hlediska dalšího výkladu bude užitečné si zopakovat ale hlavně připravit vhodné nástroje pro popis trajektorií kořenových hodografů.

3.5.2 Zobrazování komplexních čísel

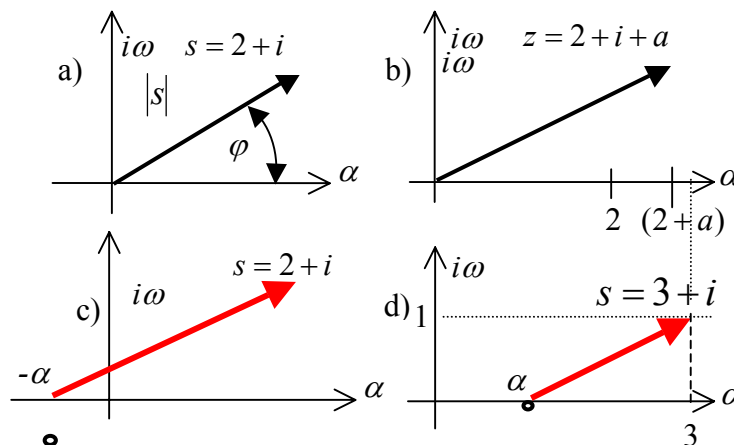
Komplexní čísla zobrazujeme v komplexní rovině "s" buď v kartézských souřadnicích $s = x + iy$ nebo v polárních souřadnicích ve tvaru $s = x + iy = |s|e^{i\varphi}$, kde $|s|$ je **modul**, (absolutní hodnota, amplituda A) a φ je **argument** (fáze) nebo také můžeme zapsat zkráceně $A = |s| \angle \varphi$. Na obr.3.5-2a je zobrazení pro

$$s = \alpha + i\omega = |s|e^{i\varphi} = 2 + i = \sqrt{5} \cdot e^{i\varphi} \text{ kde } \varphi = \arctg \frac{1}{2} = 0,147\pi.$$

Zapsáno zkráceně $A = |z| \angle \varphi \rightarrow \sqrt{5} \angle 0,147\pi$, kde A je modul a φ je fáze.

Komplexní funkce transformuje komplexní proměnou s do roviny $F(s)$. Jinými slovy, transformuje ji na jinou proměnou $z = F(s)$. Například funkce $z = F(s) = (s + a) = 2 + i + a$ provede transformaci, jejíž výsledek je na obr.2b. Připomeneme si, že funkce $F(s)$ je nulová pro $s = -a$. Jestliže posuneme vektor z do bodu $-a$ dostáváme další možné zobrazení komplexního čísla, pomocí **vektoru, jehož počátek je v bodě** $F(s = -a) = 0$.

Je možno konstatovat, že $F(s + a)$ je komplexní číslo, které je možno reprezentovat vektorem, který kreslíme z nuly této funkce do libovolného bodu "s" viz obr.2c.



Obr.3.5-2 Zobrazení komplexních čísel v s-rovině

Jako další příklad uvedeme komplexní bod definovaný funkcí $F(s) = (s - a)$. Zobrazení komplexního čísla $s = 3 + i$ pomocí vektoru, jehož počátek je v nule komplexní funkce $F(s) = (s - a) = 0$ je na obr.2.d.

V dalším rozšíříme reprezentaci komplexního čísla $z = F(s)$ pomocí vektoru, jehož počátek je v nulách a v pólech této komplexní funkce. Uvažujme komplexní číslo, které je definováno funkcí

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m (s - s_{B1})(s - s_{B2}) \cdots (s - s_{Bm})}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)} = \frac{b_m \prod_{j=1}^m (s - s_{Bj})}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)}, \quad (3.5 - 5)$$

Absolutní hodnotu komplexního čísla (*modul*) $z = F(s)$ pak vyjádříme ve tvaru

$$|A| = |F(s)| = \frac{\text{Součouabs. hodnot vektorů z nul}}{\text{Součouabs. hodnot vektorů z pólů}} = \frac{b_m \prod_{j=1}^m |(s - s_{Bj})|}{\prod_{k=1}^n |(s - s_k)|} \quad (3.5 - 6)$$

kde $|(s - s_{Bj})|$ je absolutní hodnota vektoru (*modulu*), který je veden z bodu s_{Bj} do bodu "s"
 $|(s - s_k)|$ je absolutní hodnota vektoru (*modulu*), který je veden z bodu s_k do bodu "s".

Fázi φ (*Argument*) komplexního čísla $F(s)$ pak vyjádříme ve tvaru

$$\varphi = \Sigma \text{úhlů vek. z nul} - \Sigma \text{úhlů vektorů z pólů} = \sum_{j=1}^m \angle (s - s_{Bj}) - \sum_{k=1}^n \angle (s - s_k) \quad (3.5 - 7)$$

přičemž se úhly měří od reálné osy v kladném smyslu.

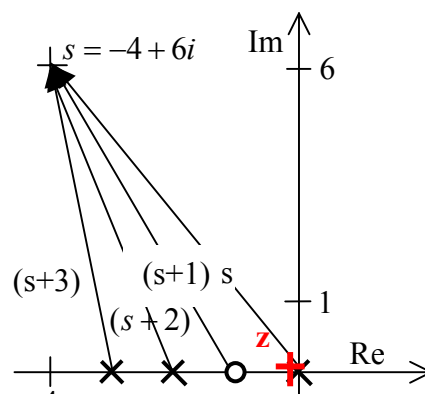
Příklad 3.5-2

Pro komplexní číslo z , které je definováno funkcí $F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)} = z$

určete jeho reprezentaci v s-rovině v bodě $s = -4 + 6i$.

Řešení: Na obr.3.5-3 je grafické zobrazení bodu $s = -4 + 6i$ a čtyř vektorů vedených z bodů s , $(s+1)$, $(s+2)$, $(s+3)$. Pro jednotlivé body jsou definovány vektory

- 1) $s = 0, \quad \sqrt{52} \angle \arctg \frac{6}{-4} = 123,69^\circ$
- 2) $s = -1, \quad \sqrt{45} \angle \arctg \frac{6}{-3} = 116,56^\circ$



Obr.3.5-3 Zobrazení $F(s)$ v bodě $(-4 + 6i)$ v s-rovině

$$3) s = -2, \quad \sqrt{40} \angle \arctg \frac{6}{-2} = 108,43^\circ$$

$$4) s = -3, \quad \sqrt{37} \angle \arctg \frac{6}{-1} = 99,46^\circ$$

Dosazením do (3.5 – 2) a (3.5 – 3) dostaneme absolutní hodnotu A a fázi φ (ve stupních) funkce $z = F(s)$ v bodě $s = -4 + 6i$.

$$A \angle \varphi = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{37}} \angle 116,56^\circ - (123,69^\circ + 108,43^\circ + 99,46^\circ) = 0,02419 \angle -215,02^\circ$$

Konec příkladu 3.5-2

3.5.3 Vlastnosti a konstrukce geometrického místa kořenů

Kořenový hodograf musí splňovat podmínku (3.5 – 2). Tuto podmínku je možno podle (3.5 – 6) vyjádřit pomocí modulu

$$\frac{M(s)}{Q(s)} = -\frac{1}{K} \rightarrow \left| K \frac{M(s)}{Q(s)} \right| = 1 \rightarrow |K| = \left| \frac{Q(s)}{M(s)} \right| = \frac{\prod_{j=1}^{mQ} |s - s_{Qj}|}{\prod_{k=1}^{nM} |s - s_{Mk}|}, \quad (3.5 - 8)$$

a podle rovnice (3.5 – 7) pomocí fáze ve tvaru

$$K \frac{M(s)}{Q(s)} = -1 \rightarrow \text{Arg} \left\{ K \frac{M(s)}{Q(s)} \right\} = \angle K \frac{M(s)}{Q(s)} = (2k + 1)\pi \text{ pro } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.5 - 9)$$

Geometrické místo kořenů: Body, které splňují podmínky (3.5 – 8) a (3.5 – 9) tvoří množinu bodů, které se označují jako **geometrické místo kořenů**.

Z rovnice (3.5 – 9) můžeme zformulovat tvrzení:

Geometrické místo kořenů je spojnice takových bodů v rovině „s“, pro které platí, že součet všech úhlů vektorů vedených z nul a pólů otevřené smyčky do bodů „s“ (kořenového hodografu), musí být roven lichému násobku π .

Příklad 3.5-3

Zkontrolujte z Příkladu 3.5-1 zda bod $z = -1 + i$ leží v kořenovém hodografu a určete zesílení otevřené smyčky!

Řešení:

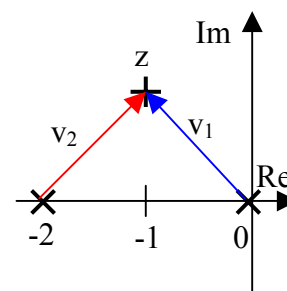
a) Otevřená smyčka má póly $s_1 = 0$ a $s_2 = -2$.

Vektor v_1 z pólu $s_1 = 0$ je roven $v_1 = \sqrt{2} \cdot e^{3/4\pi} \rightarrow \sqrt{2} \angle \frac{3}{4}\pi$;

Vektor v_2 z pólu $s_2 = -2$ je roven $v_2 = \sqrt{2} \cdot e^{1/4\pi} \rightarrow \sqrt{2} \angle \frac{1}{4}\pi$;

Argument bodu z je roven $Arg z = \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = \pi \rightarrow z$ čehož vyplývá, že leží v kořenovém hodografu.

b) Podle (3.5 – 11) je zesílení otevřené smyčky rovno $|K| = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{1} = 2$. Tento výsledek je možno ověřit v Tab.3.5-1 ... souhlasí.



Obr.3.5-4 Zobrazení bodu

Konec příkladu 3.5-3

Softwarová podpora

Budou vyloženy pouze dva příkazy, které budou používány již při výkladu vlastností geometrického místa kořenů.

Funkce rlocus

Vypočítá a vykreslí z přenosu otevřené smyčky kořenový hodograf-geometrické místo kořenů charakteristické rovnice uzavřené smyčky

Syntaxe funkce

rlocus(sys); rlocus(sys,k)
[r,k]=rlocus(sys); r=rlocus(sys,k)

kde je **sys** obrazový přenos vytvořený příkazem **tf**

k zadaný vektor zesílení

r matice, rozměru **length(k)**, přičemž j -tý sloupec obsahuje geometrické místo kořenů pro zesílení $k(j)$

Funkce rlocfind

Z geometrického místa kořenů určí pro zvolený bod trajektorie zesílení otevřené smyčky.

Syntaxe funkce

[k,poles]=rlocfind(sys);

kde je **sys** obrazový přenos vytvořený příkazem **tf**
k vypočtené zesílení

3.5.4 Vlastnosti geometrického místa kořenů

Metodu geometrického místa kořenů, která je zpracována do knihovnických programů Control System Toolboxu, pokládáme za nástroj analýzy a syntézy. Může se tedy zdát zbytečné, zabývat se vlastnostmi a konstrukcí geometrického místa kořenů. Elementární znalost těchto vlastností je však naprosto nutná pro používání funkcí `rlocus`, `rlocfind` a správnou interpretaci získaných výsledků.

1) Počet větví geometrického místa kořenů

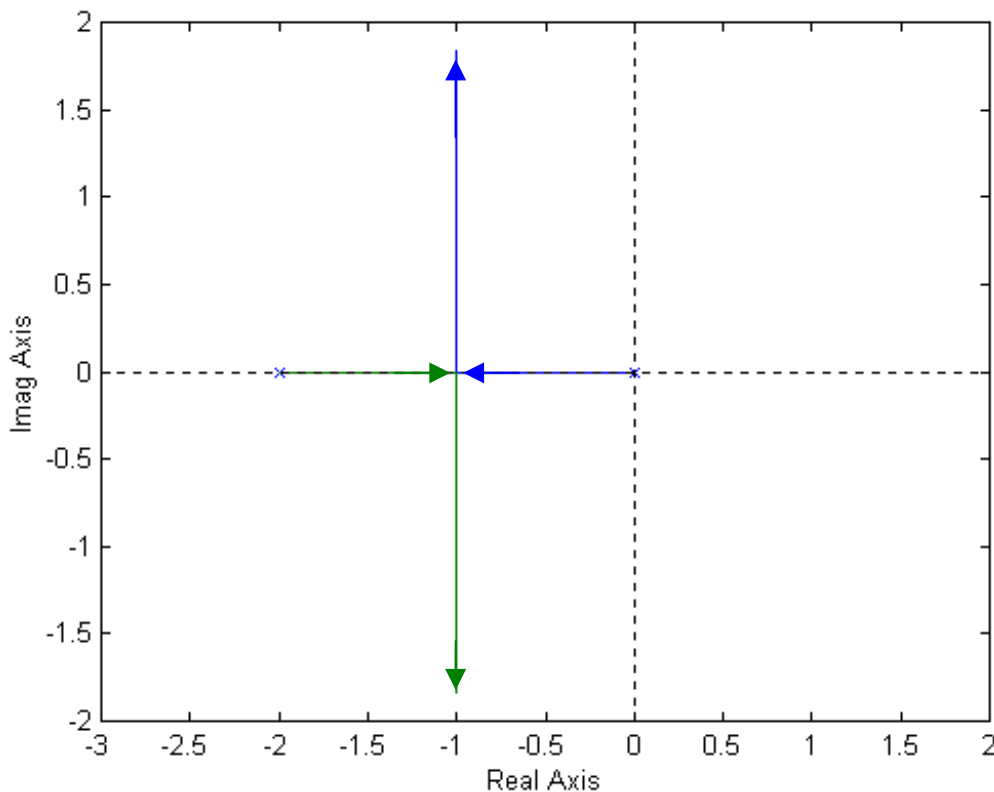
Počet větví geometrického místa kořenů je definován počtem pólů uzavřeného obvodu, přičemž je nutné uvažovat násobnost pólů.

Příklad 3.5-4

Otevřená smyčka má obrazový přenos $\frac{M(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s(s+2)}$.

Určete: Počet větví

Řešení: Počet větví je dán počtem pólů otevřené smyčky. $P = 2, s_1 = 0; s_2 = -2; N = 0$, viz obr.3.5-5



Obr.3.5-5

Konec příkladu 3.5-4

2) Výchozí body geometrického místa kořenů

Pro uzavřenou smyčku dle (1 – 5) platí $\frac{M(s)}{Q(s)} = -\frac{1}{K} \rightarrow K \cdot M(s) = -Q(s)$.

- Pro $K = 0$ platí $0 = -Q(s)$, což znamená že pro $K \rightarrow 0$ se póly blíží k pólům otevřeného obvodu.
- Pro $K \rightarrow \infty$ platí $\frac{M(s)}{Q(s)} = 0 \rightarrow$, což znamená že pro $K \rightarrow \infty$ se póly blíží k nulám otevřeného obvodu.

Příklad 3.5-5

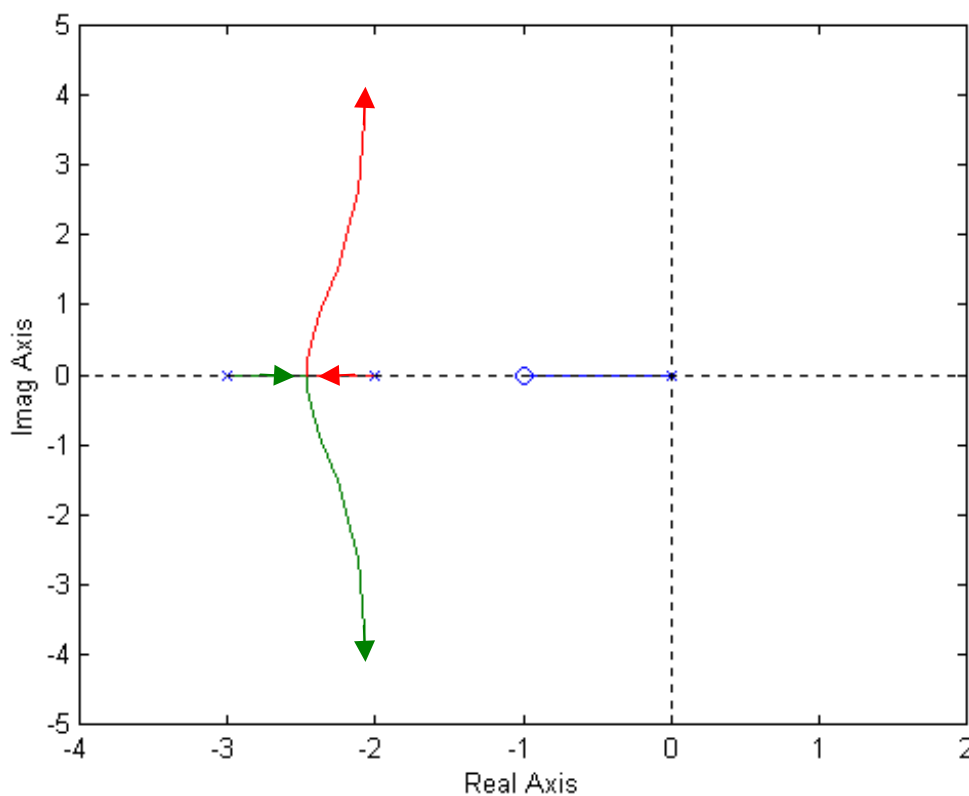
K přenosu otevřené smyčky $F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}$

Určete:

- Počet větví, jejich začátek a konec
- Kolik větví končí v nulách otevřené smyčky
- Nakreslete pomocí příkazu rlocus

Řešení:

- Počet pólů a nul otevřené smyčky : $P = 3$, $N = 1$. Kořenový hodograf má 3 větve, které začínají v pólech $s_1 = 0$; $s_2 = -2$; $s_3 = -3$.
- Jedna trajektorie končí v nule.
- Geometrické místo kořenů je na obr.3.5-6



Obr.3.5-6

Konec příkladu 3.5-5

3) Symetrie geometrického místa kořenů

Geometrické místo kořenů je symetrické vzhledem k reálné ose.

4) Průběh geometrického místa kořenů na reálné ose

Segment reálné osy je geometrickým místem kořenů tehdy, jestliže vpravo od tohoto segmentu je lichý součet nul a pólů.

5) Počet větví geometrického místa kořenů končící v nekonečnu

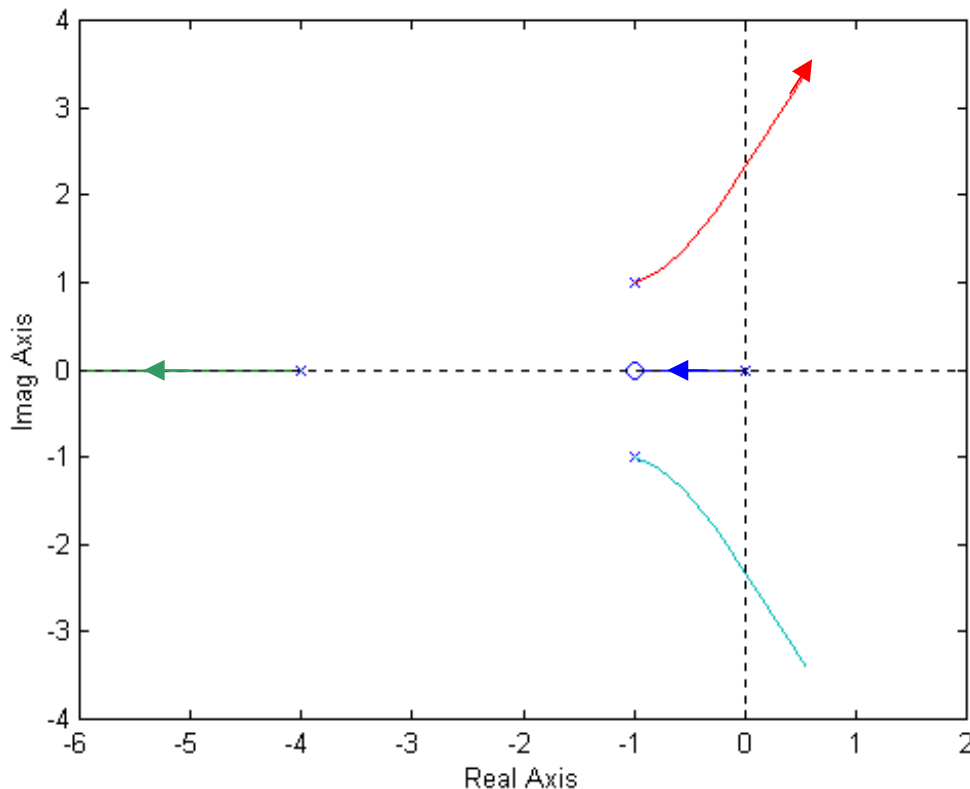
Jestliže P je počet pólů a N je počet nul otevřené smyčky, pak $(P - N)$ větví geometrického místa kořenů končí v nekonečnu.

Příklad 3.5-6

K přenosu otevřené smyčky $F(s) = \frac{s+1}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$ určete počet větví

končící v nekonečnu.

Řešení: Počet pólů otevřené smyčky $P = 4$, počet nul $N = 1$. Počet větví končící v nekonečnu je 3 viz obr.3.5-7. Zřejmá je i symetrie vzhledem k reálné ose.



Obr.3.5-7

Konec příkladu 3.5-6

6) Úhel v počátku trajektorie

Z r -násobného pólu otevřeného obvodu vybíhá r -větví pod úhlem

$$\varphi_k = \frac{1}{r} [(n_p - n_L - 1) * \pi + k * 2\pi] \quad (3.5 - 10)$$

kde n_p je počet pólů a nul ležících vpravo od uvažovaného násobného pólu
 n_L je počet pólů a nul ležících vlevo od uvažovaného násobného pólu
 $k = 1, 2, 3, \dots, r$

Příklad 3.5-7

K přenosu otevřené smyčky $F(s) = \frac{1}{s(s+1)^3}$ určete úhel větví vybíhající z pólu otevřené smyčky $s_2 = s_2 = s_3 = -1$.

Řešení: Podle (3.5 – 10) je pro $n_p = 1$, $n_L = 0$ je úhel φ roven

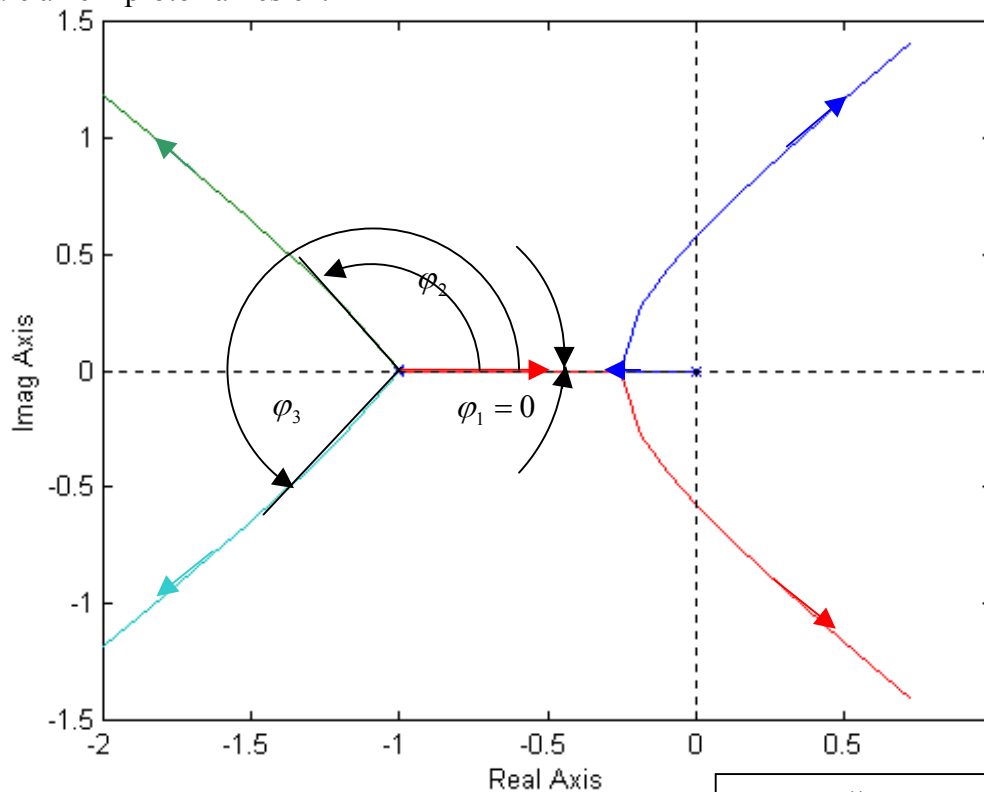
$$\varphi_k = \frac{1}{r} [(n_p - n_L - 1) * \pi + k * 2\pi] \rightarrow \varphi_k = \frac{1}{3} [(1 - 0 - 1) * \pi + k * 2\pi]$$

$$k = 1 \rightarrow \varphi_1 = \frac{1}{3} [-0 * \pi + 1 * 2\pi] = \frac{2}{3} \pi,$$

$$k = 2 \rightarrow \varphi_2 = \frac{1}{3} [-0 * \pi + 2 * 2\pi] = \frac{4}{3} \pi,$$

$$k = 3 \rightarrow \varphi_3 = \frac{1}{3} [-0 * \pi + 3 * 2\pi] = \frac{6}{3} \pi = 2\pi$$

Úhly φ_2 a φ_3 jsou vyneseny na obr.3.5-8 v počátku trajektorie. Úhel φ_1 je roven nule a není proto zakreslen.



Konec příkladu 3.5-7

Obr.3.5-8

7) Úhel asymptot geometrického místa kořenů

a) Pro velká „ s “ se průběh geometrického místa kořenů blíží asymptotám, jejich průsečík s reálnou osou je roven

$$x_0 = \frac{\sum_{k=1}^{nQ} s_{Qk} - \sum_{j=1}^{mM} s_{Mj}}{P - N}, \quad (3.5 - 11)$$

kde je $\sum_{k=1}^{nQ} s_{Qk}$ součet pólů otevřené smyčky, $\sum_{j=1}^{mM} s_{Mj}$ součet nul ot. smyčky

P počet pólů otevřené smyčky,
 N počet nul otevřené smyčky.

b) Úhel, který svírají asymptoty s reálnou osou, je dán rovností

$$\alpha_0 = \frac{\pm \pi}{P - N}. \quad (3.5 - 12)$$

8) Průsečík geometrického místa kořenů s imaginární osou

Určí se z kritického zesílení-ryze imaginární kořeny

9) Zesílení

Má-li otevřená smyčka minimálně o dva póly víc než nul, pak geometrické místo kořenů je pro každou hodnotu zesílení K konstantní a platí

$$\sum_{k=1}^P \operatorname{Re}\{s_k\} = \text{kons.} \quad (3.5 - 13)$$

10) Rozvětvení geometrického místa kořenů

Bod x_{vet} na reálné ose, na které dochází k větvení (trajektorie v bodě x_{vet} splývají a zase rozbíhají) kořenového hodografu musí splňovat podmínku

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{M(s)}{Q(s)} \right]_{s=x_{vet}} = 0 \quad (3.5 - 14)$$

Příklad 3.5-8

K přenosu otevřené smyčky $F(s) = \frac{1}{s(s+4)(s^2+4s+30)}$ určete:

- 1) Úhel asymptot a jejich průsečík s reálnou osou
- 2) Rozvětvení geometrického místa kořenů

Řešení:

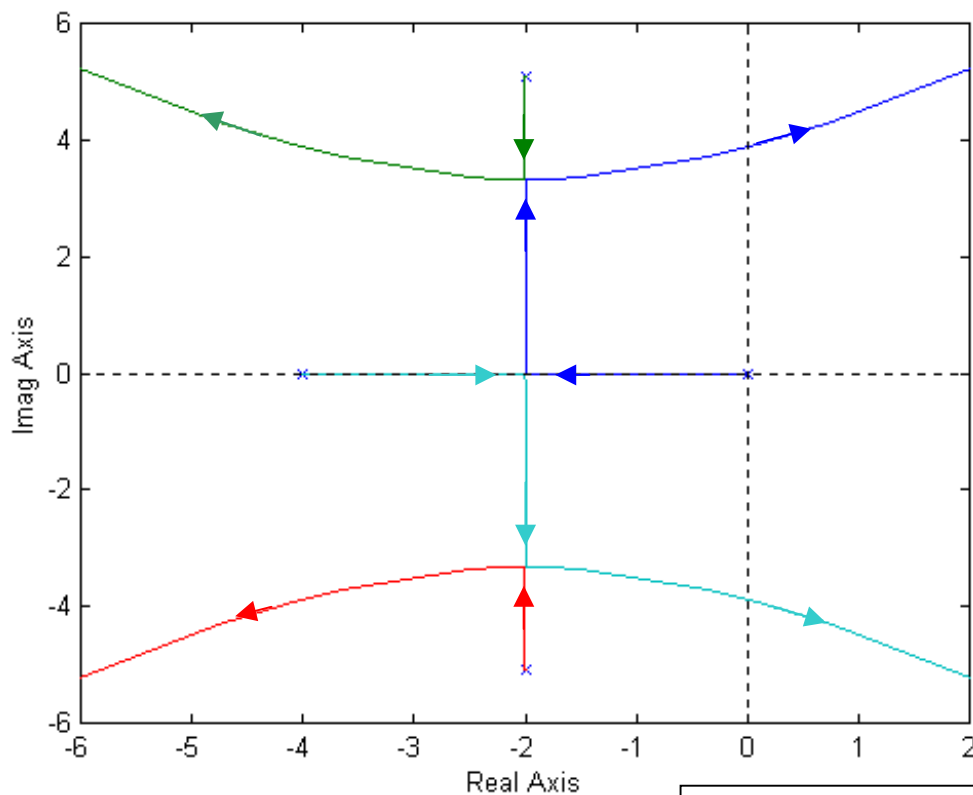
- 1) a) Úhel asymptot pro $P = 4, N = 0$: podle (3.5 – 12) platí $\alpha_0 = \frac{\pm \pi}{P - N} = \frac{\pm \pi}{4}$
- b) Průsečík asymptot s reálnou osou je podle 7a) roven

$$x_0 = \frac{\sum_{k=1}^{nQ} s_{Qk} - \sum_{j=1}^{mM} s_{Mj}}{P - N} = \frac{(0 - 4 - 2 + i2,45 - 2 - i2,45)}{4} = -2.$$

- 2) Bod větvení splňuje podle (3.5 – 14) podmínku, tedy $x_{\text{vet}} = -2$.

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{M(s)}{Q(s)} \right]_{s=x_{\text{vet}}} = 0 \rightarrow \frac{d}{ds} \frac{1}{s(s+4)(s+4s+20)} = \frac{4s^3 + 24s^2 + 72s + 80}{[s(s+4)(s+4s+20)]^2} = 0$$

Čitatel nuluje $x_{\text{vet}} = -2$. Fázový hodograf je na obr.8



Obr.3.5-9

Konec příkladu 3.5-8

Příklad 3.5-9

K přenosu otevřené smyčky $F(s) = \frac{s+4}{s(s+2)}$ určete:

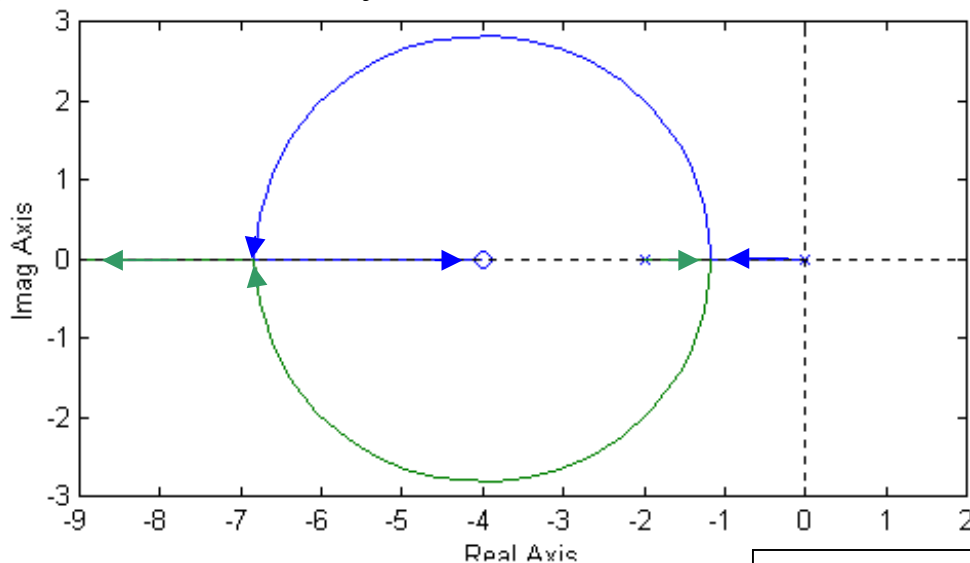
- a) Body větvení
b) Geometrické místo kořenů

Řešení: a) Podle (3.5 – 14) musí body větvení splňovat podmínku, ze které plyne

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{M(s)}{Q(s)} \right]_{s=x_{vet}} = 0 = \frac{d}{ds} \frac{s+4}{s(s+2)} = \frac{s^2 + 8s + 8}{[s(s+2)]^2} = 0 \rightarrow s_{1,2} = -4 \pm \sqrt{8}.$$

Body větvení jsou $s_{1vet} = -1,17$; $s_{2vet} = -6,83$.

- b) Geometrické místo kořenů je na obr.3.5-10.



Obr.3.5-10

Konec příkladu 3.5-9

Na uvedených příkladech byly demonstrovány vlastnosti metody geometrického místa kořenů včetně ukávek trajektorií kořenových hodografů. Použité softwarové prostředky jsou pro uživatele velmi příjemné a nenáročné. Významný přínos spočívá v osvojení si metody a softwarových prostředků na analýzu systémů s proměnným parametrem-zesílením. Kořenový hodograf pak jasně dokumentuje vliv změny zesílení na uzavřený obvod.

4.4 STABILITA VE FREKVENČNÍ OBLASTI, NYQUISTOVO KRIÉTRIUM STABILITY

Kritéria stability se dělí na algebraická a frekvenční. Algebraická kritéria (Hurwitzovo a Ruth-Schurovo) byla součástí „Základů spojitého řízení“. Mezi frekvenční kritéria řadíme Nyquistovo a Michajlovovo. V tomto kurzu se zaměříme na Nyquistovo kritérium stability, jehož charakteristickým znakem je, že na základě znalosti pólů a frekvenční charakteristiky otevřeného obvodu v komplexní rovině rozhoduje o stabilitě uzavřeného obvodu. Dalším významnou vlastností tohoto kritéria je, že umožňuje zavést míru stability, která definuje fázovou a amplitudovou bezpečnost. Často se hovoří o relativní stabilitě. Výklad kritéria rozdělíme do dvou částí

- 1) Formulace Nyquistových podmínek stability
- 2) Splnění Nyquistových podmínek stability na konkrétním obvodu

4.4.1 Formulace Nyquistových podmínek stability

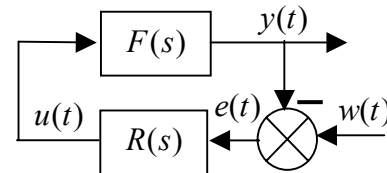
a) Póly a nuly otevřeného a uzavřeného obvodu

Uvažujme jednoduchý uzavřený obvod dle obr.4.4.1. Přenos regulované soustavy a regulátoru je

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}; R(s) = K \cdot R_0(s) = \frac{R_B(s)}{R_A(s)}$$

Přenos *otevřené smyčky* (otevřeného obvodu) je roven

$$F_0(s) = F(s)R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \cdot \frac{R_B(s)}{R_A(s)} = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} \quad (4.4 - 1)$$



Obr.4.4.1 Uzavřený obvod

Přenos *uzavřené smyčky* (uzavřeného obvodu) bude roven

$$F_{uz} = \frac{F_0(s)}{1 + F_0(s)} = \frac{F(s)R(s)}{1 + F(s)R(s)} = \frac{\frac{B(s)R_B(s)}{A(s)R_A(s)}}{1 + \frac{B(s)R_B(s)}{A(s)R_A(s)}} = \frac{B(s) \cdot R_B(s)}{A(s) \cdot R_A(s) + B(s) \cdot R_B(s)} \quad (4.4 - 2)$$

Rozepíšeme-li člen $1 + F_0(s)$ dostaneme

$$1 + F_0(s) = 1 + F(s)R(s) = 1 + \frac{B(s)R_B(s)}{A(s)R_A(s)} = \frac{A(s)R_A(s) + B(s)R_B(s)}{A(s)R_A(s)} \quad (4.4 - 3)$$

Porovnáme-li vztahy (4.4 - 1,2,3) je možno učinit závěr:

- 1) **Póly** výrazu $\{1 + F_0(s)\}$ jsou rovny **pólům otevřené smyčky**.
- 2) **Nuly** výrazu $1 + F_0(s) = 0$ jsou **rovny pólům uzavřené regulační smyčky** (4.4 - 2) a tedy charakteristická rovnice uzavřeného obvodu se musí splňovat podmínku

$$1 + F_0(s) = 0 \quad (4.4 - 4)$$

V dalším budeme proto rozlišovat:

Nuly přenosu otevřené smyčky (otevřeného obvodu): nuly přenosu $F_0(s)$.
 Póly přenosu otevřené smyčky (otevřeného obvodu): póly přenosu $F_0(s)$.
 Nuly přenosu *uzavřené smyčky (uzavřeného obvodu)*: **póly přenosu $F_0(s)$** .
 Póly přenosu *uzavřené smyčky (uzavřeného obvodu)*: **nuly přenosu $1 + F_0(s)$** .

Věty o stabilitě otevřeného a uzavřeného obvodu:

Stabilita otevřeného obvodu. Otevřený obvod je stabilní, jestliže póly otevřeného obvodu leží v levé části s-roviny.

Stabilita uzavřeného obvodu. Uzavřený obvod je stabilní, jestliže všechny póly uzavřeného obvodu nebo nuly výrazu $[1 + F_0(s)]$ leží v levé části s-roviny.

b) Cauchyho princip argumentu

Základem Nyquistova kriteriia stability je Cauchyho princip argumentu, který je podrobně vysvětlen v Příloze P1, viz. (P1 – 21). Pro zjednodušení výkladu budeme vycházet ze vztahu (P1 – 21), který si zopakujeme.

Nechť $F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ je racionálně lomená funkce komplexní proměnné s , ($A(s), B(s)$ jsou polynomy stupňů n, m , $n > m$). Nechť c je kladně orientovaná uzavřená křivka v rovině s . Jestliže funkce $F(s)$ je analytická kromě konečného počtu pólů uvnitř křivky c , a jestliže tato funkce nemá nuly ani póly na křivce c , pak změna argumentu v rovině $F(s)$ je rovna

$$\Delta\Phi = \text{Arg}\{F(s)\} = 2\pi\Omega = 2\pi(N - P), \quad (4.4 - 5)$$

kde je N počet **nul** komplexní funkce $F(s)$ ležící uvnitř křivky c
 P počet **pólů** komplexní funkce $F(s)$ ležící uvnitř křivky c
 Ω počet oběhů vektoru $|F(s)|_{s=c}$ kolem počátku v komplexní rovině $F(s)$. Orientaci oběhů kolem počátku bereme ve stejném smyslu jako u křivky c v rovině s .

Aplikaci Cauchyho principu argumentu ukážeme na následujícím příkladě.

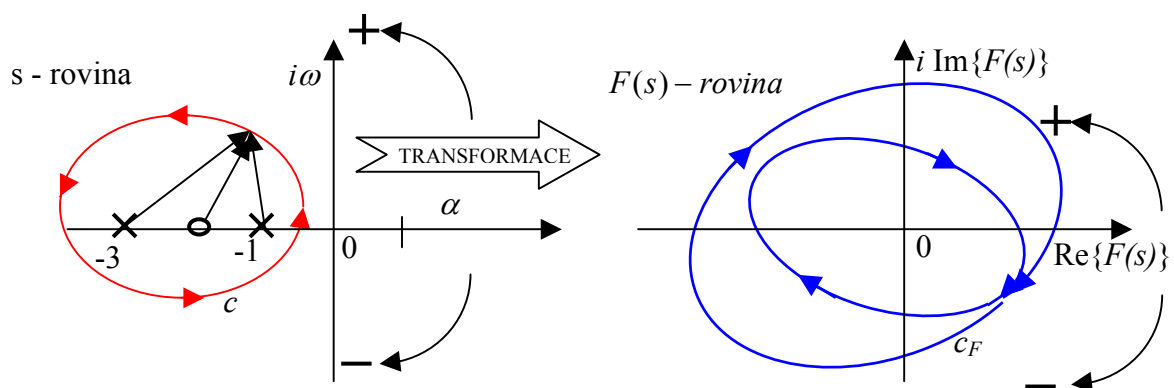
Příklad 4.4.1

Uvažujme obrazový přenos $F(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+3)}$.

Funkce $F(s)$ má tři póly ($s_1 = s_2 = -1$; $s_3 = -3$) a nulu $s_{B1} = -2$, které jsou zakresleny v s -rovině viz obr.4.4.2a. Zvolíme libovolnou kladně orientovanou křivku c tak, aby obsahovala všechny nuly a póly. Pak transformací této křivky do $F(s)$ - roviny obrazového přenosu bude definována křivka c_F , jejíž počet oběhů bude kolem počátku $F(s)$ - roviny je roven

$$\Omega = N - P \rightarrow \text{Arg}\{F(s)\} = 2\pi(1 - 3) = -2\pi \cdot 2.$$

Počet oběhů vektoru $|F(s)|_{s=c}$ okolo počátku $F(s)$ - roviny je roven 2 ale pozor, v záporném smyslu viz obr. 4.4.2b.

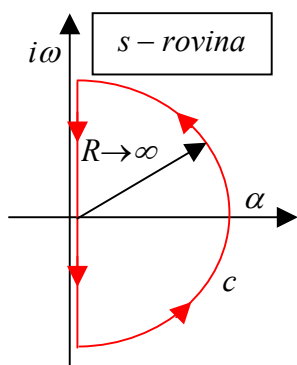


Obr.4.4.2a Rovina s : póly, nuly a uzavřená křivka c , obsahující póly a nuly

Obr.4.4.2b $F(s)$ - rovina, transformovaná křivka c na křivku c_F

Konec příkladu 4.4.1

Nyquist objevil, jak využít Cauchyho principu argumentu pro určení podmínek stability. Podle věty o stabilitě uzavřeného obvodu nesmí nuly výrazu $\{1 + F_0(s)\}$ ležet v pravé části s -roviny.



Obr.4.4.3 Uzavřená křivka c zahrnující celou pravou polorovinu

části s -roviny. Zvolíme-li kladně orientovanou křivku c tak, že bude obsahovat celou pravou polorovinu a žádný pól ani nula nebudou na ni ležet, pak můžeme aplikovat Cauchyho princip argumentu a získat podmínky, za kterých bude uzavřený obvod stabilní viz obr. 4.4.3.

Pro konstrukci budeme předpokládat, že na imaginární ose neleží žádný pól ani nula, pak kladně orientovanou křivku c tvoří:

- orientovaná přímka $s = i\omega$, která leží na imaginární ose, přičemž se ω mění od $+\infty$ do $-\infty$,
- oblouk, který uzavírá křivku c v kladném smyslu o poloměru $R \rightarrow \infty$.

Pro takto zvolenou uzavřenou křivku pak můžeme aplikovat Cauchyho princip argumentu. Aby uzavřený obvod byl stabilní, musí podle věty o stabilitě uzavřeného obvodu být počet nul N_p výrazu $\{1 + F_0(s)\}$ v pravé polorovině roven nule. Podmínku stability získáme ve tvaru

$$\Delta\Phi = \text{Arg}\{1 + F_0(s)\} = 2\pi(N_p - P_p) = -2\pi \cdot P_p; \quad N_p = 0, \quad (4.4 - 6)$$

kde je P_p počet pólů výrazu $1 + F_0(s)$ ležící v pravé části s -roviny,

N_p počet nul výrazu $1 + F_0(s)$ ležící v pravé části s -roviny, který musí být roven nule, aby uzavřený obvod byl stabilní.

Křivka c je transformována funkcí $\{1 + F_0(s)\}$ do komplexní roviny $1 + F_0(s)$. Hlavní výhodou Nyquistova kritéria je, že autor navrhl křivku c tak, aby transformace jejich jednotlivých částí byly části frekvenční charakteristiky otevřeného obvodu. Takto sestavená uzavřená křivka se označuje jako Nyquistova cesta (*Nyquist path*) viz. obr. 4.4.4. Předpokládejme, že přenos otevřené smyčky $F_0(s)$ má na imaginární ose pouze pól $s = 0$. Pak Nyquistova cesta se skládá ze čtyř částí.

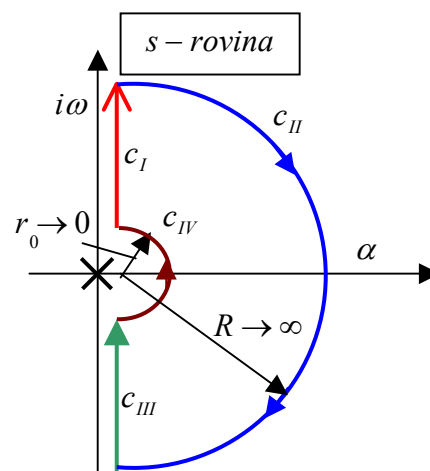
Část c_I : tvoří ji přímka $s = i\omega$ pro ω měnící se od 0_+ do ∞ .

Část c_{II} : tvoří ji oblouk $s = R \cdot \exp(i\varphi)$, $R \rightarrow \infty$ a úhel φ se mění od $\pi/2$ do $-\pi/2$.

Část c_{III} : tvoří ji přímka $s = -i\omega$ pro ω měnící se od $-\infty$ do 0_+ .

Část c_{IV} : tvoří ji oblouk $s = r_0 \cdot \exp(i\varphi)$, $r_0 \rightarrow 0$ a úhel φ se mění od $-\pi/2$ do $\pi/2$.

Poznámka: Tímto obloukem se pól $s = 0$ zahrne do levé části s -roviny.



Obr.4.4.4 Nyquistova cesta

Pro Nyquistovu cestu c , která je záporně orientovaná, dostaneme Nyquistovu podmínku stability ve tvaru

$$\text{Arg}\{1 + F_0(s)\} = -2\pi(N_p - P_p) = +2\pi \cdot P_p, \quad (4.4 - 7)$$

Můžeme konstatovat, že uzavřený regulační obvod bude stabilní, jestliže počet oběhů kolem počátku komplexní roviny $\{1 + F_0(s)\}$ v kladném smyslu je právě roven počtu pólů P_p otevřeného obvodu $F_0(s)$, které leží v pravé části s -roviny.

Uzavřená křivka c_F , která odpovídá transformaci Nyquistovy cesty do roviny $\{1 + F_0(s)\}$, se v anglosaské literatuře označuje jako „Nyquist plot“, budeme označovat jako **Nyquistovu křivku-trajektorii**.

Nyní provedeme rozbor roviny $\{1 + F_0(s)\}$. Jednoduchou úpravou můžeme psát

$$\text{Arg}\{1 + F_0(s)\} = -2\pi(N_p - P_p) = +2\pi \cdot P_p, \quad (4.4 - 8)$$

Ze vztahu (4.4 - 8) je zřejmý vztah mezi rovinou $F_0(s)$ (rovina přenosu otevřeného obvodu) a mezi rovinou $\{1 + F_0(s)\}$ (jmenovatele uzavřeného obvodu) a z toho plyne:

- 1) Všechny transformace je možno provádět v rovině $F_0(s)$ (rovině přenosu otevřeného obvodu) viz. obr.4.4.5
- 2) Za počátek souřadnic $\{1 + F_0(s)\}$ je možno vzít bod -1 v rovině $F_0(s)$.
- 3) Počet oběhů vektoru $|\{1 + F_0(s)\}|_{s=c}$ okolo počátku $\{1 + F_0(s)\}$ je roven počtu oběhů vektoru $|F_0(s)|_{s=c}$ okolo bodu -1, který se označuje jako **kritický bod**.

Na obr. 4.4.5a je zobrazena Nyquistova cesta pro přenos otevřené smyčky, který nemá pól na imaginární ose. Nyquistovu cestu tvoří tři úseky: c_I, c_{II}, c_{III} , kterým odpovídají v $F_0(s)$ -rovině úseky c_{N1}, c_{N2}, c_{N3} viz obr. 4.4.5b.

- 1) Úsek c_I : $s = i\omega$, ω se mění od 0 do ∞ .

V $F_0(s)$ -rovině ji odpovídá **větev frekvenční charakteristiky otevřeného obvodu** pro kladná ω , $c_{N1} = F_0(i\omega)$. (4.4 - 9a)

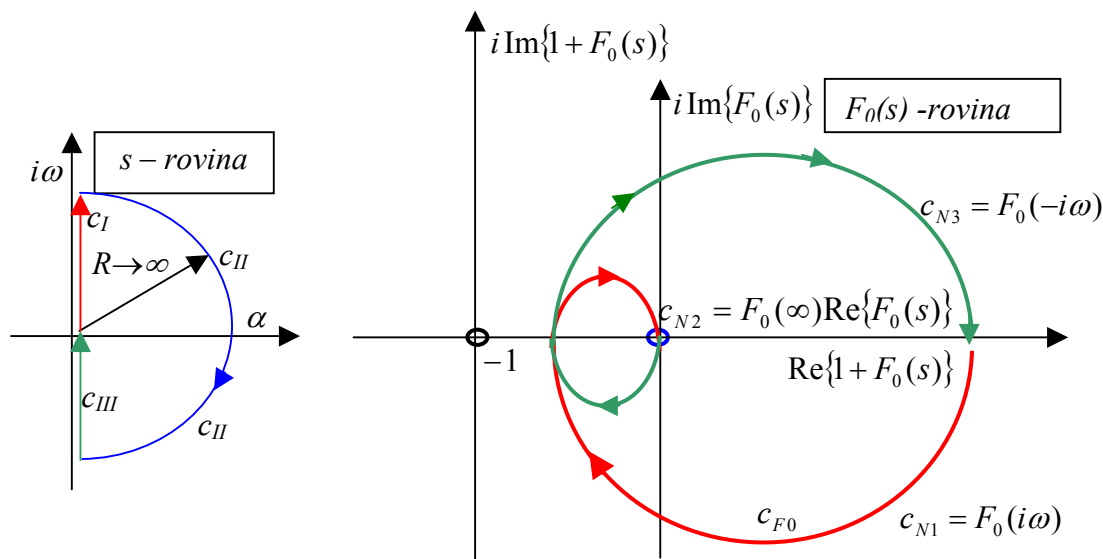
- 2) Úsek c_{II} : $s = R \cdot \exp(i\varphi)$, $R \rightarrow \infty$.

V $F_0(s)$ -rovině tomuto oblouku odpovídá bod

$$c_{N2} = F_0(\infty). \quad (4.4 - 9b)$$

- 3) Úsek c_{III} : $s = i\omega$, ω se mění od $-\infty$ do 0.

V $F_0(s)$ -rovině ji odpovídá **větev frekvenční charakteristiky otevřeného obvodu** pro záporná ω (frekvenční charakteristika, která je zrcadlově symetrická kolem reálné osy, $c_{N3} = F_0(-i\omega)$. (4.4 - 9c)



Obr.4.4.5a Nyquistova cesta

Obr.4.4.5b Nyquistova křivka

Nyquistovo kritérium stability můžeme formulovat do tvaru:

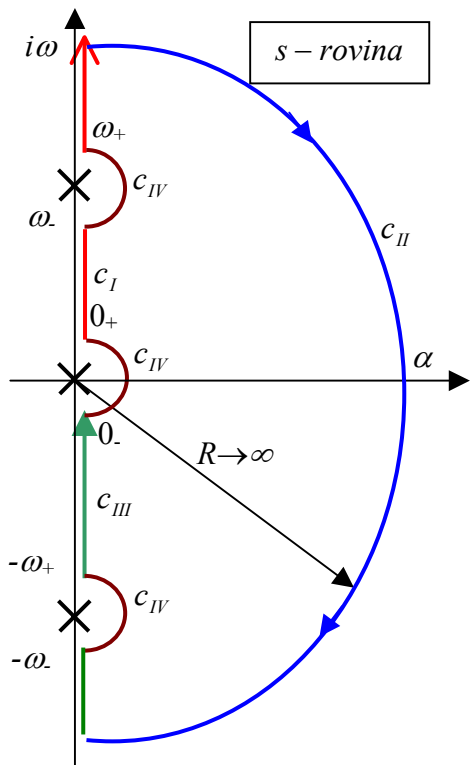
Uzavřený regulační obvod bude stabilní, jestliže počet oběhů kolem bodu -1 (**kritického bodu**) v rovině $\{F_0(s)\}$ v kladném smyslu je právě roven počtu pólů P_p otevřeného obvodu $F_0(s)$, které leží v pravé části s -roviny uvnitř záporně orientovaná uzavřené křivky c (Nyquistovy cesty). Což odpovídá rovnosti

$$\Delta\Phi = \text{Arg}\{F_0(s)\} = \text{Arg}\{[1 + F_0(s)] - 1\} = +2\pi \cdot P_p, \quad (4.4 - 10)$$

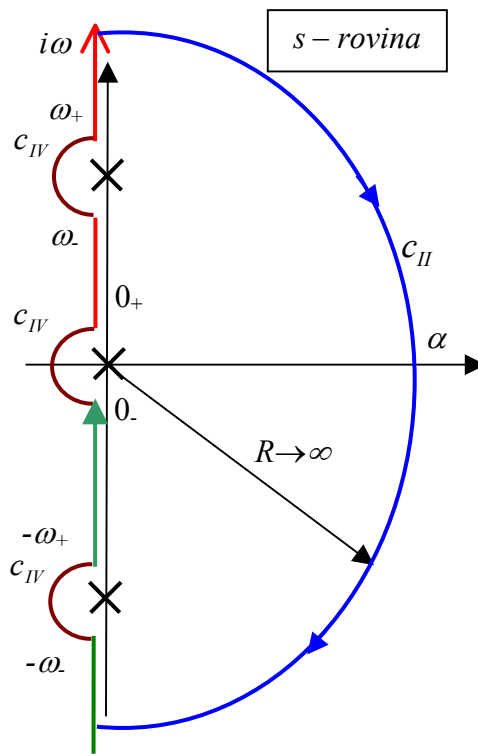
Při praktickém použití Nyquistova kritéria určíme nejdřív Nyquistovu podmínku stability (4.4 – 7) a pak určíme skutečný počet oběhů kolem kritického bodu. Je-li podmínka splněna, uzavřený obvod je stabilní není-li splněna, je nestabilní. Pokud póly otevřeného obvodu neleží na imaginární ose, je Nyquistova křivka (v rovině $F_0(s)$) zřejmá a je dána vztahy (4.4 – 9a,b,c). Pokud póly leží na imaginární ose je třeba tyto případy vhodně ošetřit. Tento postup bude ukázán v následující kapitole. (Z podmínky stability vyplynulo, že N_p musí být nula).

4.4.2 Kontrola skutečného počtu oběhů kritického bodu

Leží-li póly otevřeného obvodu na imaginární ose, pak Nyquistova cesta se volí tak, že tyto póly se mohou zahrnout do levé nebo pravé části s -roviny viz obr. 4.4.6a,b. Na obr.4.4.6a

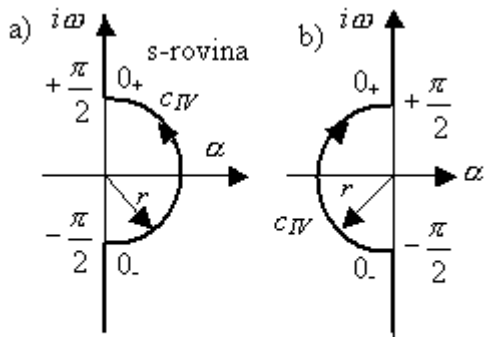


Obr.4.4.6a Póly zahrnuty do $R \rightarrow \infty$ levé s-poloroviny



Obr.4.4.6b Póly zahrnuty do pravé s-poloroviny

jsou póly s nulovou reálnou částí zahrnovány do stabilní levé části s-roviny a jsou tedy pokládány za stabilní. Na obr.4.4.6b jsou zahrnuty do pravé části s-roviny a jsou tedy pokládány za nestabilní. Protože Nyquistova křivka musí být i v rovině $F_0(s)$ spojitá, je třeba najít propojení mezi jednotlivými částmi Nyquistovy křivky. K nespojitostem dochází, leží-li póly na imaginární ose. Jedná se o pól otevřeného obvodu $s = 0$ násobnosti r viz. obr. 4.4.6a,b nebo o ryze imaginární komplexně sdružené póly $s_{1,2} = \pm i\omega$. Výklad omezíme na pól $s = 0$ násobnosti r otevřeného obvodu. Jak již bylo řečeno, je možno volbou Nyquistovy cesty c_{IV} tento pól zařadit do levé nebo pravé poloroviny.



Obr.4.4.7 Ošetření pólů ležících na imaginární ose

a) Zahrneme-li nulový pól násobnosti r do levé stabilní poloroviny viz obr.4.4.7a, pak Nyquistovu cestu c_{IV} vyjádříme ve tvaru

$$s = \lim_{r \rightarrow 0} r_0 \cdot e^{i\varphi}, \text{ pro } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad (1)$$

přičemž se φ mění v kladném smyslu.

Transformační funkcí Nyquistovy cesty c_{IV} je přenos otevřeného obvodu $F_0(s)$, který má obecně tvar

$$F_0(s) = \frac{\beta_m s^m + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^r [\alpha_n s^n + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0]} \quad (2)$$

Dosadíme-li za proměnnou s rovnost $s = r_0 \cdot e^{i\varphi}$ do (2) pak dostaneme

$$F_0(s) = \frac{\beta_n (r_0 \cdot e^{i\varphi})^m + \dots + \beta_1 (r_0 \cdot e^{i\varphi}) + \beta_0}{(r_0 \cdot e^{i\varphi})^r [\alpha_n (r_0 \cdot e^{i\varphi})^n + \dots + \alpha_1 (r_0 \cdot e^{i\varphi}) + \alpha_0]} \quad (3)$$

Přejdeme-li k limitě $s \rightarrow 0$ pak dostaneme

$$\lim_{s \rightarrow 0} F_0(s) = \lim_{r_0 \rightarrow 0} F_0(r_0 \cdot e^{i\varphi}) = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{\beta_0}{\alpha_0 (r_0)^r} e^{ir\varphi} \quad (4)$$

Absolutní hodnota (modul) je roven:

$$\rho = \lim_{r_0 \rightarrow 0} |F_0(r_0 \cdot e^{i\varphi})| = \infty \quad (4.4 - 11a)$$

Změna fáze (argumentu) je rovna:

$$\Delta\Phi = \text{Arg} \left\{ \lim_{r_0 \rightarrow 0} F_0(r_0 \cdot e^{i\varphi}) \right\} = -r \cdot \varphi \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = -r \cdot \pi \quad (4.4 - 11b)$$

Rovnost (4.4 - 10,11) můžeme vyjádřit slovy:

Zahrneme-li pól $s = 0$ násobnosti r do levé poloroviny, pak propojení konce frekvenční charakteristiky $\lim_{\omega \rightarrow 0^-} F_0(i\omega)$ a konce $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} F_0(i\omega)$ se provede obloukem o poloměru $\rho = \lim_{r_0 \rightarrow 0} |F_0(r_0 \cdot e^{i\varphi})| = \infty$ a úhlem $\Delta\Phi = -r \cdot \pi$ (tedy záporně orientovaným obloukem).

b) Zahrneme-li pól $s = 0$ násobnosti r do pravé poloroviny viz obr.4.4.7 (bude pokládán za nestabilní pól), je možno stejným způsobem ukázat, $\rho \rightarrow \infty$ a $\Delta\Phi = r \cdot \pi$. Slovy

Zahrneme-li pól $s = 0$ násobnosti r do pravé poloroviny, pak propojení konce frekvenční charakteristiky $\lim_{\omega \rightarrow 0^-} F_0(i\omega)$ a konce $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} F_0(i\omega)$ se provede obloukem o poloměru $\rho = \lim_{r_0 \rightarrow 0} |F_0(r_0 \cdot e^{i\varphi})| = \infty$ a úhlem $\Delta\Phi = r \cdot \pi$ (tedy kladně orientovaným obloukem).

Postup při aplikaci Nyquistova kriteria je možno shrnout do těchto bodů:

- 1) Pro zadaný přenos soustavy a regulátoru se sestaví přenos otevřené smyčky $F_0(s) = F(s) \cdot R(s)$.
- 2) Určí se počet pólů otevřeného obvodu, které leží v pravé části s – roviny a počet pólů, které leží na imaginární ose.
- 3) Navrhne se Nyquistova cesta a póly které leží na imaginární ose se zahrnou buď do

- a) do levé poloroviny, pak se počet pólů v pravé části poloroviny, které byly určeny podle bodu 2), nemění
- b) do pravé poloroviny, pak se logicky musí o tyto póly zvýšit počet pólů P_p , které leží v pravé polorovině a jejich počet byl určen podle 2).
- 4) Určí se Nyquistova podmínka stability $\text{Arg}\{1 + F_0(s)\} = +2\pi \cdot P_p$,
- 5) Nakreslí se Nyquistova trajektorie
- I. Úsek $c_I : s = i\omega$, ω se mění od 0 do ∞ ; v rovině $F_0(s)$ ji odpovídá **větev frek. charakteristiky otevřeného obvodu** pro kladná ω ; $c_{NI} = F_0(i\omega)$.
- II. Úsek $c_{II} : s = R \cdot \exp(i\varphi)$, $R \rightarrow \infty$; v $F_0(s)$ - rovině tomuto oblouku odpovídá bod $c_{NII} = F_0(\infty)$.
- III. Úsek $c_{III} : s = i\omega$, ω se mění od 0 do $-\infty$; v rovině $F_0(s)$ ji odpovídá **větev frek. charakteristiky otevřeného obvodu** pro záporná ω ; $c_{NIII} = F_0(-i\omega)$.
- IV. Úsek c_{IV} : v rovině $F_0(s)$ ji odpovídá oblouk o poloměru $\rho \rightarrow \infty$ přičemž konec frekvenční charak. $\lim_{\omega \rightarrow 0^-} F_0(i\omega)$ a $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} F_0(i\omega)$ se propojí obloukem
- a) $\Delta\Phi = -r \cdot \pi$ je-li pól zahrnut do levé poloroviny
- b) $\Delta\Phi = +r \cdot \pi$ je-li pól zahrnut do pravé poloroviny
- 6) Určí se počet oběhů kolem **kritického bodu -1**. (Pomocí **Nyquistovy přímky**)

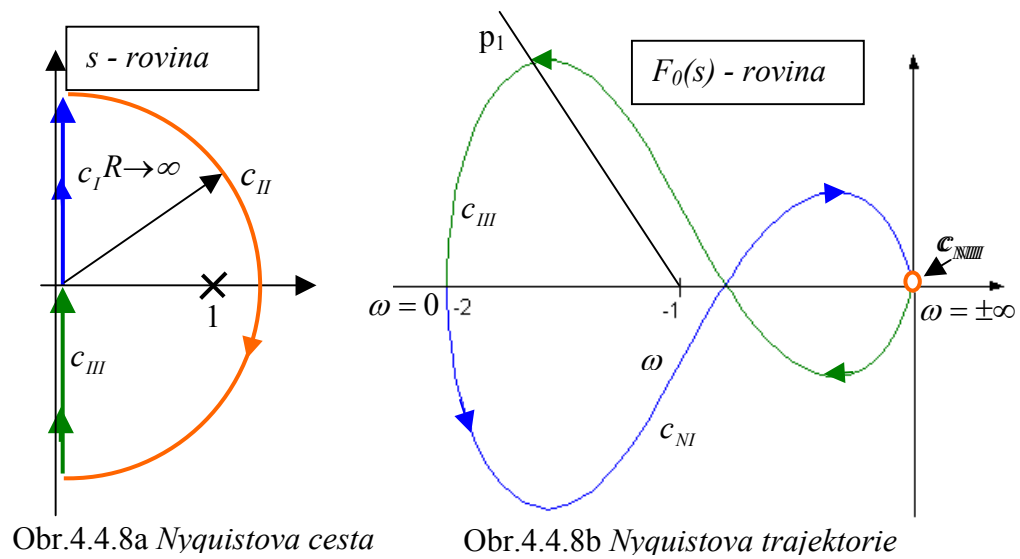
Na následujících příkladech bude demonstrováno použití Nyquistova kritéria stability, určení podmínek stability, volba Nyquistovy cesty včetně konstrukce Nyquistovy trajektorie.

Příklad 4.4.2

Přenos otevřeného obvodu je $F_0(s) = \frac{2}{(s^2 + 2s + 2)(s - 0,5)}$.

Rozhodněte o stabilitě!

- Řešení: 1) Přenos otevřeného obvodu je zadán
- 2) Jeden pól $s_1 = 0,5$ leží v pravé části roviny, pól $s_{2,3} = -1 \pm i$ leží v levé části. Žádný pól neleží na imaginární ose.
- 3) Nyquistova cesta je na obr.4.4.8a, Počet pólů ležících v pravé části s -roviny $P_p = 1$.
- 4) Nyquistova podmínka stability je $\text{Arg}\{1 + F_0(s)\} = +2\pi \cdot P_p = 2\pi$.
- 5) Nyquistova trajektorie v rovině $F_0(s)$ je na obr.4.4.8b.
- 6) Na přímce p_1 působí pouze jedna šipka v klaném směru, takže počet oběhů je +1.



Obr.4.4.8a Nyquistova cesta

Obr.4.4.8b Nyquistova trajektorie

Závěr: Skutečný počet oběhů je roven 1, což odpovídá $\Delta\Phi = \text{Arg}\{F_0(s)\} = +2\pi \cdot P_p = 2\pi$, takže je splněna Nyquistova podmínka stability a uzavřený obvod je proto stabilní.

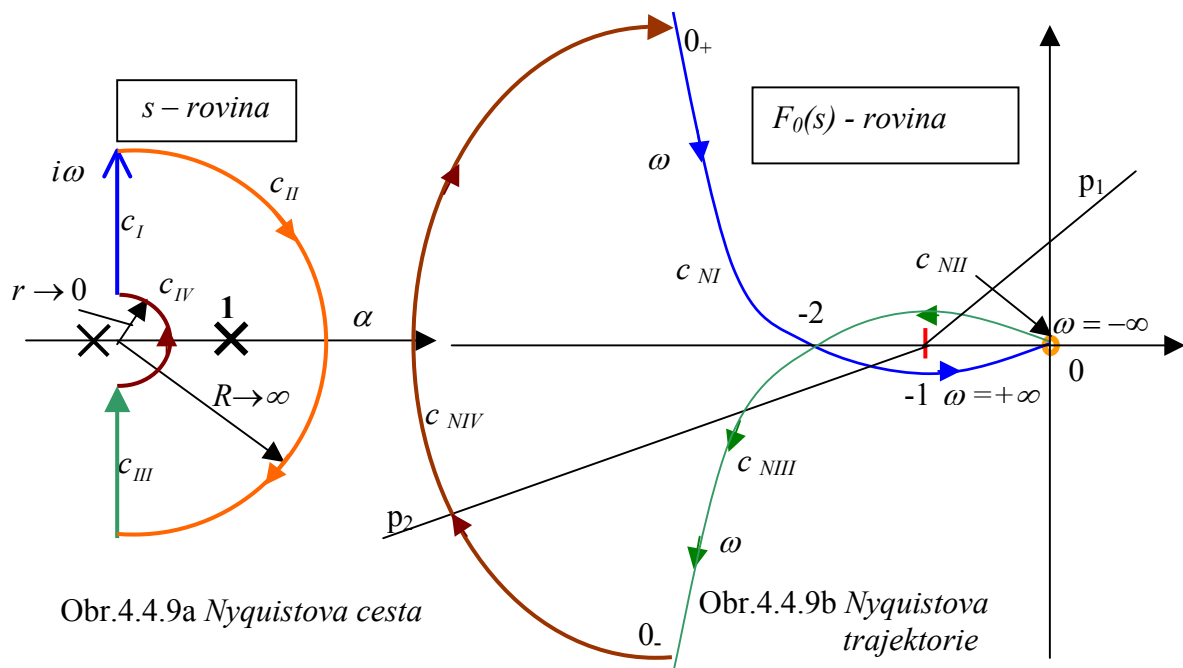
Konec příkladu 4.4.2

Příklad 4.4.3

Přenos otevřeného obvodu je $F_0(s) = \frac{1+2s}{s(s-1)}$. Rozhodněte o stabilitě uzavřeného obvodu.

uzavřeného obvodu.

- Řešení: 1) Přenos otevřeného obvodu je zadán
 2) Jeden pól $s_1 = 1$ leží v pravé části roviny, pól $s_2 = 0$ leží na imaginární ose.
 3) Nulový pól $s_2 = 0$ zahrneme do levé poloroviny viz obr.4.4.9a. $P_p = 1$.
 4) Nyquistova podmínka stability je $\text{Arg}\{1 + F_0(s)\} = +2\pi \cdot P_p = 2\pi$.



Obr.4.4.9a Nyquistova cesta

Obr.4.4.9b Nyquistova trajektorie

5) Nyquistova trajektorie v rovině $F_0(s)$ je na obr.4.4.9b.

6) Na přímce p_1 působí pouze jedna šipka v klaném směru, takže počet oběhů je 1. Na přímce p_2 působí modrá a zelená šipka v kladném směru, hnědá šipka v záporném směru, takže celkový počet oběhů je zase +1.

Závěr: Skutečný počet oběhů je roven 1, což odpovídá takže je splněna Nyquistova podmínka stability a uzavřený obvod je proto stabilní.

Konec příkladu 4.4.3

Příklad 4.4.4

Přenos otevřeného obvodu je $F_0(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s + 2)}$.

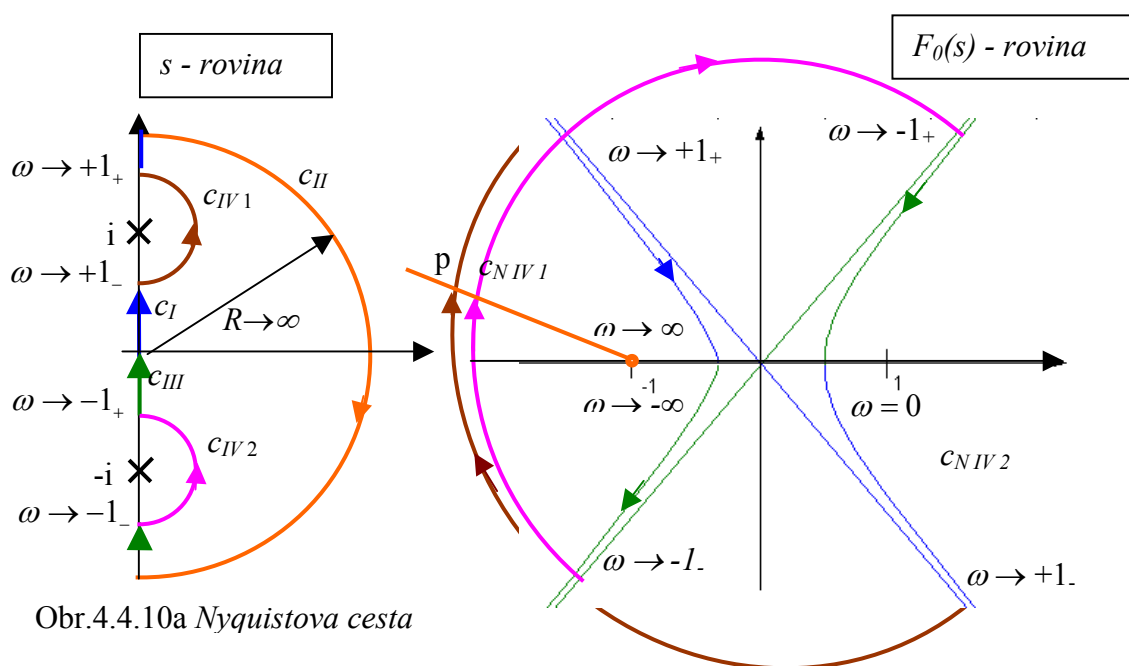
Rozhodněte o stabilitě

Řešení: 1) Přenos otevřeného obvodu je zadán

2) Žádný pól neleží v pravé části roviny, pól $s_3 = -2$ leží v levé části. Póly $s_{12} = \pm i$ leží na imaginární ose.

3) Nyquistova cesta je na obr.4.4.10a, počet pólů ležících v pravé části s -roviny $P_p = 0$.

4) Nyquistova podmínka stability je $\text{Arg}\{1 + F_0(s)\} = +2\pi \cdot P_p = 0$.



Obr.4.4.10a Nyquistova cesta

Obr.4.4.10b Nyquistova trajektorie

5) Nyquistova trajektorie v rovině $F_0(s)$ je na obr.4.4.10b.

6) Na přímku p pouze dvě šipky v záporném směru, takže počet oběhů je 2.

Závěr: Skutečný počet oběhů je roven 2 v záporném směru, takže není splněna Nyquistova podmínka stability a uzavřený obvod je proto nestabilní. Lehce se o tom přesvědčíme pomocí Hurwitzova kritéria. Vypočteme

$$1 + F_0(s) = 1 + \frac{1}{(s^2 + 1)(s + 2)} = \frac{(s^2 + 1)(s + 2) + 1}{(s^2 + 1)(s + 2)} = \frac{s^3 + 2s^2 + s + 3}{(s^2 + 1)(s + 2)},$$

Hurwitzova matice sestavená z polynomu čitatele, který je roven charakteristickému polynomu uzavřeného obvodu a je rovna

$$H_C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1.$$

Konec příkladu 4.4.4

Determinant 2. řádu na hlavní diagonále je záporný, tedy soustava je nestabilní.

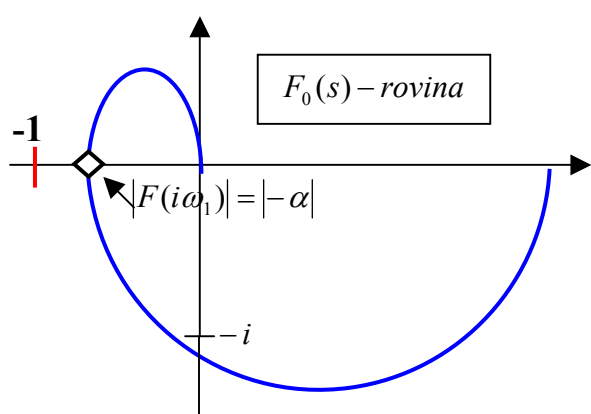
4.4.3 Relativní stabilita, fázová a amplitudová bezpečnost

Z hlediska posuzování stability je významný **kritický bod -1**, protože tímto bodem je definována mez stability a k tomuto bodu se kontroluje počet oběhů. Intuitivně cítíme, že vzdálenost mezi průsečíkem frekvenční charakteristiky s reálnou osou a bodem -1, je mírou stability uzavřeného obvodu. Proto byly zavedeny a definovány míry stability: **amplitudová a fázová bezpečnost** (*Gain margin, Phase margin*) viz. obr. 4.4.11.

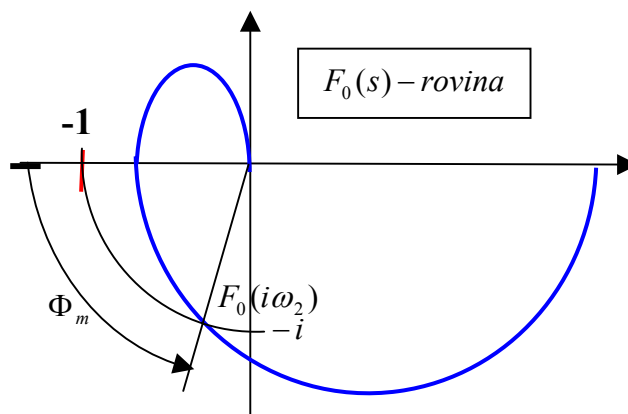
Amplitudová bezpečnost GM Necht' frekvence ω_1 určuje průsečík frekvenční charakteristiky s reálnou osou ($\text{Im}\{F(i\omega_1)\} = 0$) a amplitudu $|F_0(i\omega_1)| = -\alpha$ viz. obr. 4.4.10a, pak amplitudová bezpečnost se můžeme vyjádřit ve tvaru

$$K_{GM} = GM = \frac{1}{|F_0(i\omega_1)|} = \frac{1}{\alpha}, \quad (4.4 - 12)$$

nebo v decibelech viz. obr.4.4.10 $GM|_{dB} = 20 \cdot \log \frac{1}{|F_0(i\omega_1)|} = -20 \log |F_0(i\omega_1)|$. (4.4 - 13)



Obr.4.4.10a Amplitudová bezpečnost

Obr.4.4.10b Fázová bezpečnost Φ_m

Amplitudová bezpečnost tedy podává informaci kolikrát je možno zvýšit zesílení ve zpětné vazbě, aby uzavřený obvod byl na mezi stability. Tento koeficient je označen jako K_{GM} a je podle (4.4 - 12) roven

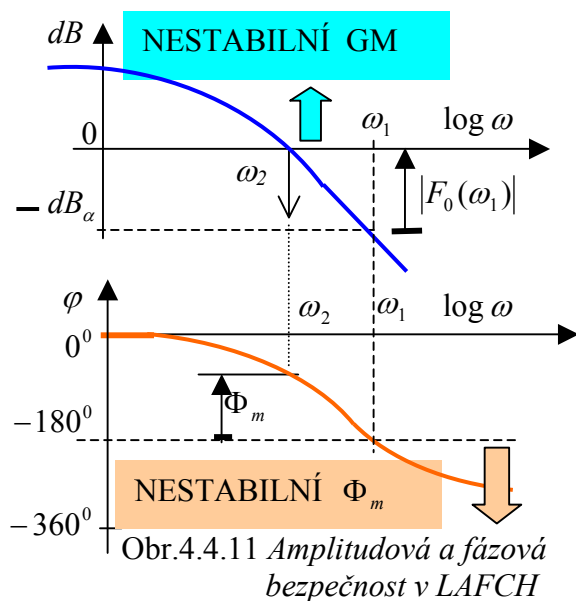
$$K_{GM} = \frac{1}{\alpha}.$$

Fázová bezpečnost Φ_m Necht' frekvence ω_2 určuje průsečík frekvenční charakteristiky s jednotkovou kružnicí (amplituda $|F_0(i\omega_2)| = 1$). Pak fázová bezpečnost Φ_m je úhel, který se měří od záporné části reálné osy v kladném smyslu k průvodiči průsečíku jednotkové kružnice s frekvenční charakteristikou viz obr. 4.4.10b.

$$\Phi_m = \text{Arg}\{F_0(i\omega_2)\} - 180^\circ$$

Pro logaritmickou amplitudovou a fázovou charakteristiku je fázová bezpečnost Φ_m definována na obr. 4.4.11, kterou je také možno přímo odečíst ze známého grafu logaritmické amplitudové a fázové charakteristiky.

Na tomto obrázku je také názorně vidět, vztah mezi amplitudovou a fázovou bezpečností a rozdíl mezi frekvencemi ω_1 a ω_2 .



Poznámka:

Uzavřený regulační obvod bude stabilní jen tehdy, bude-li amplitudová bezpečnost GM v decibelech záporná viz obr.4.4.11. Měří se od nulové osy (0-dB).

Podobně pro fázovou bezpečnost bezpečnost platí, že uzavřený obvod je nestabilní, jestliže Φ_m je záporná (je pod osou -180°) viz. obr. 4.4.11.

Význam fázové bezpečnosti není jen v kontrole stability ale stává se významným prvkem při návrhu regulátorů ve frekvenční oblasti. Zadání požadované fázové bezpečnosti je například jedním krokem při návrhu regulátorů. Tato problematika je probírána v kap. 5.5 dostatečně podrobně.

4. LITERATURA

- [1] Nise, S.N.: Control Systems. John Wiley & Sons, New York, 2000.
- [2] Phillips, Ch., L.,-Harbor R.,D. : Feedback Control Systems. Prentice Hall, 2000.
- [3] Lurie, B., J.,-Engright, J., P.: Clasicl Feedback Control. With Matlab. Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 2000.
- [4] Evans, W., R.: Graphical Analysis of Control Systems. AIEE Transactions, vol. 67, 1948, pp 547-551.
- [5] Evans, W., R.: Control Systems Synthesis by Root Locus Method. AIEE Transactions, vol. 69, 1950, pp 66-69.
- [6] Bode, H.: MATLAB in der Regelungstechnik.Analyse linearer Systeme. B.G.Teubner Stuttgart,Leipzig, 1998.
- [7] Grace, A.-Laub, J. A.-Little, J. N.-Thompson, C. M.: Control System Toolbox. For Use with MATLAB. User's Guide. The Math Works,Inc. 1995.