M8 Model "Valcová a kužeľová nádrž v sérií bez interakcie"

Úlohy:

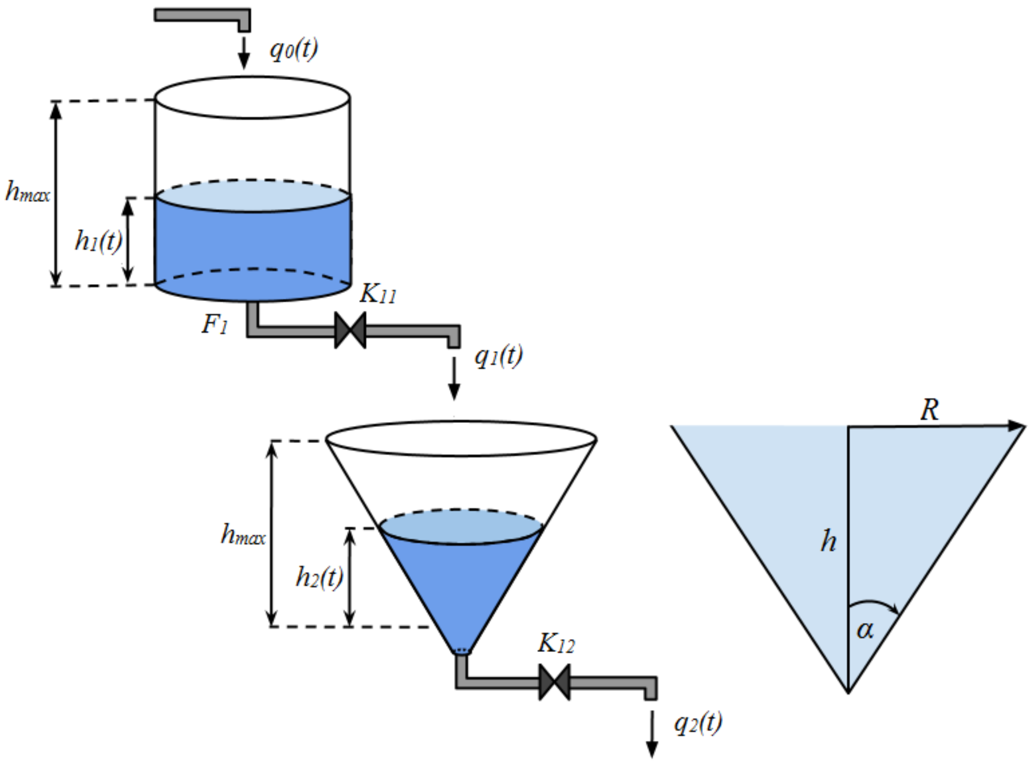
1. **Zostavte matematický popis modelu M8**
2. **Vytvorte simulačný model v prostredí:**
   a) **Simulink**
      - **zostavte blokovú schému, pomocou rozkladu na diferenciálne rovnice prvého rádu**

   b) **Matlab**
      - **riešenie funkciou ode45**
      - **linearizácia funkciou linmod a porovnajte s nelineárnym modelom**
3. **Simulujte dynamiku systému na rôzne vstupné prítoky a pri rôznych počiatočných hladinách**
4. **Navrhnite syntézu na model M8 v simulačnom prostredí Simulink:**
   a) **Výpočet parametrov PI regulátora pomocou metódy Butterworth (metóda štandardných tvarov)Simulink**

Doplňujúce úlohy:

1. **Linearizujte model M8 v inom pracovnom bode**
2. **Vykreslite frekvenčné charakteristiky modelu M8**

Pre riešenie úloh uvažujeme nasledovné:



Obr. 1 Schéma zapojenia modelu M8

Parametre: g - gravitačné zrýchlenie h_{max} – maximálna výška hladiny **Valcová nádrž:** F_1 - prierez nádrže K_{11} - konštanta výtokového ventilu **Kužeľová nádrž:** R - polomer α - uhol sklonu K_{12} - konštanta výtokového ventilu	**Fyzikálne veličiny:** **Valcová nádrž:** $q_0(t)$ - prítok do valcovej nádrže $q_1(t)$ - odtok z valcovej nádrže $h_1(t)$ - výška hladiny valcovej nádrže **Kužeľová nádrž:** $q_1(t)$ - prítok do kužeľovej nádrže $q_2(t)$ - odtok z kužeľovej nádrže $h_2(t)$ - výška hladiny valcovej nádrže

1. Zostavenie matematického modelu M8

Matematicko-fyzikálny model hydraulického systému (HS) M8 vytvoríme na základe materiálovej bilancie. Pre model M8 potom platia dve nelineárne diferenciálne rovnice (NDR) dané vzťahom:

$$F_1 \cdot \frac{dh_1(t)}{dt} = q_0(t) - q_1(t)$$

$$F_2(t) \cdot \frac{dh_2(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t) \tag{1}$$

Keďže prierez valcovej nádrže F_1 je konštantný, potrebujeme si vyjadriť nekonštantný prierez kužeľovej nádrže $F_2(t)$. Uhol sklonu nádrže α je daný ako pomer dĺžok odvesny k tomuto uhlu a dĺžky odvesny k nemu priľahlej. Podľa toho si vyjadríme priemer kužeľovej nádrže R.

$$F_2(t) = \pi \cdot R^2 \tag{2}$$

$$tan(\alpha) = \frac{R}{h(t)} \quad \rightarrow \quad R = tan(\alpha) \cdot h(t) \tag{3}$$

Pre odtok z nádrží je potom daná sústava rovníc (4), pričom použijeme substitúciu (5).

$$q_1(t) = K_{1vent} \cdot f_1 \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \sqrt{h_1(t)}$$

$$q_2(t) = K_{2vent} \cdot f_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \sqrt{h_2(t)} \tag{4}$$

$$K_{11} = K_{1vent} \cdot f_{1vent} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \quad \rightarrow \quad q_1(t) = K_{11} \cdot \sqrt{h_1(t)} \tag{5}$$

$$K_{12} = K_{2vent} \cdot f_{2vent} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \quad \rightarrow \quad q_2(t) = K_{12} \cdot \sqrt{h_2(t)}$$

Výsledná sústava dvoch NDR popisujúca model M8 vyzerá nasledovne:

$$\frac{\mathrm{dh_1(t)}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{q_0(t) - q_1(t)}}{\mathrm{F_1}}$$
$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{q_1(t) - q_2(t)}{\pi \cdot (\tan(\alpha) \cdot h_2(t))^2} \qquad (6)$$

Ako je vidieť pri kužeľovom tvare je v menovateli rovnice výška hladiny nádrže $h_2(t)$ v čase, ktorá nesmie byť nulová. Pred začatím simulácie je preto potrebné zadať nenulovú počiatočnú výšku hladiny, aby nedošlo k delení nulou.

2. Vytvorenie simulačného modelu M8

Simulačný model vytvoríme rozkladom NDR 6) na dve NDR prvého rádu. Vstupný prítok volíme v m^3/s. Substitučný kanonický tvar potom vyzerá nasledovne:

$$h_1(t) = x_1(t)$$

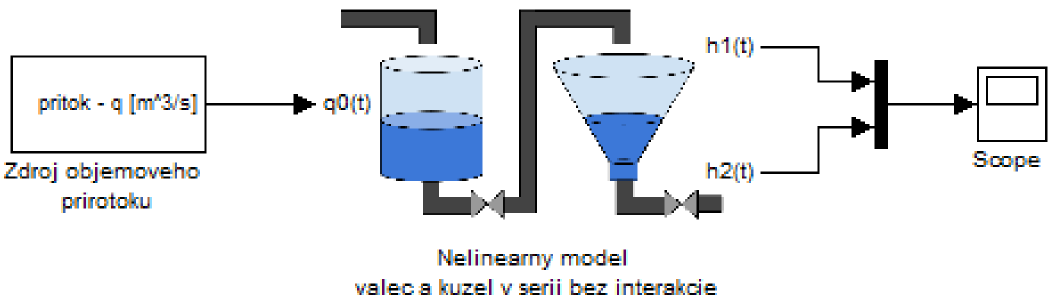
$$\boxed{h_1(t) = \dot{x}_1(t) = \frac{q_0(t) - K_{1vent} \cdot f_{1vent} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \sqrt{h_1(t)}}{F_1}} \qquad (7)$$

$$h_2(t) = x_2(t)$$

$$\boxed{h_2(t) = \dot{x}_2(t) = \frac{K_{1vent} \cdot f_{1vent} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \sqrt{h_1(t)} - K_{2vent} \cdot f_{2vent} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \sqrt{h_2(t)}}{\pi \cdot (tan(\alpha) \cdot h_2(t))^2}} \qquad (8)$$

a) Simulink

Z odvodených NDR (6) naprogramujeme simulačný model v prostredí Simulink metódou postupného znižovania rádu derivácie pomocou funkčných blokov.



Obr. 2 Programová schéma modelu M8 v Simulinku

b) Matlab

Z odvodených rovníc 6) vieme vytvoriť simulačný model v Matlabe ako:

- **Riešenie funkciou ode45**

```
[t,y] = ode45(fukcia, [doba simulácie], [počiatočné podmienky]);
```

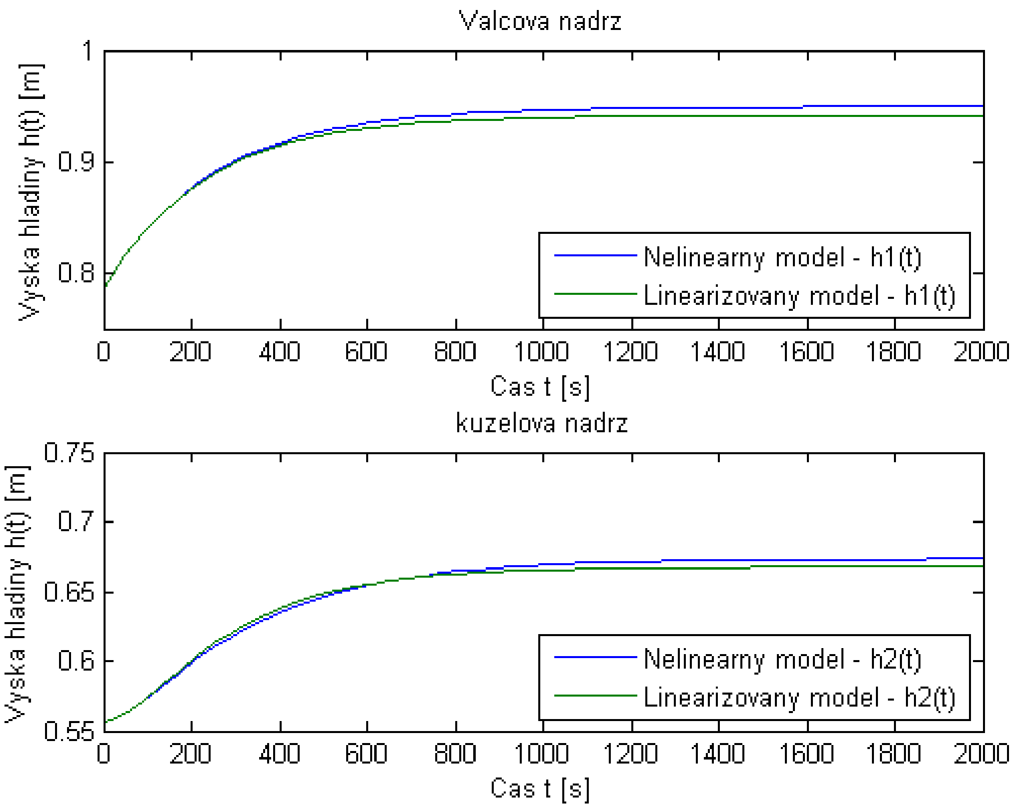
Linearizáciu modelu M8 použijeme funkciu linmod, ktorá linearizuje model vo zvolenom pracovnom bode v závislosti od zvoleného vstupu. Výsledkom je stavový opis modelu M8, ktorý prevedieme na prenosovú funkciu, z ktorej budeme navrhovať PI regulátor.

- **Linearizácia funkciou linmod**

```
[A,B,C,D]=linmod('názov schémy', pracovný bod, vstup);
sys=ss(A,B,C,D);
tf_sys =tf(sys)
```

Poznámka: Pri linearizácií funkciou linmod musí schéma obsahovať vstupný a výstupný port, pretože vstup je zadávaný funkciou linmod a výstupom je stavový opis modelu M8 (matice A,B,C,D).

Vektor vstupov a pracovných bodov je o počte rovnom rádu modelovaného systému.



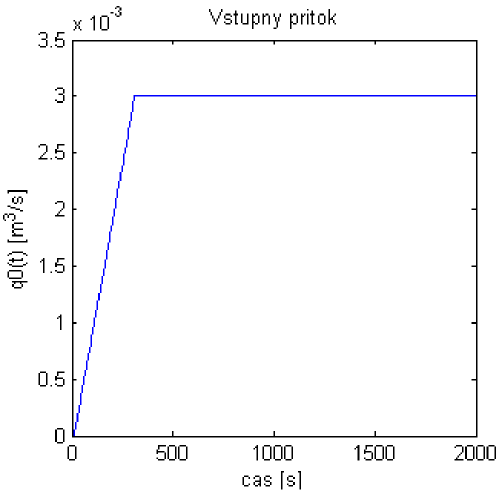
Obr. 3 Grafy porovnania nelineárneho a linearizovaného systému M8

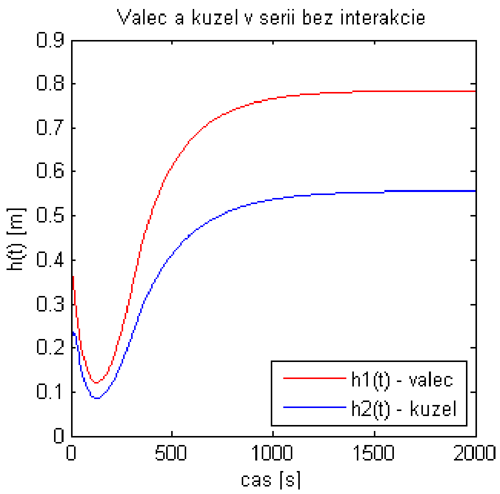
3. Simulácia systému na rôzne vstupy a počiatočných výškach hladín modelu M8

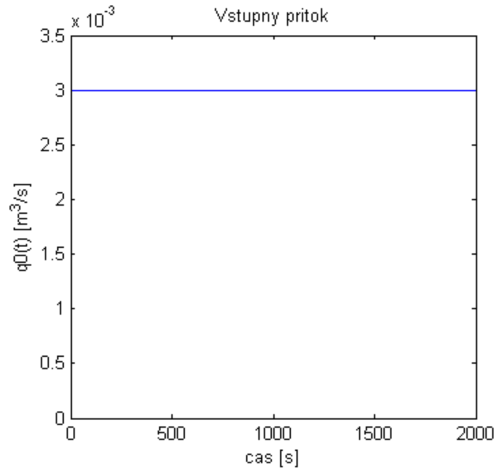
Parametre simulovaného obvodu:

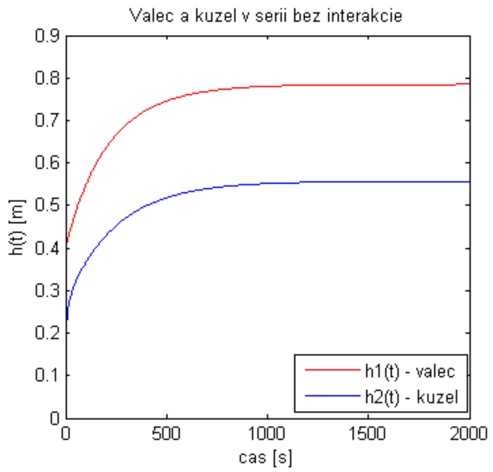
Valec: $F_1 = 0.4418$ m^2, $f_{1vent} = 7.6454e4$, $K_{1vent} = 1$, $puh = 0.4$, $mv = 1.4$ m
Kužeľ: $F_2 = 0.3318$ m^2, $f_{2vent} = 9.0792e4$, $\alpha = 35$ °, $K_{2vent} = 1$, $puh = 0.2$, $mv = 1$ m
$T_{sim} = 2500$ s, $P = 0.003$ m^3/s

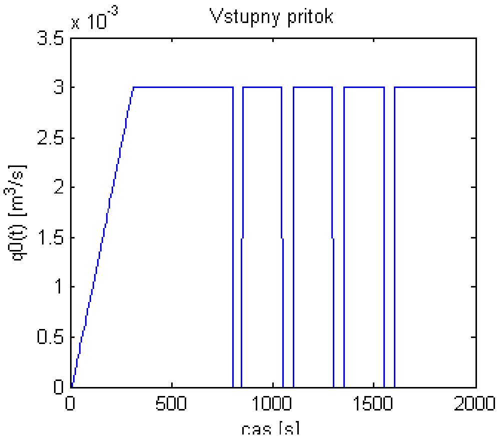
Simulácia s počiatočnými podmienkami:

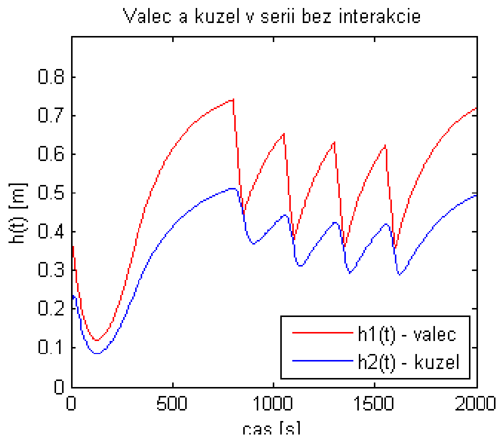












4. Syntéza modelu M8

c) Výpočet parametrov PI regulátora pomocou metódy Butterworth

Pri návrhu PI regulátora vychádzame z prenosovej funkcie uzavretého regulačného obvodu (URO). Túto prenosovú funkciu sme získali v Matlabe funkciou linmod. Charakteristická rovnica URO má tvar:

$$1 + F_r \cdot F_s = 0 \tag{9}$$

kde F_R je prenosová funkcia regulátora a F_S je prenosová funkcia systému (modelu M8).

Prenosová funkcia regulátora F_R v prípade PI regulátora je:

$$F_R = \mathrm{K} \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right), \tag{10}$$

pričom všeobecný tvar prenosovej funkcie je:

$$F_S = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Charakteristická rovnica URO (9) potom vyzerá nasledovne:

$$a_2 s^3 + a_1 s^2 + (a_0 + b_0 k)s + b_0 \frac{k}{T_i} = 0 \tag{11}$$

Pomocou Tab. 1 vypočítame koeficienty regulátora PI porovnaním koeficientov charakteristickej rovnice URO s charakteristickým polynómom príslušného stupňa tabuľky metódy Butterworth. Pričom pre platí, že pre v tabuľke je $q = \frac{s}{\omega_0}$.

Tab. 1 Štandardné tvary charakteristického polynómu URO - Butterworth

n-rád	Charakteristický polynóm
1	q + 1
2	$q^2 + 1{,}4q + 1$
3	$q^3 + 2q^2 + 2q + 1$
4	$q^4 + 2{,}61q^3 + 3{,}41q^2 + 2{,}61q + 1$