Ilustratívne príklady pre prácu s polynómami

polynómy
základné vlastnosti
násobenie polynómov
delenie polynómov
základne funkcie pre prácu s polynómami – hľadanie koreňov, hodnota polynómu, derivácia, parciálne zlomky

- ⇨ Polynóm je súčet alebo rozdiel jednočlenov.
- ⇨ Je to výraz v tvare $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_nx^0$, kde $a_n \neq 0$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sa nazývajú koeficienty polynómu

Základné vlastnosti polynómov

a. Dva polynómy sa rovnajú, ak sú rovnakého stupňa a majú rovnaké koeficienty
b. Dva polynómy sa rovnajú, ak majú rovnaké hodnoty pre každé x.
c. Nech polynómy $P_n(x)$ a $Q_m(x)$; kde $Q_m(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x^1 + b_n$, kde $n \geq m$ a nech $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ sú rôzneho stupňa, potom existujú dva jednoznačne určené polynómy $R(x)$ a $Z(x)$, pre ktoré platí $P_n(x) = Q_m(x) * R(x) + Z(x)$
Polynóm $R(x)$ sa nazýva čiastočný podiel a polynóm $Z(x)$ sa nazýva zvyšok po delení. Stupeň polynómu $Z(x)$ je vždy menší ako stupeň polynómu $R(x)$

V programovom prostredí MATLAB je polynóm zadávaný ako vektor.

*Funkcia **conv** - násobenie polynómov*

- ⇨ Pri násobení polynómov platí pravidlo každý s každým prvkom polynómu

$$P_n(x) * Q_m(x) =$$
$$= (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x^1 + a_n) * (b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x^1 + b_m) =$$
$$= a_0x^n * b_0x^m + a_0x^n * b_1x^{m-1} + \cdots + a_0x^n * b_m + a_1x^{n-1} * b_0x^m + \cdots$$

- ⇨ Pre výpočet v programovom prostredí MATLAB použijeme funkciu: *výsledok = **conv(**P,Q**)***

PRÍKLAD 1

- ⇨ Vynásobte dva polynómy $P(x) = x^3 + 4x^2 + 3$, $Q(x) = 8x^2 - 2$

$P(x) * Q(x) = (x^3 + 4x^2 + 3) * (8x^2 - 2) = 8x^5 + 32x^4 + 24x^2 - x^4 - 4x^3 - 3x =$
$= 8x^5 + 31x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 3x$

```
>> P=[1 4 0 3];
>> Q=[8 -1 0];
>> vysledok = conv(P,Q)

vysledok =

    8   31   -4   24   -3    0
```

Ak by sme pre výpočet použili miesto funkcie ***conv*** iba * vyskočí chyba, pretože MATLAB bude počítať s týmito dvoma vektormi ako s maticami a nie polynómami

```
>> vysledok = P*Q
??? Error using ==> mtimes
Inner matrix dimensions must agree.
```

*Funkcia **deconv** - delenie polynómu polynómom*

- Delenie polynómov v programovom prostredí MATLAB vieme uskutočniť pomocou funkcie [*výsledok,zvyšok*]= ***deconv(****a,b****)***

Delenie si ukážeme na nasledujúcom príklade:

PRÍKLAD 2

Numericky vypočítajte a následne overte v programovom prostredí MATLAB.

$$(x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 3x^1 + 5x^0) : (x^2 - 3x^1 + 5x^0) = x^2 + x^0$$

$$\underline{-(x^4 - 3x^3 + 5x^2)}$$

$$0x^4 + 0x^3 + x^2 - 3x^1 + 5x^0$$

$$\underline{-(x^2 - 3x^1 + 5x^0)}$$

```
>> P=[1 -3 6 -3 5];
>> Q=[1 -3 5];
>> [vysledok,zvysok] = deconv(P,Q)

vysledok =

    1    0    1


zvysok =

    0    0    0    0    0
```

PRÍKLAD 3

Numericky vypočítajte a následne overte v programovom prostredí MATLAB.

$$(x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x^2 - 3x + 2) = x + 1 + \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$$

$$\underline{-(x^3 - 3x^2 + 2x)}$$

$$x^2 - x - 1$$

$$\underline{-(x^2 - 3x + 2)}$$

$$2x - 3$$

```
>> P=[1 -2 1 -1];
>> Q=[1 -3 2];
>> [vysledok, zvysok] = deconv(P,Q)

vysledok =

    1    1


zvysok =

    0    0    2   -3
```

*Funkcia **roots** – hľadanie koreňov polynómu*

- Korene polynómu sa používajú dosť často, napríklad keď potrebujeme rozdeliť racionálnu funkciu na parciálne zlomky , pri výpočte diferenciálnych rovníc a pod.
- Na výpočet koreňov polynómu nám slúži funkcia *výsledok* = ***roots(****polynóm****)***

PRÍKLAD 4

Majme polynóm $P(x) = x^3 + 4\,x^2 + x - 6$, nájdite jeho korene.

```
>> koren = roots(P)

koren =

   -3.0000
   -2.0000
    1.0000
```

*Funkcia **poly** - tvorba polynómu z jeho koreňov*

- e to v podstate inverzná funkcia k funkcií pre výpočet koreňov, čiže nám zo stĺpcového vektoru vypočíta polynóm
- Na výpočet polynómu použijeme funkciu polynóm = **poly(**A**)** ,pričom A je stĺpcový vektor

PRÍKLAD 5

Obrátený príklad k predošlému príkladu: Nájdite taký polynóm aby mal tieto korene: -3, 1, -2

- skontrolovať si to vieme veľmi jednoducho a to vynásobením jednotlivých koreňov
  $P = (x+3) * (x-1) * (x+2) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

```
>> A=[-3;-2;1];
>> polynom = poly(A)

polynom =

     1     4     1    -6
```

*Funkcia **polyval** - hodnota polynómu*

- Hodnotu polynómu vypočítame ak za všetky neznáme x dosadíme konkrétne číslo
- Pre výpočet hodnoty polynómu použijeme príkaz *výsledok* = ***polyval(****polynóm, x****)***

PRÍKLAD 6

Vypočítajte a následne overte pomocou Matlab-u hodnotu polynómu

$P(x) = x^3 + 4\,x^2 + x - 6$ pre x=2

$P(x) = 2^3 + 4 * 2^2 + 2 - 6 = 20$

```
>> P=[1 4 1 -6];
>> vysledok = polyval(P,2)

vysledok =

    20
```

*Funkcia **polyder** - derivácia polynómu*

- Derivácia polynómu je jedna z najjednoduchších, keďže obsahuje iba členy x^a
- $(x^a)' = a * x^{a-1}$, pričom $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- Na deriváciu polynómu použijeme funkciu ***polyder*** , ktorá môže mať niekoľko zápisov a to:
    a. *výsledok* = ***polyder(****P****)*** derivácia polynómu P
    b. *výsledok* = ***polyder(****A,B****)*** alebo *výsledok* = ***polyder(conv(****A,B****))*** derivácia súčinu A*B
    c. *[Q,D]=**polyder(**B,A**)*** derivácia podielu B/A

PRÍKLAD 7

Vypočítajte deriváciu polynómu $P(x) = 9x^5 - 6x^3 + x^2 - 18$

$P(x)' = (9x^5 - 6x^3 + x^2 - 18)' = 45x^4 - 18x^2 + 2x$

```
>> P=[9  0 -6 1 0 -18];
>> vysledok = polyder(P)

vysledok =

   45     0   -18     2     0
```

PRÍKLAD 8

Vypočítajte deriváciu súčinu polynómov $A(x) = x^3 + 4x^2 + 3$ a $B(x) = 8x^2 - 2$

Pre výsledok súčinu týchto dvoch polynómov použijeme príklad 1, kde sme ich vynásobili

$$A(x) * B(x) = (x^3 + 4x^2 + 3) * (8x^2 - 2) = 8x^5 + 31x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 3x$$

A následne si tento výsledok zderivujeme

$$\big(A(x) * B(x)\big)' = (\,8x^5 + 31x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 3x)' =$$

$$= 40x^4 + 124x^3 - 12x^2 + 48x - 3$$

```
>> A=[1 4 0 3];
>> B=[8 0 -2];
>> vysledok = polyder(A,B)

vysledok =

    40   128    -6    32     0
```

funkcia $\boldsymbol{residue}$ – príklady na rozklad na parciálne zlomky

- Všeobecný tvar racionálnej funkcie je : $\boxed{R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m}}$, pričom $a_i, b_j \in R; \quad m, n \in Z; \quad a_0, b_0 \neq 0$
- Rozklad na parciálne zlomky je vyjadrenie racionálnej funkcie pomocou súčtu jednoduchších funkcií typu $\frac{A}{(x-\alpha)^k}; \frac{M(x)+N}{(x^2+px+q)^l}$
- Výpočet parciálnych zlomkov môžeme robiť niekoľkými metódami, napríklad dosadzovacou metódou, porovnávacou metódou alebo zakrývacou metódou ...
- Pre výpočet v programovom prostredí MATLAB použijeme príkaz *[R,P,K]=**residue(**b,a**)***, K je riadkový vektor do ktorého sa ukladajú celá časť po delení, zvyšok je uložený do premennej R, ktorá predstavuje stĺpcový vektor predstavujúci hodnoty A,B, ... ; P je taktiež stĺpcový vektor koreňov a K je riadkový vektor do ktorého sa ukladajú celá časť po delení

Jednotlivé metódy si ukážeme na príkladoch:

PRÍKLAD 9

- Rozložte funkciu $\frac{-x+10}{x^2-4}$ na parciálne zlomky
- $\frac{-x+10}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$

Porovnávacia metóda

$$-x + 10 = A(x + 2) + B(x - 2)$$

$$-x + 10 = Ax + 2A + Bx - 2B$$

$$-x + 10 = x(A + B) + 2A - 2B$$

$x^1: A + B = -1 \quad \Rightarrow \quad A = -1 - B \quad \Rightarrow \quad A = -1 + 3$

$$\underline{A = 2}$$

$x^0: 2A - 2B = 10 \quad \Rightarrow \quad 2(-1 - B) - 2B = 10$

$$-2 - 2B - 2B = 10$$

$$-4B = 12$$

$$\underline{B = -3}$$

A teraz dosadíme za A a B naše vypočítame výsledky $\frac{-x+10}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+2}$

Dosadzovacia metóda

$$-x + 10 = A(x + 2) + B(x - 2)$$

$$x = 2;\ -2 + 10 = A(2 + 2) + B(2 - 2)$$

$$8 = 4A$$

$$\underline{A = 2}$$

$$x = -2;\ 2 + 10 = A(-2 + 2) + B(-2 - 2)$$

$$12 = -4B$$

$$\underline{B = -3}$$

A teraz dosadíme za A a B naše vypočítame výsledky $\frac{-x+10}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+2}$

$$\frac{-x+10}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

<u>Zakrývacia metóda</u>

$$\frac{-x+10}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$\frac{-x+10}{\quad (x+2)} = \frac{}{x-2} + \frac{}{x+2}$ - zakryjeme si prvý koreň a miesto x dosadíme hodnotu koreňa, v našom prípade to bude x = 2 a vypočítame zvyšný zlomok $\frac{-2+10}{2+2} = 2$ a dostali sme prvú hodnotu, ktorá zodpovedá hodnote A.

To isté zopakujeme aj zo zakrytým druhým koreňom $\frac{-x+10}{(x-2)\quad} = \frac{2}{x-2} + \frac{}{x+2}$

$B = \frac{-(-2)+10}{-2-2} = -3$

Po dosadení A a B dostaneme rozklad na parciálne zlomky $\frac{-x+10}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x-2} + \frac{-3}{x+2}$

```
>> b=[-1 10];
>> a=[1 0 -4];
>> [R,P,K]=residue(b,a)

R =

     2
    -3


P =

    2.0000
   -2.0000


K =

     []
```