Fázové portréty nelineárnych dynamických systémov

Tutoriál k bakalárskej práci Modelovanie a analýza nelineárnych systémov s hybridnou dynamikou

<u>Úlohy:</u>

1. **Postup pre zostrojenie fázového portrétu pre autonómny lineárny dynamický systém (LDS)**
    a. **Analytické riešenie**
    b. **Algoritmické riešenie**
2. **Postup pre riešenie nelineárnych dynamických systémov metódou separácie premenných**
    a. **Analytické riešenie**
    b. **Algoritmické riešenie**
3. **Postup pre zostrojenie fázového portrétu pre nelineárny dynamický systém (NDS)**
    a. **Výpočet rovnovážnych stavov (RS) nelineárneho dynamického systému (NDS) na základe jeho prepisu do substitučného kanonického tvaru**
    b. **Určenie lineárnej aproximácie NDS vo vypočítaných RS**
    c. **Určenie typov RS a posúdenie ich stability v malom**
    d. **Fázový portrét pre NDS „Van der Pol oscilátor“**

Úloha č.1 : Postup pre zostrojenie fázového portrétu pre autonómny lineárny dynamický systém (LDS)

1.a. Analytické riešenie

Aby sme získali fázové trajektórie lineárneho systému 2. rádu zapísaného v tvare

$$\ddot{x}_1 - \boldsymbol{m}\dot{x}_1 - \boldsymbol{c}x_1 = 0$$

prepíšeme ho do **substitučného kanonického tvaru** :

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \boldsymbol{c}x_1 + \boldsymbol{m}x_2,$$

ktorý môžeme zapísať do podoby:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ c & d\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax}$$

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ c & d\end{bmatrix}$$

Následne charakteristická rovnica LDS má tvar:

$$\det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] = \det\begin{bmatrix} s & ; & -1\\ -\boldsymbol{c} & ; & s - \boldsymbol{m}\end{bmatrix} = s^2 - \boldsymbol{m}s - \boldsymbol{c}$$

kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matica. Korene charakteristickej rovnice $s_{1,2}$ nazývame *vlastné čísla matice A.*

Na základe koreňov **charakteristickej rovnice** vieme určiť stabilitu a typ singulárneho bodu LDS [1]. Jednotlivé typy singulárnych bodov sú uvedené v Tab. 1.

Tab. 1 Korene a typy singulárnych bodov lineárneho systému 2.rádu

$d^2 + 4c$	c	m	*Korene charakteristickej rovnice*	***Typ singulárneho bodu***
≥ 0	< 0	< 0	$s_{1,2} = \frac{m}{2} \pm \sqrt{m/2^2 + c}$; $s_1 < 0; s_2 < 0$	Uzol – stabilný
≥ 0	< 0	> 0	$s_{1,2} = \frac{m}{2} \pm \sqrt{m/2^2 + c}$; $s_1 > 0; s_2 > 0$	Uzol – nestabilný
> 0	> 0	$<=> 0$	$s_{1,2} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{m/2^2 + c}$; $s_1 > 0; s_2 < 0$	Sedlo
< 0	< 0	$= 0$	$s_{1,2} = \pm i\omega = \pm i\sqrt{\lvert c\rvert}$	Stred
< 0	< 0	< 0	$s_{1,2} = \alpha \pm i\omega$; $\alpha = \frac{d}{2} < 0$; $\omega = \sqrt{\lvert m/2^2 + c\rvert}$	Ohnisko – stabilné
< 0	< 0	> 0	$s_{1,2} = \alpha \pm i\omega$; $\alpha = \frac{d}{2} > 0$; $\omega = \sqrt{\lvert m/2^2 + c\rvert}$	Ohnisko – nestabilné

Stavy systému, v prípade, že korene charakteristickej rovnice $s_{1,2}$ sú reálne rôzne, môžeme vyjadriť ako:

$$x_1(t) = C_1 exp(s_1 t) + C_2 exp(s_2 t),$$

$$x_2(t) = s_1 C_1 exp(s_1 t) + s_2 C_2 exp(s_2 t)$$

Následne rovnica fázovej trajektórie má tvar:

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \frac{s_1^2 C_1 exp(s_1 t) + s_2^2 C_2 exp(s_2 t)}{s_1 C_1 exp(s_1 t) + s_2 C_2 exp(s_2 t)},$$

kde C_1, C_2 sú konštanty, závislé na počiatočných podmienkach LDS [1].

Ukážka analytického určenia fázových trajektórií pre singulárny bod typu stabilný uzol

Pre korene charakteristickej rovnice LDS pre typ singulárneho bodu stabilný uzol platí:

$$s_1 < 0; s_2 < 0; \ |s_1| < |s_2|$$

Predpokladajme voľbu počiatočných podmienok LDS tak, aby platilo:

$$C_1 = 0, \ C_2 = 0$$

potom na základe rovnice pre fázové trajektórie dostávame:

$C_1 = 0; \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = s_2$; fázová trajektória $x_2 = s_2 x_1$

$C_2 = 0; \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = s_1$; fázová trajektória $x_2 = s_1 x_1$

Pre takto zvolené počiatočné podmienky LDS vidíme, že fázové trajektórie sú priamky so zápornými smernicami $s_{1,2}$.

Pre $t \to \infty$ a na základe predpokladu $|s_1| < |s_2|$ (členy s väčšou absolútnou hodnotou sa rýchlejšie blížia k nule) platí :

$$lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = lim_{t\to\infty} \frac{s_1^2 C_1 exp(s_1 t) + s_2^2 C_2 exp(s_2 t)}{s_1 C_1 exp(s_1 t) + s_2 C_2 exp(s_2 t)} = s_1$$

Z riešenia uvedenej limity vyplýva, že fázové trajektórie z akýchkoľvek počiatočných podmienok sa blížia ku fázovej trajektórii $x_2 = s_1 x_1$, a teda v konečnom dôsledku k počiatku súradnicového systému – singulárnemu bodu [1].

Príklad exaktného určenia fázových trajektórií pre singulárny bod typu stabilný uzol :

Uvažujme lineárny dynamický systém:

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$$

daný systém druhého rádu rozložíme na rovnice 1.rádu použitím substitučného kanonického tvaru:

SKT:

$x_1 = x$

$\frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = x_2$

$\frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2 = -3\, {x_2}^2 - 2x_1$

z toho vyplýva *Jakobiho matica:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Danému dynamickému systému prislúcha charakteristická rovnica:

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

Ktorej korene sú:

$$s_1 = -1, s_2 = -2$$

Jakobiho maticu následne môžeme zapísať do Jordanovho tvaru:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

následne môžeme systém vyriešiť metódou separácie premenných :

Metóda separácie

$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-2\, x_2}{-x_1}$

separujeme premenné x_1 x_2:

$\frac{1}{-2\, x_2} dx_2 = \frac{1}{-x_1} dx_1$

zintegrujeme:

$\frac{1}{2} \int \frac{1}{x_2} dx_2 = \int \frac{1}{x_1} dx_1$

riešením integrálov získavame:

$\ln\, x_2 = \ln {x_1}^2 + \ln c_1$

$\ln\, x_2 = \ln({x_1}^2 . c_1)$

vyjadríme rovnicu fázovej trajektórie

$x_2 = {x_1}^2 . c$

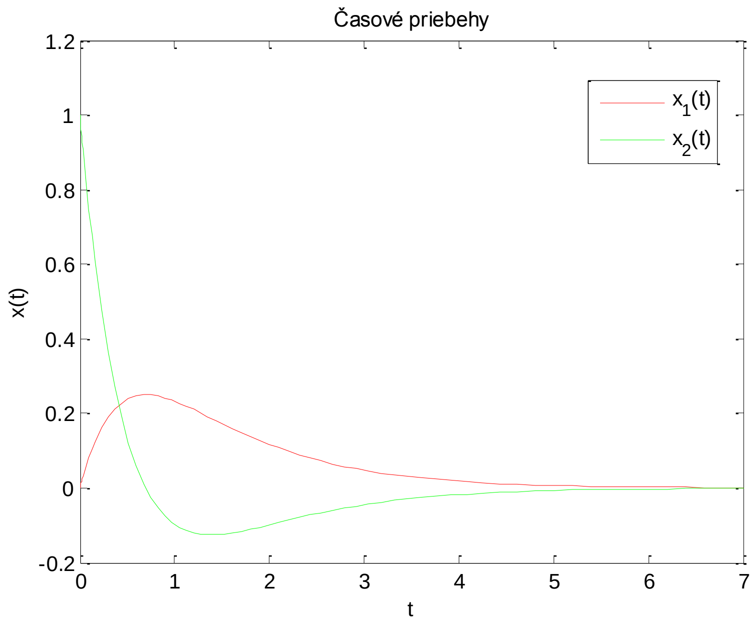
Závislosť v čase $x_1(t),\ x_2(t)$:

$$x_1(t) = x_{10}e^{-t} \rightarrow\ e^{-t} = \frac{x_1}{x_{10}}$$

$$x_2(t) = x_{20}e^{-2t}$$

$$x_2(t) = x_{20}\left(\frac{x_1}{x_{10}}\right)^2 = \frac{x_{20}}{{x_{10}}^2}{x_1}^2(t)$$

na základe získaných riešení môžeme vidieť časové priebehy $x_1(t)\ x_2(t)$

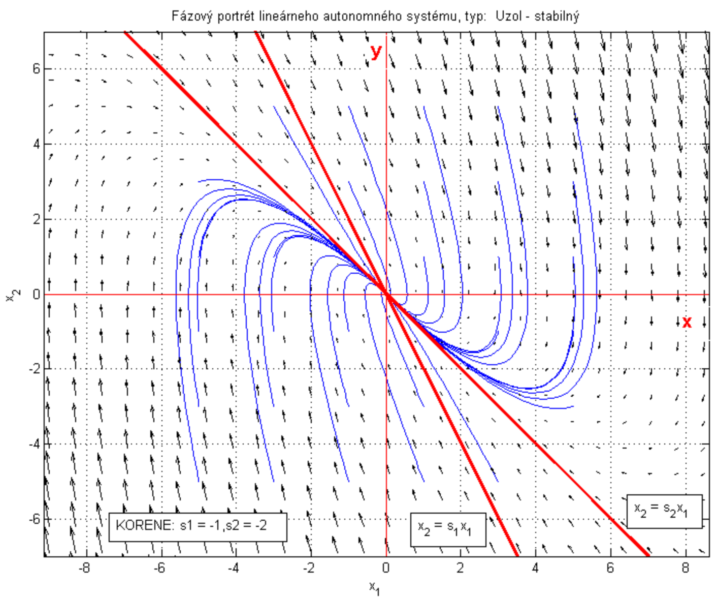


následne voľbou počiatočných podmienok tak, aby platilo $C_1 = 0,\ C_2 = 0$ dostávame:

$C_1 = 0;\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -2;$ fázová trajektória $x_2 = -2x_1$

$C_2 = 0;\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -1;$ fázová trajektória $x_2 = -x_1$

Zobrazený fázový portrét zvoleného LDS môžeme vidieť na OBR:



1.b. Algoritmické riešenie

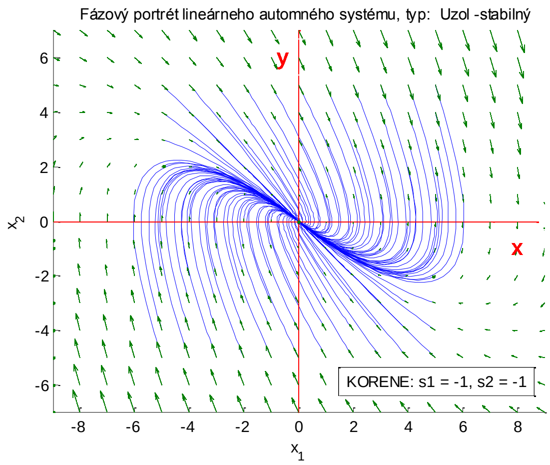
- funkcia **lin.m** na získanie riešenia $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

```
function xder =lin(t,u)

global AA
xder = AA*u;

return
```

- súbor **main.m** na vykreslenie stabilného uzla

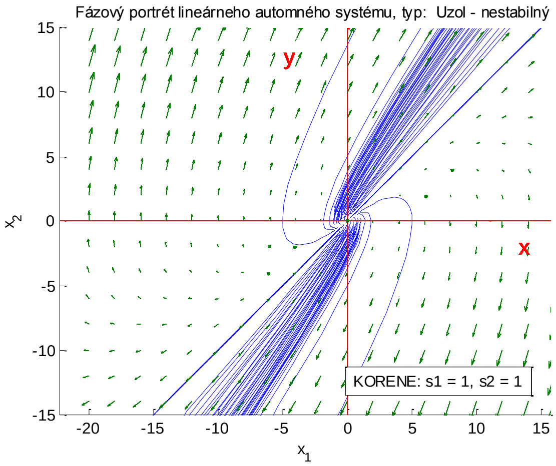
```
global AA i j
AA = [0 1;-1 -2];

tspan =[0 10];  % cas

for i=-7:0.5:7
    for j=-7:0.5:7
      x0=[i j];                % pociatocne podmienky
      [t,x] = ode45(@lin,tspan,x0);   %riesenie cez ode45
      plot (x(: ,1) ,x(: ,2) ,'b');       %vykreslenie kriviek x1(t), x2(t)
      title('Fázový portret lineárneho autonómneho systému,typ : Uzol - stabilný')  % nazov grafu
      xlabel('x_{1}'), ylabel('x_{2}')                % oznacenie osi
      % vykreslenie smeru trajektorii
      [x1, x2] = meshgrid(-4.5:0.5:4.5, -4.5:0.5:4.5);
      x1dot = x2;
      x2dot = AA(2).*x1+AA(4).*x2;
      quiver(x1,x2,x1dot, x2dot,'g')
    end
end
```

Algoritmické riešenie fázových portrétov reprezentujúcich rôzne typy singulárnych bodov



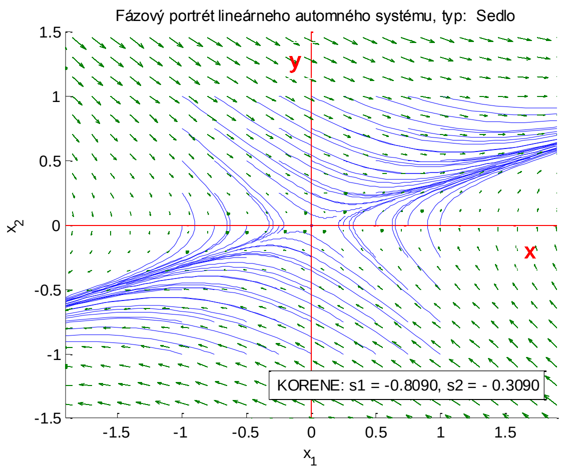
Uzol – stabilný:

$$\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_1 + x_1 = 0$$



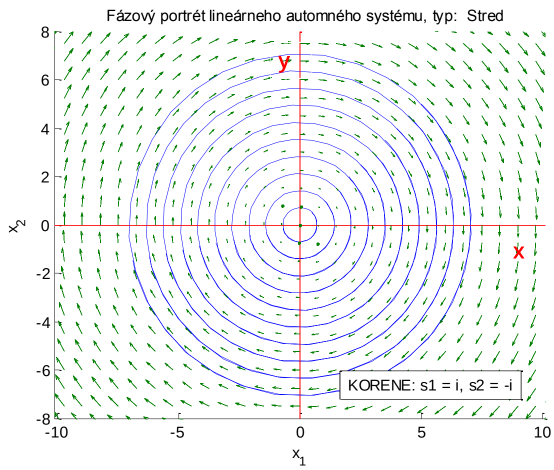
Uzol – nestabilný:

$$\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_1 + x_1 = 0$$



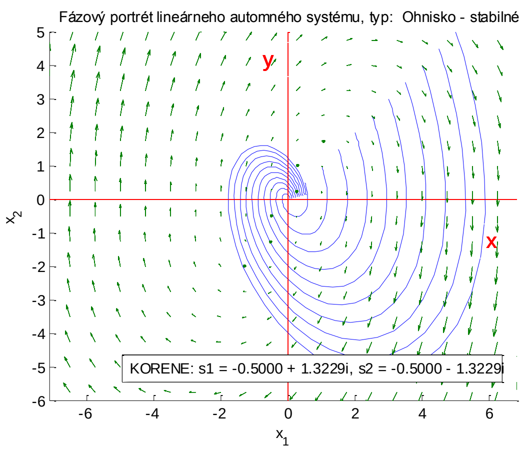
Sedlo:

$$\ddot{x}_1 + 1/2\dot{x}_1 - 1/4x_1 = 0$$



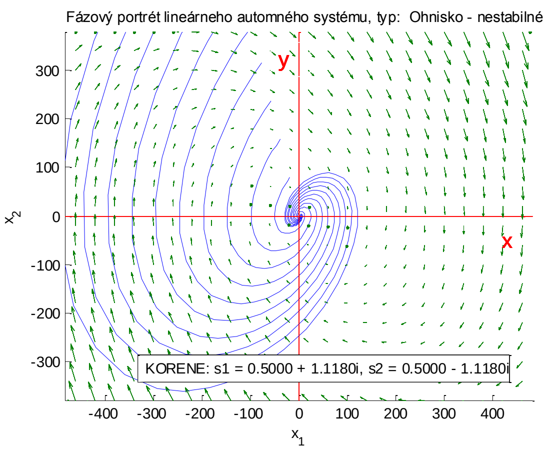
Stred:

$$\ddot{x}_1 + 0 + x_1 = 0$$



Ohnisko – stabilné :

$$\ddot{x}_1 + \dot{x}_1 + 2x_1 = 0$$



Ohnisko – nestabilné :

$$\ddot{x}_1 - \dot{x}_1 + 1{,}5x_1 = 0$$

Úloha č.2 : Postup pre riešenie nelineárnych dynamických systémov metódou separácie premenných

Cieľom tejto úlohy je získanie fázovej trajektórie/fázového portrétu nelineárneho dynamického systému spolu s jeho analytickým riešením.

2.a. Analytické riešenie – príklad 1

Uvažujme nelineárny dynamický systém:

$$\ddot{x}(t) + (\dot{x}(t))^2 = 0$$

daný systém druhého rádu rozložíme na rovnice 1.rádu použitím substitučného kanonického tvaru:

SKT:

$x_1 = x$

$\frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = x_2$

$\frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2 = -{x_2}^2$

následne vieme vyjadriť smernicu dotyčnice k fázovej trajektórii

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-{x_2}^2}{x_2} = -x_2 = k$$

Aby sme získali rovnicu fázovej trajektórie, použijeme metódu separácie premenných:

Metóda separácie

$\frac{dx_2}{dx_1} = -x_2$

separujeme premenné x_1 x_2:

$\frac{-1}{x_2} dx_2 = dx_1$

zintegrujeme

$\int \frac{1}{x_2} dx_2 = \int -dx_1$

riešením integrálov získavame

$\ln x_2 = -x_1 + c_1$

vyjadríme rovnicu fázovej trajektórie

$x_2 = e^{-x_1 + c_1} = c_1 e^{-x_1} \rightarrow$ klesajúca exponenciála , ktorej poloha vo fázovej rovine závisí od počiatočných podmienok , ktoré ovplyvňujú koeficient c_1

Analyticky vieme vyjadriť závislosť v čase $x_1(t)$, $x_2(t)$:

-najskôr vyjadríme $x_2(t)$, ktorá je potrebná pre vyjadrenie $x_1(t)$

Riešenie $\boldsymbol{x_2(t)}$:

$$\frac{dx_2}{dt} = -{x_2}^2$$

separujeme premenné a zintegrujeme

$$\int \frac{1}{{x_2}^2} dx_2 = -\int dt$$

riešením integrálov získame

$$\frac{1}{x_2} = t + c_1$$

vyjadríme časovú závislosť $x_2(t)$

$$x_2(t) = \frac{1}{t + c_1}$$

Riešenie $\boldsymbol{x_1(t)}$:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

separujeme premenné a zintegrujeme

$$x_1 = \int x_2 \, dt$$

za x_2 *dosadíme jeho predchádzajúce vyjadrenie*

$$x_1 = \int \frac{1}{t + c_1} dt$$

vyjadríme časovú závislosť $x_1(t)$

$$x_1(t) = \ln(t + c_1) + \ln c_2$$

Výpočet koeficientov $\boldsymbol{c_1, c_2}$ na základe zvolených počiatočných podmienok:

$$x_1(0) = 0$$

$$x_2(0) = 1$$

Začíname výpočtom koeficientu c_1 pri časovej závislosti $x_2(t)$ potrebný pre výpočet koeficientu c_2 pri časovej závislosti $x_1(t)$.

$$x_2(t) = \frac{1}{t + c_1}$$

dosadíme počiatočné podmienky

$$x_2(0) = \frac{1}{0 + c_1}$$

$$1 = \frac{1}{0 + c_1}$$

vyjadríme koeficient:

$$c_1 = 1$$

Následne môžeme vyjadriť koeficient c_2

$x_1(t) = \ln(t + c_1) + \ln c_2$
dosadíme počiatočné podmienky a hodnotu koeficient c_1

$x_1(0) = \ln(0 + 1) + \ln c_2$

$0 = \ln(0 + 1) + \ln c_2$

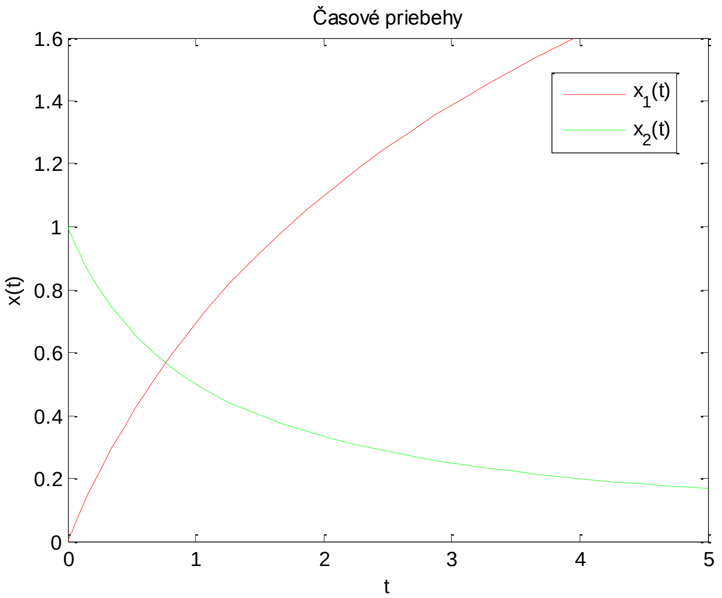
vyjadríme koeficient

$c_2 = e^0$

$c_2 = 1$

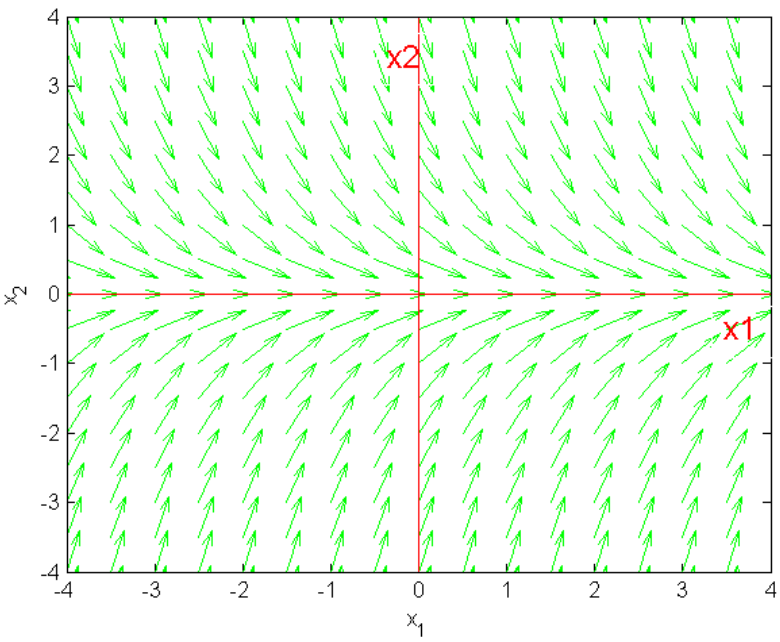
2.a. Algoritmické riešenie – príklad 1

Na základe získaných riešení môžeme vidieť časové priebehy vyjadrených $\boldsymbol{x_1(t)}$, $\boldsymbol{x_2(t)}$ **prostredníctvom prostredia MATLAB:**

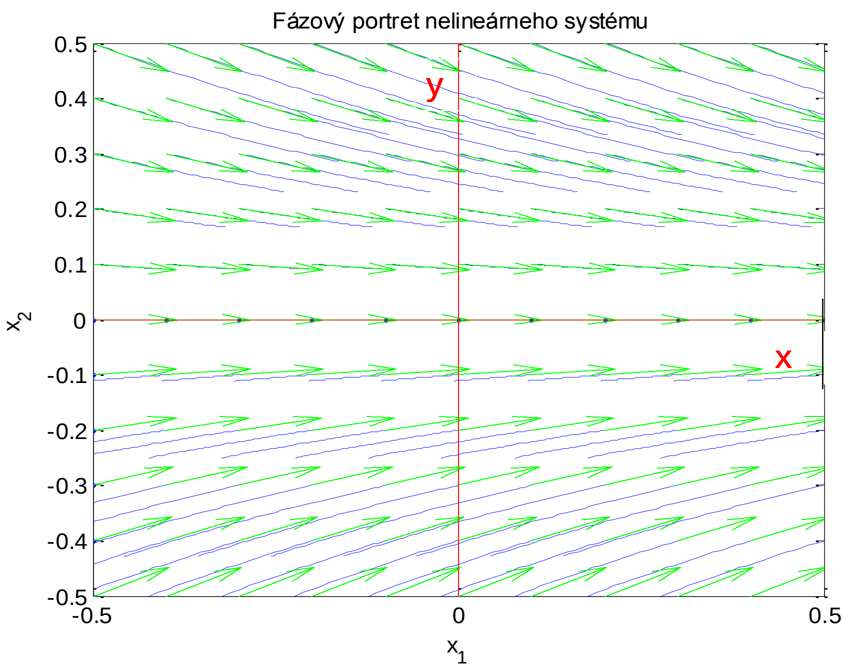


Smer fázovej trajektórie

```
% vykreslenie smeru trajektorii
[x1, x2] = meshgrid(-4.5:0.5:4.5, -4.5:0.5:4.5);
fi=atan(-x2);        % uhol smeru priamky
x1dot = cos(fi);
x2dot = sin(fi);
quiver(x1,x2,x1dot, x2dot,'g')
xlabel('x_{1}'), ylabel('x_{2}')     % oznacenie osi
```



Fázový portrét riešeného nelineárneho dynamického systému pri počiatočných podmienkach PP=[0,1].



2.a. Analytické riešenie – príklad 2

Uvažujme nelineárny dynamický systém:

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t)x(t) = 0$$

daný systém druhého rádu rozložíme na rovnice 1.rádu použitím substitučného kanonického tvaru:

SKT:

$x_1 = x$

$\frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = x_2$

$\frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2 = -x_2 x_1$

následne vieme vyjadriť smernicu dotyčnice k fázovej trajektórii

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2 x_1}{x_2} = -x_1 = k$$

Aby sme získali rovnicu fázovej trajektórie, použijeme metódu separácie premenných:

Metóda separácie

$\frac{dx_2}{dx_1} = -x_1$

separujeme premenné x_1 x_2:

$x_1 dx_1 = -dx_2$

zintegrujeme

$\int x_1 dx_1 = \int -dx_2$

riešením integrálov získavame

$\frac{{x_1}^2}{2} + c_1 = -x_2$

vyjadríme rovnicu fázovej trajektórie

$x_2 = -\frac{1}{2}{x_1}^2 + c_1 \rightarrow$ parabola, ktorej poloha vo fázovej rovine závisí od počiatočných podmienok, ktoré ovplyvňujú koeficient c_1

Analyticky vieme vyjadriť závislosť v čase $x_1(t),\ x_2(t)$:

-najskôr vyjadríme závislosť v čase $x_2(t)$, ktorá je potrebná pre vyjadrenie $x_1(t)$

Riešenie $\boldsymbol{x_2(t)}$:

$$\frac{dx_2}{dt} = -\, x_2\, x_1$$

separujeme premenné a zintegrujeme

$$\int \frac{1}{x_2} dx_2 = -\int\ x_1 dt$$

riešením integrálov získame

$$\ln\ x_2 = t\, x_1 + c_1$$

vyjadríme časovú závislosť $x_2(t)$

$$x_2(t) = e^{t\, x_1 + c_1}$$

Riešenie $\boldsymbol{x_1(t)}$:

$$\frac{dx_1}{dt} = \ x_2$$

separujeme premenné a zintegrujeme

$$x_1 = \int\ x_2\, dt$$

za x_2 *dosadíme jeho predchádzajúce vyjadrenie*

$$x_1(t) = \int e^{t\, x_1}\, dt$$

vyjadríme časovú závislosť $x_1(t)$

$$x_1(t) = \frac{e^{t\, x_1}}{x_1} + c_2$$

Výpočet koeficientov $\boldsymbol{c_1, c_2}$ na základe zvolených počiatočných podmienok:

$$x_1(0) = 0$$

$$x_2(0) = 1$$

Začíname výpočtom koeficientu c_1 pri časovej závislosti $x_2(t)$ a následne koeficientu c_2 pri časovej závislosti $x_1(t)$.

$$x_2(t) = e^{t\, x_1 + c_1}$$

dosadíme počiatočné podmienky

$$x_2(0) = e^{0 + c_1}$$

$$1 = e^{0 + c_1}$$

vyjadríme koeficient:

$$c_1 = 0$$

Následne vyjadríme koeficient c_2

$$x_1(t) = \frac{e^{t\,x_1}}{x_1} + c_2$$

dosadíme počiatočné podmienky

$$x_1(0) = \frac{e^0}{0} + c_2$$

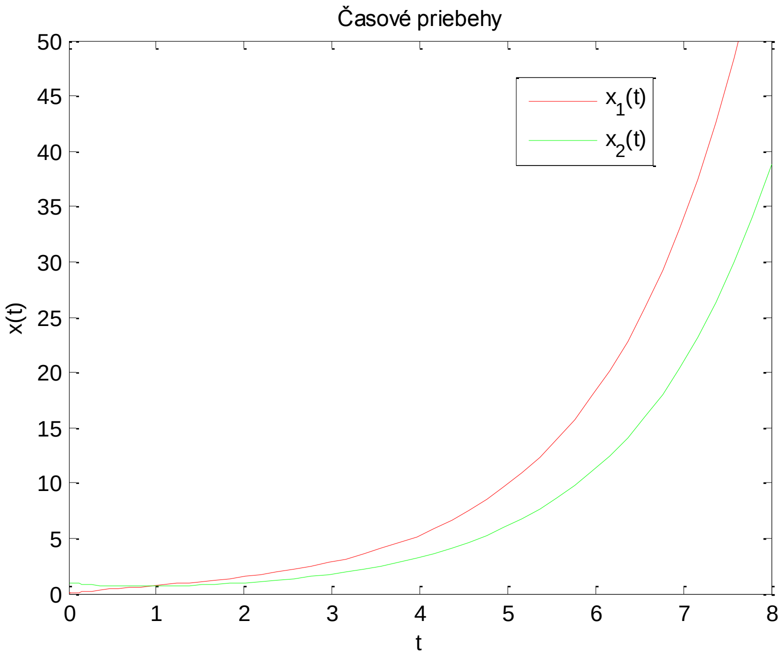
$$0 = \frac{e^0}{0} + c_2$$

vyjadríme koeficient

$$c_2 = 0$$

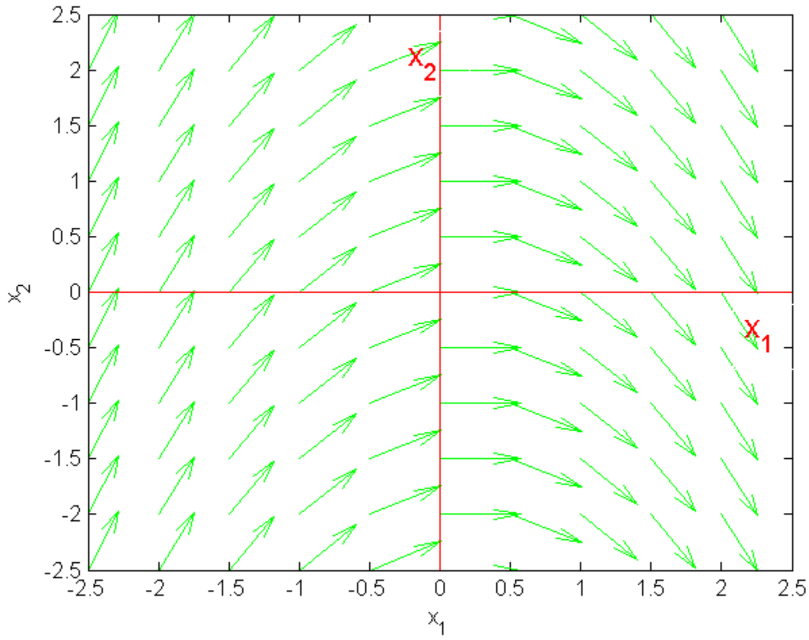
2.a. Algoritmické riešenie – príklad 2

Na základe získaných riešení môžeme vidieť časové priebehy vyjadrených $x_1(t)$, $x_2(t)$ prostredníctvom prostredia MATLAB:

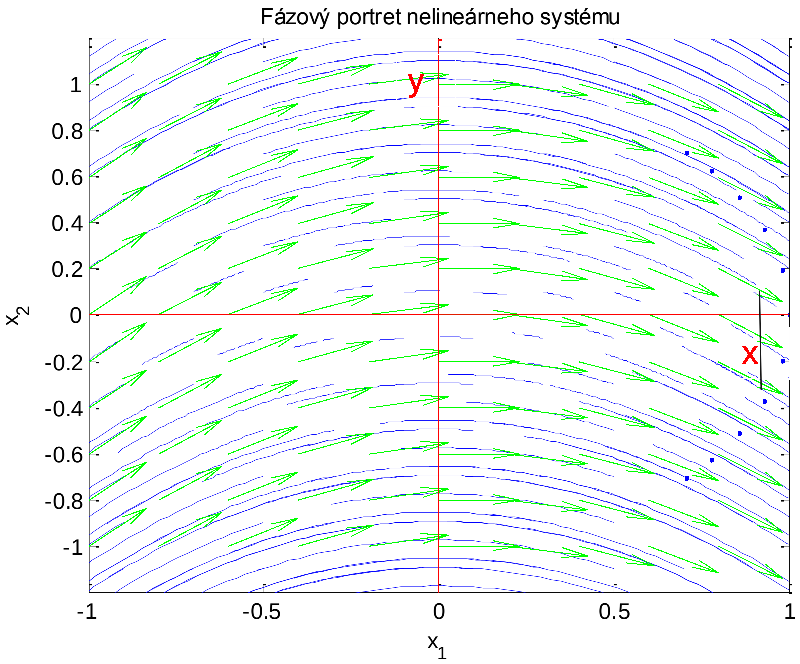


Smer fázovej trajektórie pomocou prostredia MATLAB

```
% vykreslenie smeru trajektorii
[x1, x2] = meshgrid(-2.5:0.5:2.5, -2.5:0.5:2.5);
fi=atan(-x1);  % uhol smeru priamky
x1dot = cos(fi);
x2dot = sin(fi);
quiver(x1,x2,x1dot, x2dot,'g')
xlabel('x_{1}'), ylabel('x_{2}')        % oznacenie osi
```



Fázový portrét riešeného nelineárneho dynamického systému pri počiatočných podmienkach PP=[0,1].



Úloha č.3: Postup pre zostrojenie fázového portrétu pre nelineárny dynamický systém (NDS)

Nelineárne systémy sa odlišujú od lineárnych systémov na základe istých vlastností predovšetkým:

a) Výstup systému sa zásadným spôsobom líši pre meniacu sa amplitúdu budiaceho signálu, a preto neplatí princíp superpozície

b) Rovnovážne stavy existujú aj mimo počiatok súradníc

c) Počiatočné podmienky majú vplyv na dosiahnutie rovnovážnych stavov autonómnych systémov

d) Vznikajú stabilné samobudiace kmity (autooscilácie) v systéme, ktoré majú inú frekvenciu ako je budiaca frekvencia

e) Dochádza k postupnej zmene amplitúdy výstupu pri meniacej sa frekvencii budiaceho signálu

3.a. Výpočet rovnovážnych stavov (RS) nelineárneho dynamického systému (NDS) na základe jeho prepisu do substitučného kanonického tvaru

Nelineárne dynamické SISO systémy môžu byť popísané formou **nelineárnych diferenciálnych rovníc *n-tého* rádu** alebo **sústavou *n* nelineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu.**

$$\dot{x} = f(x, u)$$

- pre rozklad nelineárnych diferenciálnych rovníc n-tého rádu na sústavu n diferenciálnych rovníc prvého rádu využívame ***substitučný kanonický tvar [1].***

Uvažujme autonómny nelineárny systém :

$$\dot{x}(t) = f(x)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_{2,} \dots, x_{n,}) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_{2,} \dots, x_{n,}) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_{2,} \dots, x_{n,}) \end{aligned}$$

Nelineárny systém má **2 typy** ustálených stavov:

- *rovnovážny stav* – izolované singulárne body
- *medzný cyklus* – množina singulárnych bodov, ktoré vytvárajú uzavreté trajektórie

Pre systém ktorý je v rovnovážnom stave platí, že všetky derivácie jeho vnútorných stavov sú nulové a preto singulárne body ${}^{i}\boldsymbol{x}_s$ musia spĺňať podmienku:

$$\dot{x} = f({}^{i}\boldsymbol{x}_s) = 0 \qquad i = 1,2,\dots p \; \textit{(p – počet riešení)}$$

$$\downarrow$$

$$f_1({}^{i}\boldsymbol{x}_{1s}\,{}^{i}\boldsymbol{x}_{2s} \dots, {}^{i}\boldsymbol{x}_{ns}) = 0$$
$$f_2({}^{i}\boldsymbol{x}_{1s}\,{}^{i}\boldsymbol{x}_{2s} \dots, {}^{i}\boldsymbol{x}_{ns}) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_n({}^{i}\boldsymbol{x}_{1s}\,{}^{i}\boldsymbol{x}_{2s} \dots, {}^{i}\boldsymbol{x}_{ns}) = 0$$

- môže byť viacero riešení ${}^{1}\boldsymbol{x}_s$, ${}^{2}\boldsymbol{x}_s \dots$, ${}^{p}\boldsymbol{x}_s$

3.b. Určenie lineárnej aproximácie NDS vo vypočítaných RS

Stabilitu v malom okolí singulárnych bodov vyšetrujeme vykonaním lineárnej aproximácie nelineárneho systému v každom z jeho singulárnych bodoch a následne overujeme jeho stabilitu.

Pri lineárnej aproximácii využívame rozvoj do *Taylorovho radu* v okolí singulárnych bodov v tvare:

$$\frac{d}{dt}(x_1 - x_{s1}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_{xs}(x_1 - x_{s1}) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_{xs}(x_2 - x_{s2}) + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_{xs}(x_n - x_{sn})$$
$$\frac{d}{dt}(x_2 - x_{s2}) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_{xs}(x_1 - x_{s1}) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_{xs}(x_2 - x_{s2}) + \dots + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)_{xs}(x_n - x_{sn})$$
$$\vdots$$
$$\frac{d}{dt}(x_n - x_{sn}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_{xs}(x_1 - x_{s1}) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_{xs}(x_2 - x_{s2}) + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_{xs}(x_n - x_{sn})$$

kde $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_s$, pričom $\boldsymbol{x}_s = {}^{i}\boldsymbol{x}_s$ pre $i = 1,2,\dots p$

Taylorov rozvoj (2.8.) môžeme zapísať v maticovom tvare:

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = J(\boldsymbol{x}_s).(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_s) = J(\boldsymbol{x}_s).\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}.\Delta\dot{\boldsymbol{x}},$$

kde $J(\boldsymbol{x}_s)$ predstavuje Jacobiho maticu, ktorú získame z parciálnych derivácií a zapíšeme nasledovne [1]:

$$J(\boldsymbol{x_s}) = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \right|_{x_s}$$

3.c. Určenie typov RS a posúdenie ich stability v malom

Náhradný lineárny systém v danom singulárnom bode má maticu systému $\boldsymbol{A} = J(\boldsymbol{x_s})$ a **charakteristickú rovnicu získame :**

$$\det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] = \det[s\boldsymbol{I} - J(\boldsymbol{x_s})] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0,$$

kde n je rad systému a $\boldsymbol{I}$ jednotková matica.

Korene charakteristickej rovnice rozhodujú o stabilite nelineárneho systému v blízkom okolí daného rovnovážneho stavu:

- záporné reálne korene / imaginárne so zápornou reálnou časťou => **STABILNÝ**
- kladné reálne korene / imaginárne s kladnou reálnou časťou => **NESTABILNÝ**

3.d. Fázový portrét pre NDS „Van der Pol oscilátor“

NDR 2. rádu – Van der Pol oscilátor:

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) - \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}) + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$$

autonómny systém - $u = 0$
neautonómny /s budením - $u = 0{,}8$

1 singulárny bod $^1\boldsymbol{x_s}$: $\Rightarrow$ ***OHNISKO - NESTABILNÉ***

algoritmické riešenie

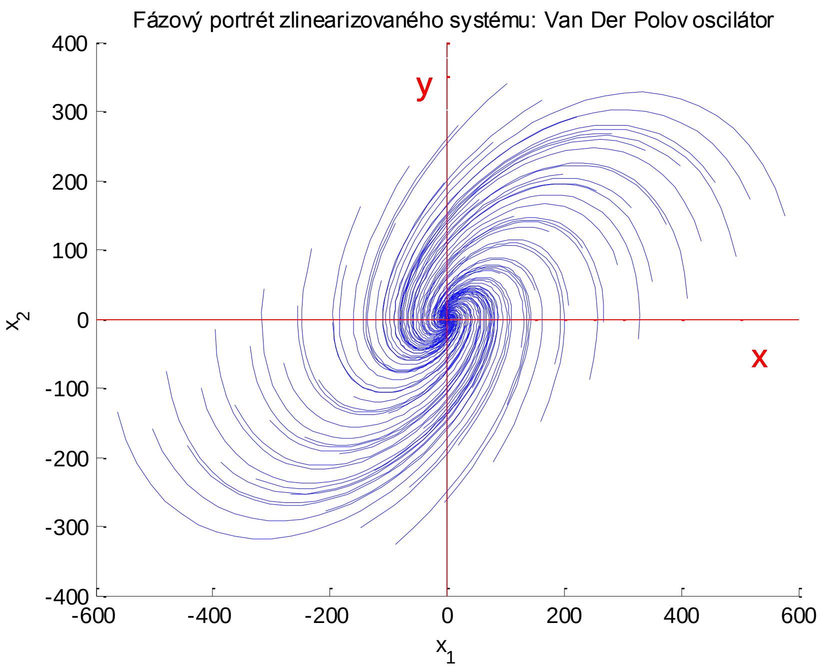
- funkcia **difrov2.m** na získanie riešenia nelineárneho systému Van der Pol ocilátor

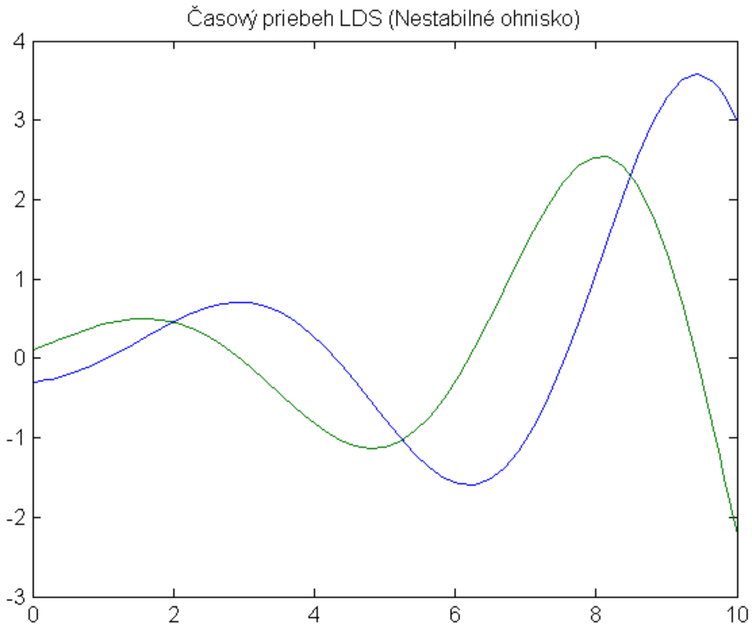
```
function xder=difrov2(t,x)

global u
xder =[x(2); u + x(2).*(1-x(1).^2)-x(1)];

end
```

-súbor **VDP.m** na vykreslenie fázového portrétu systému Van der Pol oscilátor

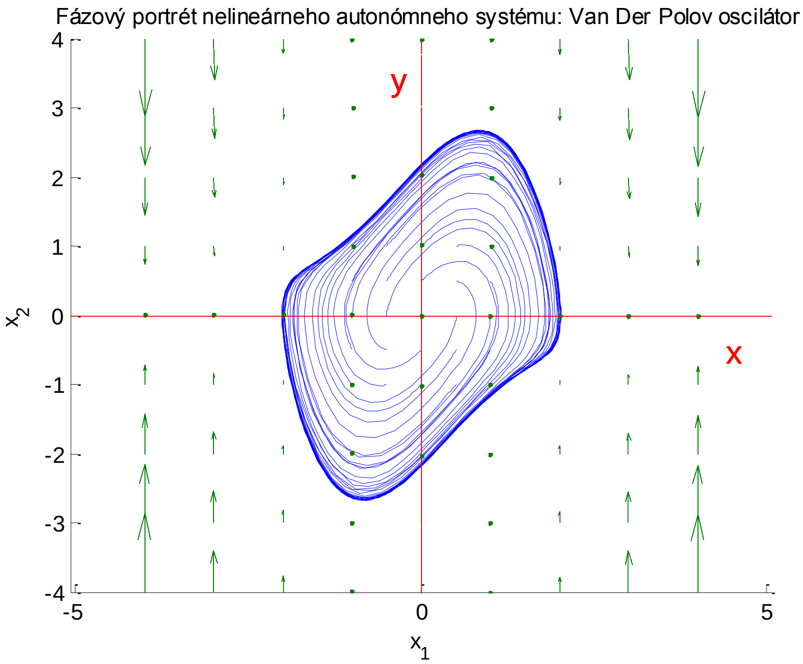
```
tspan =[0 10];                    %cas

for i=-7:0.5:7
    for j=-7:0.5:7
      x0=[i j];              % pociatocne podmienky
      [t,x] = ode45(@difrov2,tspan,x0);   %riesenie cez ode45
      plot (x(: ,1) ,x(: ,2) ,'b');       %vykreslenie kriviek x1(t), x2(t)
      title('Fázový portret nelineárneho systému s budením u: Van der Polov oscilátor')  % nazov grafu
      xlabel('x_{1}'), ylabel('x_{2}')              % oznacenie osi
      % vykreslenie smeru trajektorii
      [x1, x2] = meshgrid(-4.5:0.5:4.5, -4.5:0.5:4.5);
      x1dot = x2;
      x2dot = u + x(2).*(1-x(1).^2)-x(1);
      quiver(x1,x2,x1dot, x2dot,'g')
     end
end
```

Fázový portrét pre zlinearizovaný systém v **singulárnom bode:** $^{1}x_{s}$

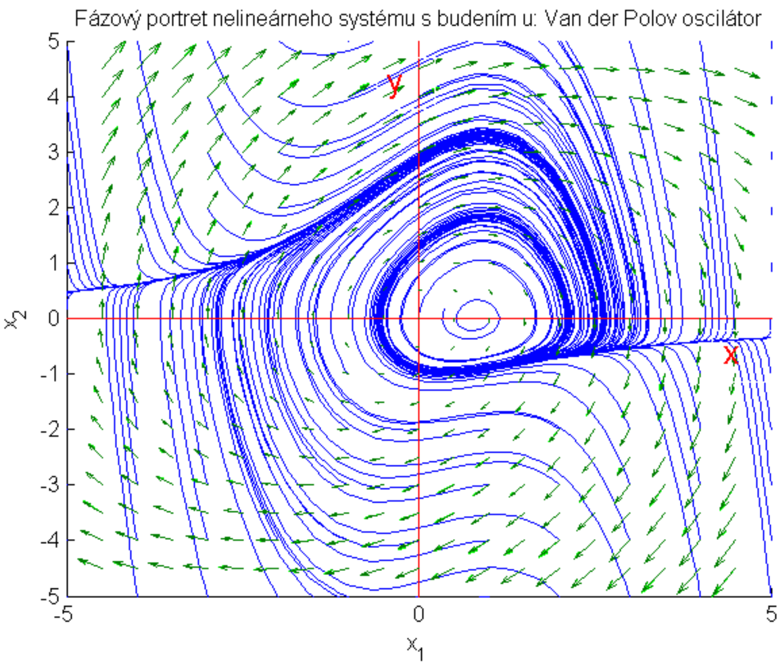




Fázový portrét pre **nelineárny autonómny** systém u = 0 :



Fázový portrét nelineárneho systému **s budením/vstupom** u= 0,8:



Literatúra:

[1]. JADLOVSKÁ, A. prednášky predmetu *Optimálne riadenie hybridných systémov*, 2016.