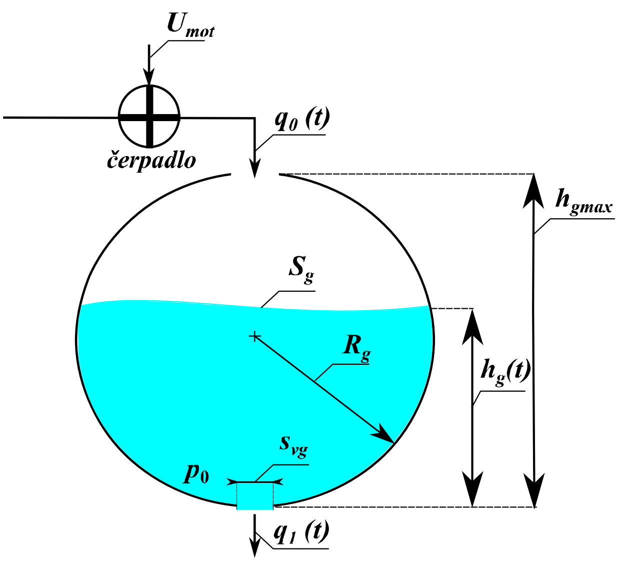
M3 Model "Guľová nádrž"

Úlohy:

1. **Zostavte matematický popis modelu M3**
2. **Vytvorte simulačný model**
   a. **Matlab**
      i. **riešenie funkciou ode45**
      ii. **riešenie naprogramovanou funkciou, ktorá využíva algoritmus metódy Runge Kutta**
   b. **Simulink**
      - **zostavenie programovej schémy metódou znižovania rádu derivácie**

3. **Simulujte dynamiku systému ako odozvu na rôzne vstupné signály**

Pre riešenie úloh uvažujeme nasledovné:



Parametre:

R_g - polomer guľovej nádoby

s_{vg} - plocha výtokového otvoru

ρ - hustota kvapaliny

g - gravitačné zrýchlenie

Fyzikálne veličiny:

$q_0\ (t)$ - prítok do nádrže

$q_1\ (t)$ - voľný odtok z nádrže

$S_g\,(h_g(t))$ - plocha hladiny

$h_g\ (t)$ - výška hladiny v nádrži

pozn.:Fyzikálne veličiny ďalej v texte sú uvedené nasledovne: $q_0\ (t) = q_0$, $q_1\ (t) = q_1$, $S_g\ (h_g(t)) = S_g$, $h_g\ (t) = h_g$.

Úloha 1: Zostavte matematický popis modelu M3

Matematický popis uvažovaného hydraulického systému získame využitím rovnice kontinuity $Q_m = \rho . S . v = konšt.$ ($v(t) = v$ - *rýchlosť prúdenia kvapaliny, v_0 - rýchlosť poklesu hladiny, v_1 - rýchlosť odtoku*), pre nestlačiteľnú kvapalinu:

$$\boxed{Q_m = S_g . v_0 = s_{vg} . v_1 = konšt.,} \tag{1.1}$$

ktorá hovorí, že hmotnostný tok Q_m vyjadrujúci objem kvapaliny s hustotou ρ, ktorý pretečie potrubím s prierezom S, rýchlosťou v za jednotku času, je v každom mieste potrubia konštantný. Pomocou Torriceliho vzorca $v = \sqrt{2 . g . h}$, ktorý platí pre rýchlosť výtoku kvapaliny v otvorom v nádobe, ktorý je od hladiny vzdialený o h_g, možno pre zmenu objemu kvapaliny v nádrži písať:

$$S_g . \frac{d\, h_g(t)}{dt} = q_0(t) - q_1(t) \tag{1.2}$$

(ďalej: $\dot{h}_g(t) = \frac{d\, h_g(t)}{dt}, q_0(t) = q_0, q_1(t) = q_1$) ,

$$S_g . \dot{h}_g(t) = q_0 - s_{vg} . v_1 \tag{1.3}$$

a výsledná diferenciálna rovnica je: $S_g . \dot{h}_g(t) = q_0 - s_{vg} . \sqrt{2 . g . h_g(t)}$, (1.4)

kde S_g je plocha prierezu nádrže, ktorá sa mení v závislosti od výšky hladiny. Táto závislosť je vyjadrená vzťahom:

$$S_g(h_g(t)) = \pi . (2 . R . h_g(t) - h_g{}^2(t)). \tag{1.5}$$

Úloha 2: Vytvorte simulačný model.

Vstupný prietok je pri reálnych modeloch závislý od napájacieho napätia U_{mot} čerpadla, pričom vzťah medzi napätím a prietokom q_0 je:

$$q_0 = a . U_{mot} + b \tag{2.1}$$

Vo vzorovom simulovanom modely je $a = 2{,}5 . 10^{-4}, b = 0$.
Simulačný model vytvoríme úpravou matematického modelu (diferenciálna rovnica) na substitučný kanonický tvar:

$$\boldsymbol{h_g(t) = x_1(t)} \tag{2.2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\dot{h}_g(t) = \dot{x}_1(t) = \frac{q_0 - s_{vg} . \sqrt{2 . g . x_1(t)}}{S_g} = \frac{q_0 - F_1 . \sqrt{2 . g . x_1(t)}}{\pi . (2 . R_g . x_1(t) - x_1{}^2(t))}}} \tag{2.3}$$

a. Matlab

Na základe rovníc (2.1) a (2.3) vytvoríme v Matlabe simulačný model ako:

i) riešenie funkciou ode45:

[t,y]=ode45(funkcia,[doba simulácie],[počiatočné podmienky]);

ii) riešenie naprogramovanou funkciou, ktorá využíva algoritmus metódy Runge Kutta

Na základe numerickej metódy riešenia diferenciálnych rovníc Runge Kutta navrhnite algoritmus a implementujte ho v prostredí Matlab, pričom:

pomocné premenné:

i - počítadlo

t - hodnota času v danom kroku

y - hodnota funkcie v danom kroku

výstupné premenné:

t_{out} []- vektor času

y_{out} []- vektor výsledných hodnôt funkcie

vstupné premenné:

t_s - počiatočný čas

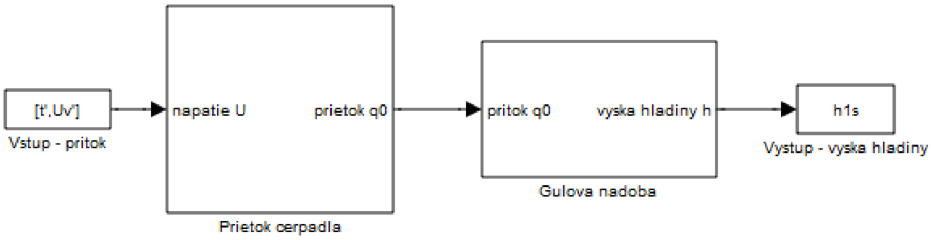
t_f - konečný čas

h - krok Runge Kutteho metódy

y_0 - počiatočná hodnota

b) Simulink - zostavenie programovej schémy metódou znižovania rádu derivácie

V jazyku Simulink vychádzame z rovnice (2.1) a (2.3), ale rovnicu realizujeme pomocou funkčných blokov.



Obr. 1 Programová schéma M3 v Simulinku

Úloha 3: Simulujte dynamiku systému ako odozvu na rôzne vstupné signály

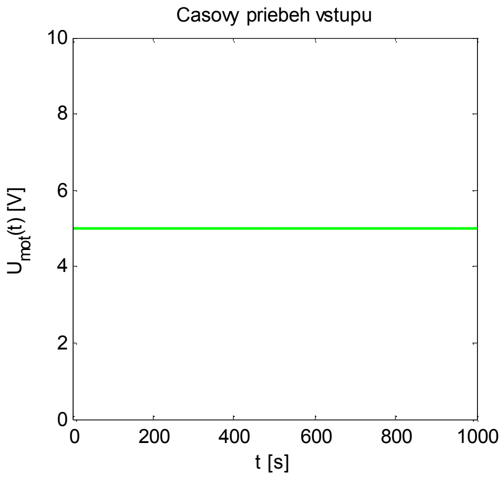
Parametre simulovaného modelu:

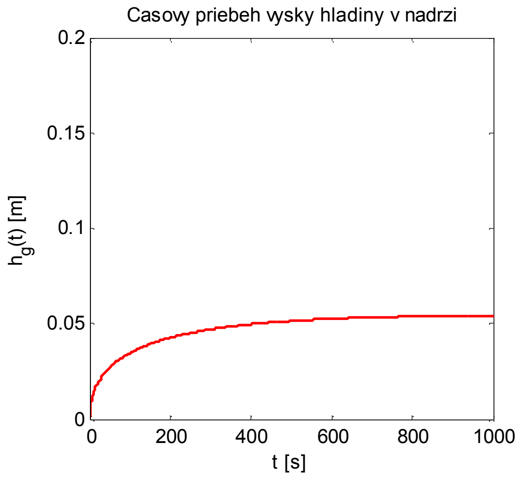
$R_g = 0.1$ m, $s_{vg} = 9.6211.10^{-6}$ m^2

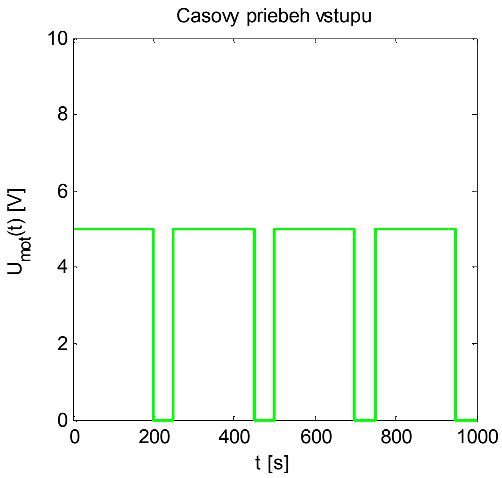
$T_{sim} = 1000$ s, $dT = 0.1$ s, $U_{mot} = 5V$

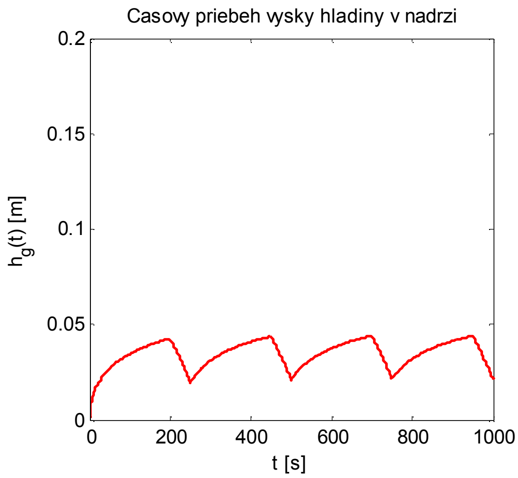
pozn.: minimálna výška hladiny začína na 0.01 m a maximálna končí na 0.199 m, pretože inak by došlo k deleniu 0 !

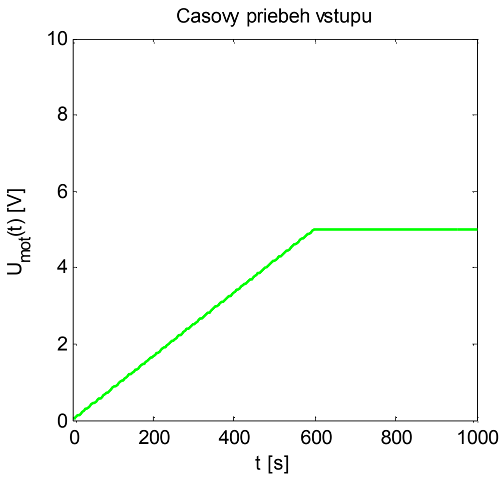
- **Simulačný model s počiatočnou podmienkou (počiatočnou výškou hladiny):** $h_g(0) = 0\ \mathrm{m}$

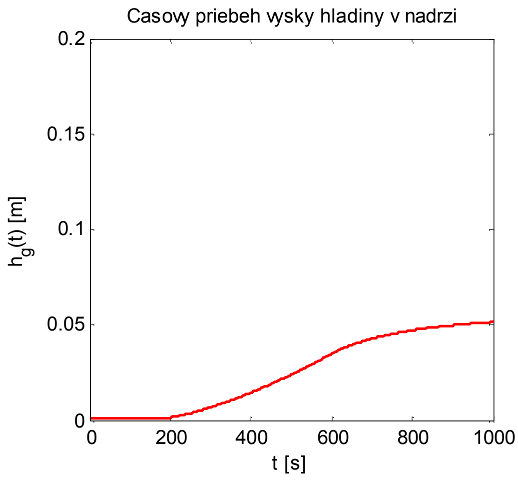












- **Simulačný model s počiatočnou podmienkou (počiatočnou výškou hladiny):** $h_g(0) = 0.199\ \mathrm{m}$