

Technická univerzita v Košiciach  
Fakulta elektrotechniky a informatiky  
Katedra kybernetiky a umelej inteligencie

# **Metódy a prístupy pre fyzikálne modelovanie, simuláciu a riadenie kyber-fyzikálnych systémov**

Diplomová práca

## **Príloha D**

Tutoriál modelovania systémov s využitím metódy  
fyzikálneho modelovania

Vedúci bakalárskej práce:

doc. Ing. Anna Jadlovská, PhD.

Bakalár:

Bc. Martin Durkáč

Konzultant bakalárskej práce:

Ing. Slávka Jadlovská, PhD.

Košice 2020

## Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Modelovanie 3D kyvadla v prostredí Simscape Multibody</b>	<b>1</b>
<b>3 Linearizácia a riadenie</b>	<b>6</b>
<b>4 Záver</b>	<b>12</b>
<b>Zoznam obrázkov</b>	<b>12</b>
<b>Zoznam tabuliek</b>	<b>12</b>

## 1 Úvod

V tomto tutoriály stručne opíšem postup modelovania v prostredí Simscape Multibody simulačného prostredia Matlab/Simulink. Prostredie Simscape Multibody len na základe definície kinematickej štruktúry zostaví pohybové rovnice a vytvorí vizualizáciu dynamiky navrhnutého modelu. Nakoľko je tento toolbox implementovaný ako knižnica Simulink je jednoduché testovať simuláciu systému pre rôzne počiatkové podmienky.

## 2 Modelovanie 3D kyvadla v prostredí Simscape Multibody

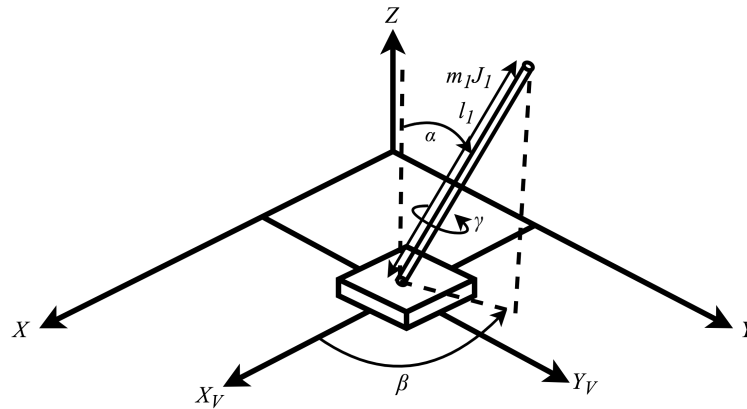
Pre ukázanie fyzikálneho modelovania v prostredí Simscape Multibody som si vybral systém 3D kyvadlo. Systém 3D kyvadla oproti jednoduchému, ktorý obsahuje jeden stupeň voľnosti, sa správa ako kyvadlo zachytené v guľovom čape. Kyvadlo má dve rovnovážne body: jeden hore, ktorý je nestabilný a jeden dole, ktorý je stabilný. Kyvadlo nedokáže vykonať žiaden translačný pohyb, len rotačné pohyby okolo troch osí X, Y a Z. Pre stabilizáciu kyvadla je pridaný vozík s dvoma stupňami voľnosti. Fyzikálne parametre týkajúce sa 3D kyvadla je možné vidieť v tabuľke 2-1.

$l_1 [m]$	– celková dĺžka kyvadla
$m_1 [kg]$	– hmotnosť kyvadla
$J_1 [kgm^2]$	– moment zotrvačnosti vzhľadom na os kyvadla
$g [ms^{-1}]$	– gravitačné zrýchlenie
$\delta_0 [kgs^{-1}]$	– tlmenie vozíka v osi X
$\delta_1 [kgs^{-1}]$	– tlmenie vozíka v osi Y
$\delta_2 [kgs^{-1}]$	– tlmenie v guľovom čape

**Tabuľka 2-1** Fyzikálne parametre 3D kyvadla

Schematické znázornenie systému 3D kyvadla s pripojeným vozíkom sa nachádza

na obrázku 2-1.

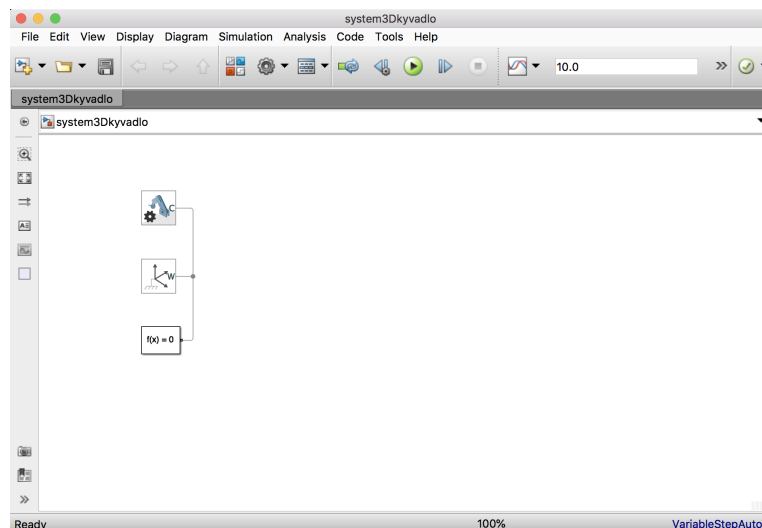


Obr. 2-1 Schematické znázornenie systému 3D kyvadla

Proces tvorby fyzikálneho modelovania je veľmi intuitívny a na základe spúšťania simulácie je možné vidieť odozvu a prepojenie jednotlivých komponentov, čo pomáha pri riešení problém so zlým zapojením blokov cez rotácie. Základným predpokladom je mať k dispozícii Simulink spolu s nainštalovaným toolboxom **Simscape Multibody**.

Začneme zapnutím simulačného nástroja **Simulink** v okne programu Matlab. Po vytvorení nového modelu **Blank Model** si simulačnú schému uložíme s názvom **system3Dkyvadlo**. Z knižnice Simulink pod položkou **Simscape > Utilities** vytiahneme blok **Solver Configuration**. Následne si rozklikneme položku **Multibody** a z položky **Frames and Transforms** vytiahneme blok **World Frame** a z **Utilities** blok **Mechanism Configuration**. Tieto tri bloky navzájom prepojíme a túto štruktúru zachováme pri všetkých modeloch vytváraných v prostredí Simscape. Zapojenie je zobrazené na obrázku 2-2

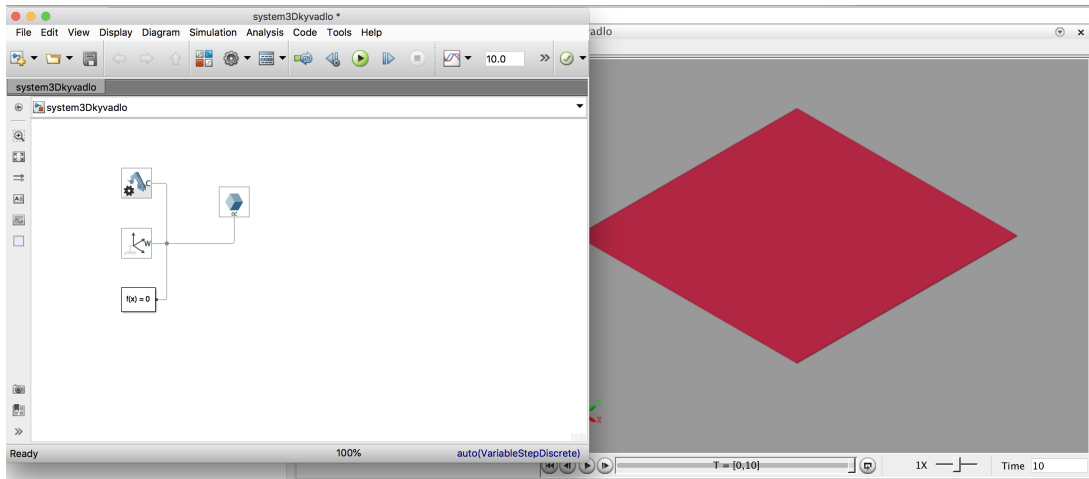
Keďže systém nebudeme testovať v otvorenej slučke, ale budeme navrhovať aj riadenie, vytvoríme posúvanie podstavy držiacej kyvadlo po osi X a Y. Pred samotným navrhnutím systému vytvoríme imaginárnu podlahu slúžiacu pre vizualizačné účely. Z knižnice **Simulinku > Simscape > Multibody > Body Elements** vyberieme blok **Solid**. Blok pripojíme na existujúcu štruktúru na obrázku 2-2. Po



Obr. 2–2 Základné bloky pre modelovanie v Simscape Multibody

rozkliknutí bloku *Solid* pod **Geometry** > **Dimensions** nastavíme hodnoty [1 1 0.005] [m]. Keďže sa jedná len o vizualizačný element, v záložke **Graphic** > **Color** vyberieme farbu červenú a vlastnosť **Opacity** nastavíme na hodnotu 0.5. Po každom kroku po stlačení klávesnice **F5** dokážeme aktualizovať vizualizáciu elementu v okne a získať aktuálny pohľad na súčiastku. V tomto momente už môžeme spustiť simuláciu stlačením tlačidla **Run**, po ktorom sa otvorí aplikácia *Mechanics Explorer*, v ktorom sa zjaví naša podložka. Po týchto dvoch krokoch by sme mali dostať výstup znázornený na obrázku 2–3.

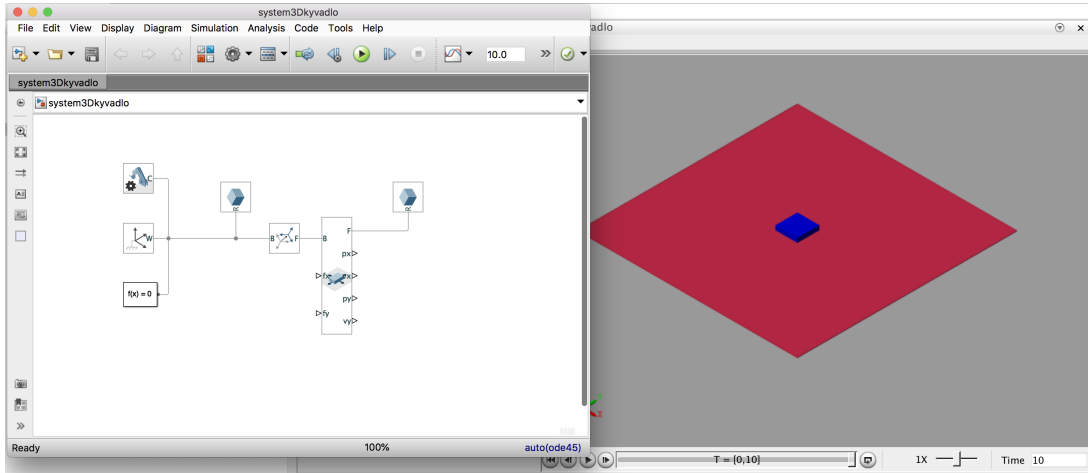
V ďalšom kroku vytvoríme pohybujúci vozík, ktorý bude slúžiť na uriadenie kyvadla pohybom po osiach X a Y. Simscape Multibody umiestňuje ťažisko jednotlivých objektov do ich stredu. Ak chceme, aby boli telesá od seba posunuté, musíme si nastaviť posúvanie pomocou blokov **Rigid Transform**, ktorý nájdeme pod záložkou **Frames and Transforms**. Po rozkliknutí si vyberieme možnosť **Translation** a položku **Method** > **Standard Axis** nastavíme po osi **+Z** na hodnotu  $(0.005+0.02)/2$  [m]. Pred pripojením samotného vozíka je potrebné umožniť mu sa pohybovať prostredníctvom kĺbového spojenia. Nakoľko chceme umožniť pohyb po dvoch osiach, vyberieme si zo záložky **Joints** > **Rectangular Joint**. Po rozk-



Obr. 2–3 Okno Mechanics Explorer so simulačnou schémou znázorňujúcou podložku

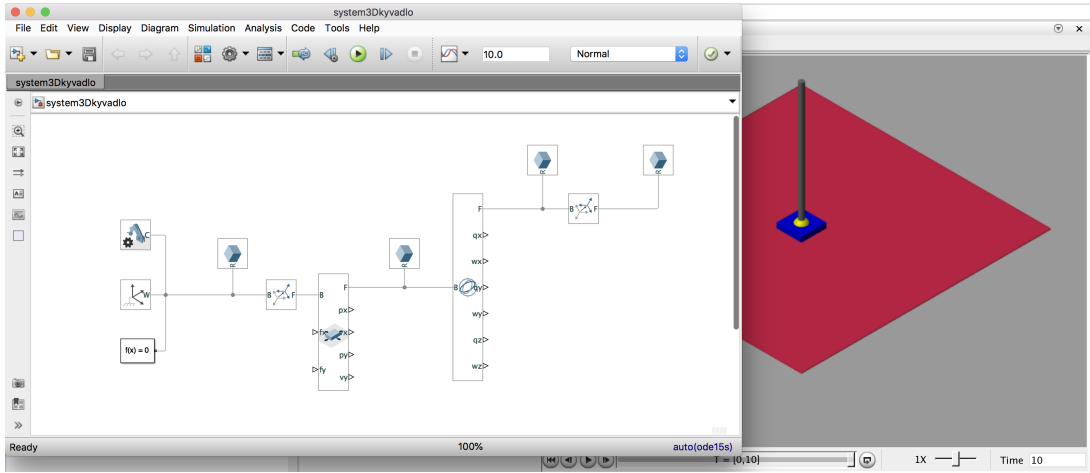
liknutí uvidíme *X Prismatic Primitive (Px)*, v ktorom pod **Internal Mechanics** nastavíme **Damping Coefficient** na hodnotu **0.2**. Záložku **Actuation > Force** nastavíme na hodnotu **Provided by Input**, a okrem toho v záložke **Sensing** označíme hodnoty **Position** a **Velocity**. Rovnaký postup aplikujeme aj na položky *Y Prismatic Primitive (Py)*, ktoré sa nachádzajú hneď pod nastavením pre hodnotu X. Blok *Prismatic Joint* sa rozšíril o ďalšie vstupy a výstupy, ktoré nebudeme v tejto chvíli riešiť. Dôležitý je výstup **F**, na ktorý budeme pripájať vozík. Pre vytvorenie vozíka opäť využijeme blok **Solid**, v ktorom nastavíme **Dimensions** na hodnotu **[0.1 0.1 0.020]** [m]. Keďže v tomto prípade hraje vozík úlohu v rámci dynamiky, potrebujeme mu nastaviť hmotnosť, čo môžeme urobiť v okne **Inertia**, v ktorej si zvolíme **Based on > Mass** a hodnotu nastavíme na **0.5** [kg]. Pre lepší prehľad v simulačnej schéme môžeme nastaviť farbu na **modrú** postupom opísaným vyššie. Po spustení simulácie sa objaví vozík na podložke ako je vidieť na obrázku 2–4.

Po úspešnom implementovaní vozíka je načas pripojiť kyvadlo. Keďže kyvadlo nebude pevne upevnené, potrebujeme ho prepojiť s vozíkom cez kĺbové spojenie, ktoré mu bude umožňovať pohyb do strán. Využijeme blok **Gimbal Joint**, v ktorom nastavíme *X Revolute Primitive (Rx)* **Damping Coefficient** v záložke **Internal Mechanics** na hodnotu **0.0005**. Taktiež v záložke **Sensing** označíme **Position**

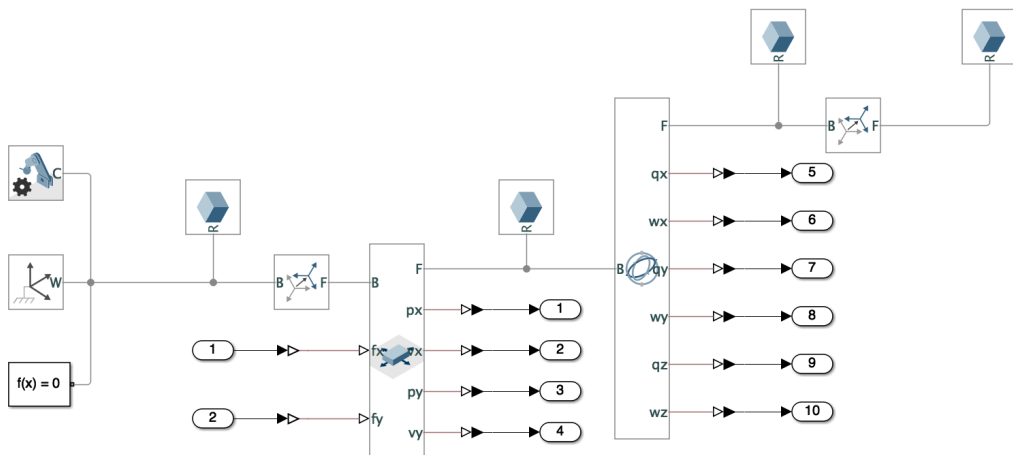


**Obr. 2–4** Okno Mechanics Explorer so simulačnou schémou znázorňujúcou podložku s vozíkom a **Velocity**. Rovnaké hodnoty nastavíme aj pre *Y Revolute Primitive (Ry)* a *Z Revolute Primitive (Rz)*. Pred samotným zapojením kyvadla vložíme guľový objekt pre vizualizáciu uchopenia kyvadla. Pridáme nový blok **Solid**, ktorému nastavíme guľový tvar v záložke **Shape** > **Sphere**. Polomer **Radius** nastavíme na hodnotu **0.025** [m] a v záložke **Inertia** musíme nastaviť hmotnosť na hodnotu **0**, nakoľko sa jedná o vizualizačný element a nesmie mať hmotnosť. Pre farebné odlíšenie nastavíme farbu elementu na žltú. Keďže centrum objektov sa nachádza v strede, potrebujeme posunúť kyvadlo o hodnotu polovice celkovej dĺžky kyvadla. Pripojíme teda blok **Rigid Transform**, v ktorom nastavíme metódu translácie **Standart Axis** v osi **+Z** na hodnotu **0.25** [m]. Teraz už stačí pripevniť kyvadlo na koniec schémy. Opäť pripojíme blok **Solid**, v ktorom si **Geometry** vyberieme valec **Cylinder**, ktorému nastavíme **Radius** na hodnotu **0.01** [m] a dĺžku **Length** na hodnotu **0.5** [m]. Pre nastavenie hmotnosti v záložke **Inertia** nastavíme hodnotu **Mass** na hodnotu **0.3** [kg]. Výsledná schéma ja zobrazená na obrázku 2–5.

Pred samotnou linearizáciou a riadením potrebujeme povedať simulačnému prostrediu čo je vstup a čo je výstup systému. Ku vstupu pripojíme blok **In** spolu s **Simulink-PS Converter** a k výstupom pripojíme **PS-Simulink Converter** s blokom **Out**, čo je možné vidieť na obrázku 2–6.



Obr. 2–5 Okno Mechanics Explorer so simulačnou schémou znázorňujúcou celý systém



Obr. 2–6 Výsledná simulačná schéma pre linearizáciu systému

### 3 Linearizácia a riadenie

Pred samotným návrhom riadenia si z našej blokovej schémy, zobrazenej na obrázku 2–6, vytvoríme subsystém pre ľahšie zapájanie blokov. Označíme všetky bloky a pravým tlačidlom klikneme na schému a zvolíme **Create Subsystem from Selection**.

Stavový vektor popisujúci systém 3D kyvadla s pripojeným vozíkom má tvar:



$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} x & \dot{x} & y & \dot{y} & \alpha & \dot{\alpha} & \beta & \dot{\beta} \end{bmatrix}^T, \quad (3.1)$$

Pre linearizáciu som si vybral pracovný bod tvorený vektormi  $PB = (x_0, u_0)$ . Vektor  $x_0$  v ktorom je kyvadlo smerom hore a vozík presne v strede súradnicového systému má tvar:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (3.2)$$

Druhý vektor pracovného bodu odpovedá vstupu do systému  $u_0$ , ktorý pôsobí na systém a má tvar:

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (3.3)$$

Pre linearizáciu systému vytvoreného Simscape Multibody na základe pracovného bodu tvoreného dvojicou 3.2 a vstupu do systému 3.3, v príkazovom okne zadáme príkaz: `sysKyvadlo = linearize('system3Dkyvadlo')`, keďže vstupný parameter do funkcie `linearize` je názov simulačnej schémy, ktorú sme urobili v 2 kapitole. Matice získane z funkcie `linearize` systému 3D kyvadla sú znázornené vo vzťahu 3.4 a 3.5.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.72 & 0 & 0 & -8.02 & 0 & 0.31 \\ 0 & 0 & 0 & -0.72 & 8.02 & 0 & -0.31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2.18 & 53.47 & 0 & -2.08 & 0 \\ 0 & 0 & 2.18 & 0 & 0 & 53.47 & 0 & -2.08 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3.63 & 0 \\ 0 & 3.63 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 10.9 \\ -10.9 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Rovnica 3.6 popisuje výpočet kvadratického kritéria, v ktorom sa sčítava energia vnútorných stavov systému a vstupov do systému. Kvadratický spojité funkcionál sa minimalizuje na intervale 0 až  $\infty$ ,

$$J(t) = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)]dt, \quad (3.6)$$

kde pozitívne semidefinitná matica  $\mathbf{Q}$  predstavuje váhu jednotlivých vnútorných stavov a pozitívne definitná matica  $\mathbf{R}$  predstavuje váhu akčných zásahov. Vypočítaním riešenia  $\mathbf{P}$  z algebraickej Riccatiho rovnice budeme vedieť určiť vektor spätnoväzobného zosilnenia  $\mathbf{K}$ . Riccatiho rovnica je uvedená nasledovne:

$$0 = \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T + \mathbf{Q}, \quad (3.7)$$

Vypočítaním  $\mathbf{P}$  z rovnice 3.7 získame poslednú neznámu z rovnice vektora spätnoväzobného zosilnenie ktorá má tvar:

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T, \quad (3.8)$$

Maticu  $\mathbf{K}$  z rovnice 3.8 využijeme pri zostavení zákona riadenia vyjadreného v rovnici 3.9 v tvare:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (3.9)$$

Matice  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$  potrebné pre vypočítanie spätnoväzobného zosilnenia  $k$  sú zobrazené vo vzťahoch 3.10 a 3.11.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

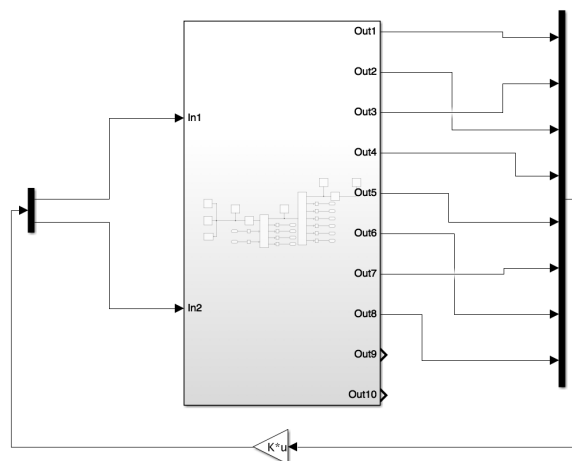
Po získaní matíc na základe pracovného bodu  $PB = (x_0, u_0)$  tvoreného dvojicou vektorov 3.2 a vstupu do systému 3.3 nasleduje vypočítanie spätnoväzobného zosilnenia  $k$ . Zadaním matíc  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$  z rovníc 3.4, 3.5, 3.10 a 3.11 do príkazu `lqr` ako vstupné parametre v tvare  $k = \text{lqr}(\text{sysKyvadlo.A}, \text{sysKyvadlo.B}, 1000 * \text{eye}(8), 0.01 * \text{eye}(2))$ , získame hodnotu zosilnenia  $k$ . Zosilnenie  $k$  využijeme pri aplikovaní zákona riadenia z rovnice 3.9. V prípade tohto systému je vstup  $u$  v podobe síl pôsobiacich na dve osi vozíka.

Vytvoríme si novú simulačnú schému s názvom **kyvadlo3Driadenie**, kde si skopírujeme subsystém vytvorený zo schémy **system3Dkyvadlo**. Do simulačnej schémy vložíme bloky **Mux**, **Gain** a **Demux**. Pri bloku **Gain** je potrebné nastaviť hodnotu *Gain* na **-k** a zvoliť **Multiplication** -> **Matrix(K\*u)**. Na blok **Mux** dvojitým kliknutím treba nastaviť parameter **Number of inputs:** na hodnotu **8**, čo vyplýva z veľkosti stavového vektora 3.1. Zapojenie portov do blokov **Mux** a **Demux**

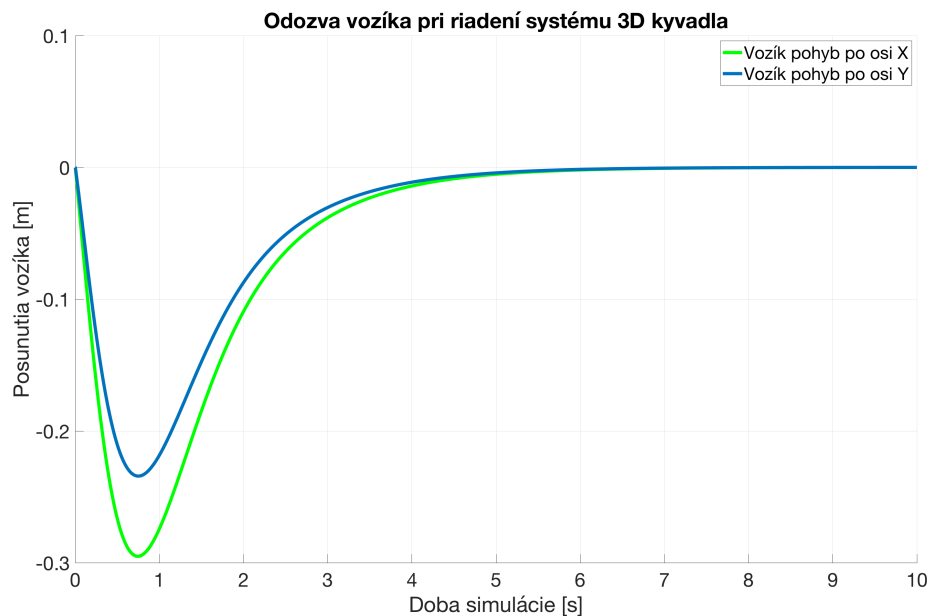
je znázornené na obrázku 3–1. Posledným krokom je zmeniť počiatkové podmienky z pôvodných počiatkových podmienok uvedených vo vzťahu 3.2 pre naklonenie kyvadla. Musíme najprv dvakrát kliknúť na subsystém a vojsť do bloku **Gimbal Joint > X Revolute Primitive (Rx) State Targets > Specify Position Targets** a vlastnosť **Value** nastaviť na hodnotu **12** [deg]. Tento postup opakujeme pre záložku **Y Revolute Primitive (Ry)**, kde nastavíme uhol na hodnotu **-15** [deg].

Schému stačí uložiť a je čas začať simulovať. Simulácia riadenia systému bude prebiehať pre stabilizovanie kyvadla do rovnovážneho stavu zo zmenených počiatkových podmienok. Na animácii hneď môžeme vidieť pohyb vozíka, ako svojím pohybom dostáva kyvadlo do pracovného bodu 3.2, v ktorom sme systém linearizovali. Okrem udržania kyvadla smerom nahor sa vozík postupne vráti na svoje miesto, v ktorom bolo linearizované, čiže v strede podložky.

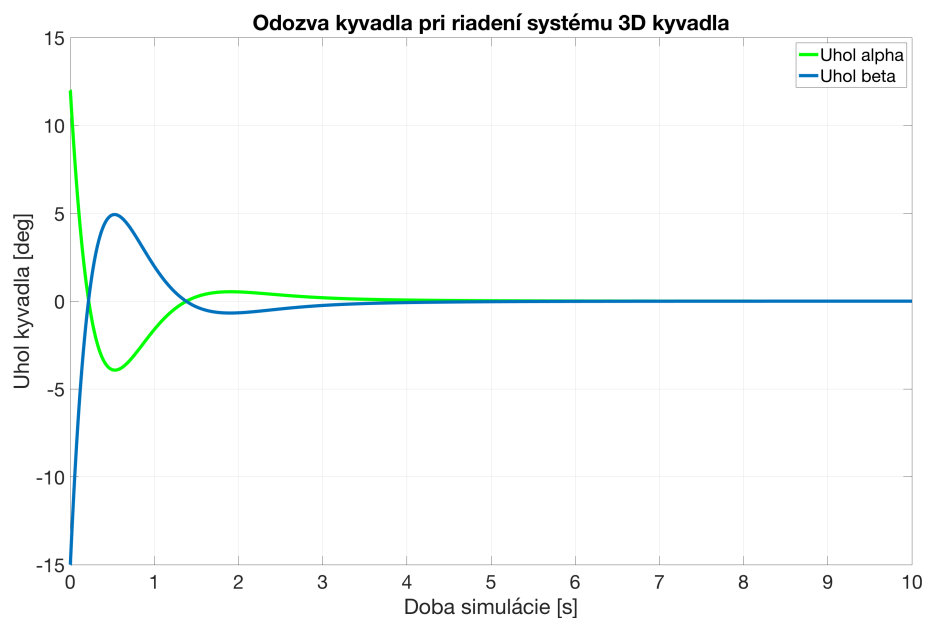
Pri riadení môžeme taktiež využiť možnosť nastaviť počiatkové podmienky pre vozík v bloku **Rectangular Joint**. Opakujeme rovnaký postup ako je napísaný vyššie, ale dávame pozor: tu sa zadávajú hodnoty v metroch. Zmenou parametrov s hodnotou **1000** a **0.01** pri volaní funkcie *lqr* môžeme sledovať rýchlosť odozvy regulátora. Priebeh polohy vozíka je znázornený na obrázku 3–2 a priebeh uhlov kyvadla je znázornený na obrázku 3–3.



Obr. 3–1 Výsledná simulačná schéma pre riadenie systému



Obr. 3–2 Dynamika vozíka pri riadení systému 3D kyvadla na vozíku



Obr. 3–3 Dynamika kyvadla pri riadení systému 3D kyvadla na vozíku

## 4 Záver

Knižnica Simscape Multibody ponúka zaujímavú a rýchlu možnosť modelovať systémy prostredníctvom fyzikálneho modelovania. Správne nastaveným blokom treba priradiť parametre a môžeme pozorovať odozvu systému priamo v okne Mechanics Explorer. Princíp fyzikálneho modelovania v Simscape Multibody nám umožňuje systém linearizovať v zvolenom pracovnom bode a navrhnúť na neho LQ riadenie. Fyzikálne modelovanie dokáže pomôcť študentom si lepšie predstaviť, čo systém robí a ako v skutočnosti vyzerá.

## Zoznam obrázkov

2-1 Schematické znázornenie systému 3D kyvadla . . . . .	2
2-2 Základné bloky pre modelovanie v Simscape Multibody . . . . .	3
2-3 Okno Mechanics Explorer so simulačnou schémou znázorňujúcou podložku . . . . .	4
2-4 Okno Mechanics Explorer so simulačnou schémou znázorňujúcou podložku s vozíkom . . . . .	5
2-5 Okno Mechanics Explorer so simulačnou schémou znázorňujúcou celý systém . . . . .	6
2-6 Výsledná simulačná schéma pre linearizáciu systému . . . . .	6
3-1 Výsledná simulačná schéma pre riadenie systému . . . . .	10
3-2 Dynamika vozíka pri riadení systému 3D kyvadla na vozíku . . . . .	11
3-3 Dynamika kyvadla pri riadení systému 3D kyvadla na vozíku . . . . .	11

## Zoznam tabuliek

2-1 Fyzikálne parametre 3D kyvadla . . . . .	1
--	---