Matematický model robota s diferenciálnym kolesovým podvozkom

Demonštračný modul

1 Úlohy

1. Zostavte matematický model robota s diferenciálnym kolesovým podvozkom
2. Vytvorte simulačný model robota v simulačnom prostredí Simulink
3. Overte správnosť modelu pomocou odozvy systému na rôzne vstupné signály
4. Vytvorte algoritmus riadenia robota do bodu v simulačnom prostredí Simulink za pomoci vývojového diagramu
5. Simulujte správanie sa robota pri riadení robota do bodu a vykreslite prejdenú dráhu

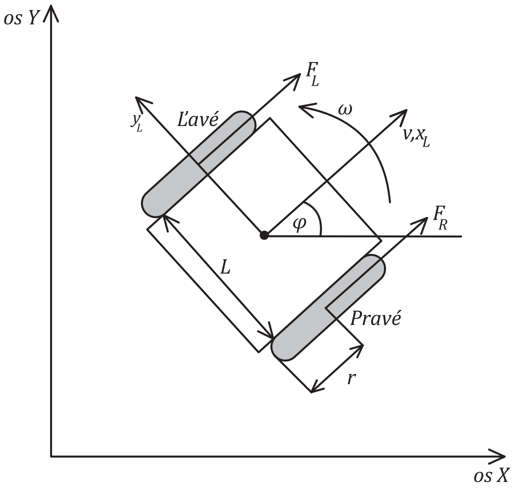
2 Zostavenie matematického modelu robota s diferenciálnym kolesovým podvozkom

Tabuľka 1: Parametre matematického modelu robota

Parameter	**Označenie**	**Hodnota**	**Jednotka**
Rozchod kolies	L	0.068	m
Polomer kolies	r	0.024	m
Maximálna sila motorov	F_{max}	1.5	N
Moment zotrvačnosti	J	0.0005	kgm^2
Hmotnosť	m	0.5	kg
Zosilnenie	P	0.2	$-$

Tabuľka 2: Fyzikálne veličiny matematického modelu robota

Fyz. veličina	**Označenie**	**Jednotka**
X-ová súradnica polohy robota	x	m
Y-ová súradnica polohy robota	y	m
Uhol natočenia robota	φ	rad
Celková lineárna rýchlosť robota	v	ms^{-1}
Celková uhlová rýchlosť robota	ω	$rads^{-1}$



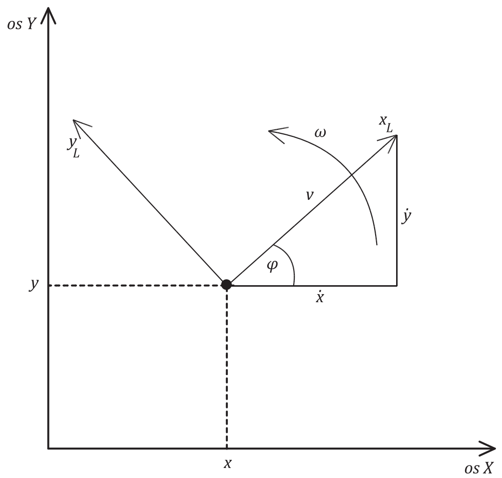
Matematický model robota s diferenciálnym kolesovým podvozkom sa skladá z kinematického a dynamického modelu. Pri modelovaní kinematického modelu robota s diferenciálnym podvozkom budeme vychádzať z predpokladu, že máme kotúč, ktorý sa pohybuje dopredu. Smer pohybu do strán je nulový $v_y = 0$. Rýchlosť kotúča v smere osi x sa dá vyjadriť ako:

$$v = v_x = r\dot{\theta}, \tag{2.1}$$

kde r je polomer kotúča a $\dot{\theta}$ je uhlová rýchlosť kotúča.

Ak zoberieme do úvahy, že lineárna rýchlosť v je zmena polohy v čase, tak po jednoduchom schematickom zobrazení kotúča v rovine, ktorý má svoju x, y polohu, uhol natočenia φ a lineárnu rýchlosť v dokážeme vďaka týmto poznatkom kinematický model jednoducho odvodiť. V pravouhlom trojuholníku je *cos* definovaný ako priľahla odvesna ku prepone a *sin* ako protiľahlá odvesna ku prepone. Uhlová rýchlosť ω je zmena uhla v čase, preto rovnice kinematického modelu majú tvar:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$



Prevodník pre prepočet lineárnej a uhlovej rýchlosti robota v, ω na lineárne rýchlosti pravého a ľavého kolesa v_R, v_L. Rovnice prevodníka majú tvar

$$\begin{bmatrix} v_R \\ v_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 1 & -\frac{L}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

Prevodník pre prepočet lineárnych rýchlostí pravého a ľavého kolesa robota v_R, v_L na uhlové rýchlosti jednotlivých kolies ω_R, ω_L má tvar

$$\begin{bmatrix} \omega_R \\ \omega_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_R \\ v_L \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

Prevodníky budú potrebné pri počte uhlových rýchlosti pravého a ľavého kolesa ω_R, ω_L na celkovú lineárnu a uhlovú rýchlosť robota v, ω a naopak.

Pomocou dynamiky sa snažíme priblížiť k reálnemu správaniu sa dvojkolesového robota v rovine. V tomto dynamickom modeli zoberieme do úvahy aj to, že robot má nenulovú hmotnosť m a moment zotrvačnosti J.

K odvodeniu rovníc bol použitý druhý Newtonov zákon, ktorý znie: Sila F je priamo úmerná hmotnosti telesa m a lineárneho zrýchlenia $\dot{v}$, ktoré táto sila vyvoláva.

$$F = m\dot{v} = ma \tag{2.5}$$

Druhú rovnicu dynamického modelu sme dostali na základe rovnice momentu síl, kde moment sily M je priamo úmerný polomeru otáčania, v našom prípade $\frac{L}{2}$ a sily F. Moment sily je takisto priamo úmerný momentu zotrvačnosti J a uhlovému zrýchleniu $\dot{\omega}$ pre otáčavý pohyb.

Rovnice dynamického modelu

$$m\frac{dv}{dt} = F_R + F_L, \tag{2.6}$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = \frac{L}{2}(F_R - F_L). \tag{2.7}$$

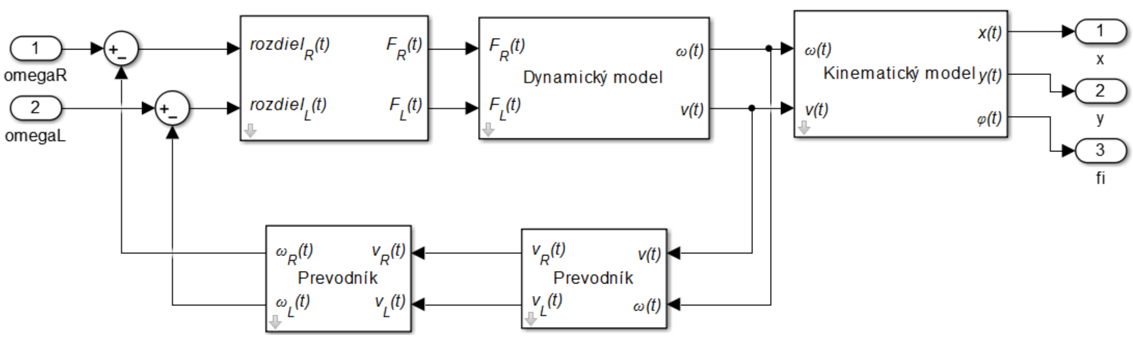
Ďalej k vytvoreniu matematického modelu bude potrebné pridať spätno - väzobnú slučku pre potlačenie dynamiky, kde sa na základe aktuálnej uhlovej rýchlosti pravého a ľavého kolesa ω_R, ω_L a požadovanej uhlovej rýchlosti pravého a ľavého kolesa ω_{Rp}, ω_{Lp} vypočíta sila F_R, F_L, ktorú dokážu vyvinúť motory robota. Spätno - väzobná slučka pre potlačenie vplyvu dynamiky je zostavená na základe rovníc, ktoré majú tvar

$$F_{R/L} = P(\omega_{Rref/Lref} - \omega_{R/L})\ pre\ |P(\omega_{Rref/Lref} - \omega_{R/L})| < F_{max}, \tag{2.8}$$

$$F_{R/L} = F_{max} sign(\omega_{Rref/Lref} - \omega_{R/L})\ pre\ |P(\omega_{Rref/Lref} - \omega_{R/L})| \geq F_{max}, \tag{2.9}$$

3 Simulačný model robota s diferenciálnym podvozkom v simulačnom prostredí Simulink

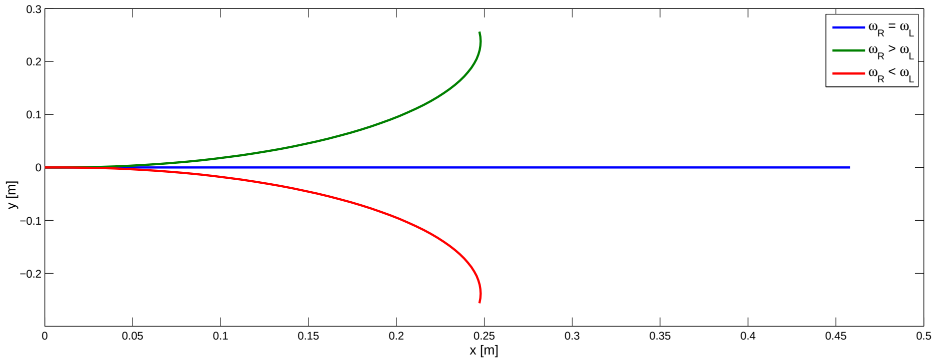
Na základe rovníc, ktoré sme si odvodili v predošlej kapitole sme zostavili simulačný model robota, kde programová schéma je zobrazená na nasledujúcom obrázku.



Obr. 1: Simulačný model robota s diferenciálnym kolesovým podvozkom

4 Odozva simulačného modelu robota na rôzne vstupne hodnoty uhlových rýchlosti kolies

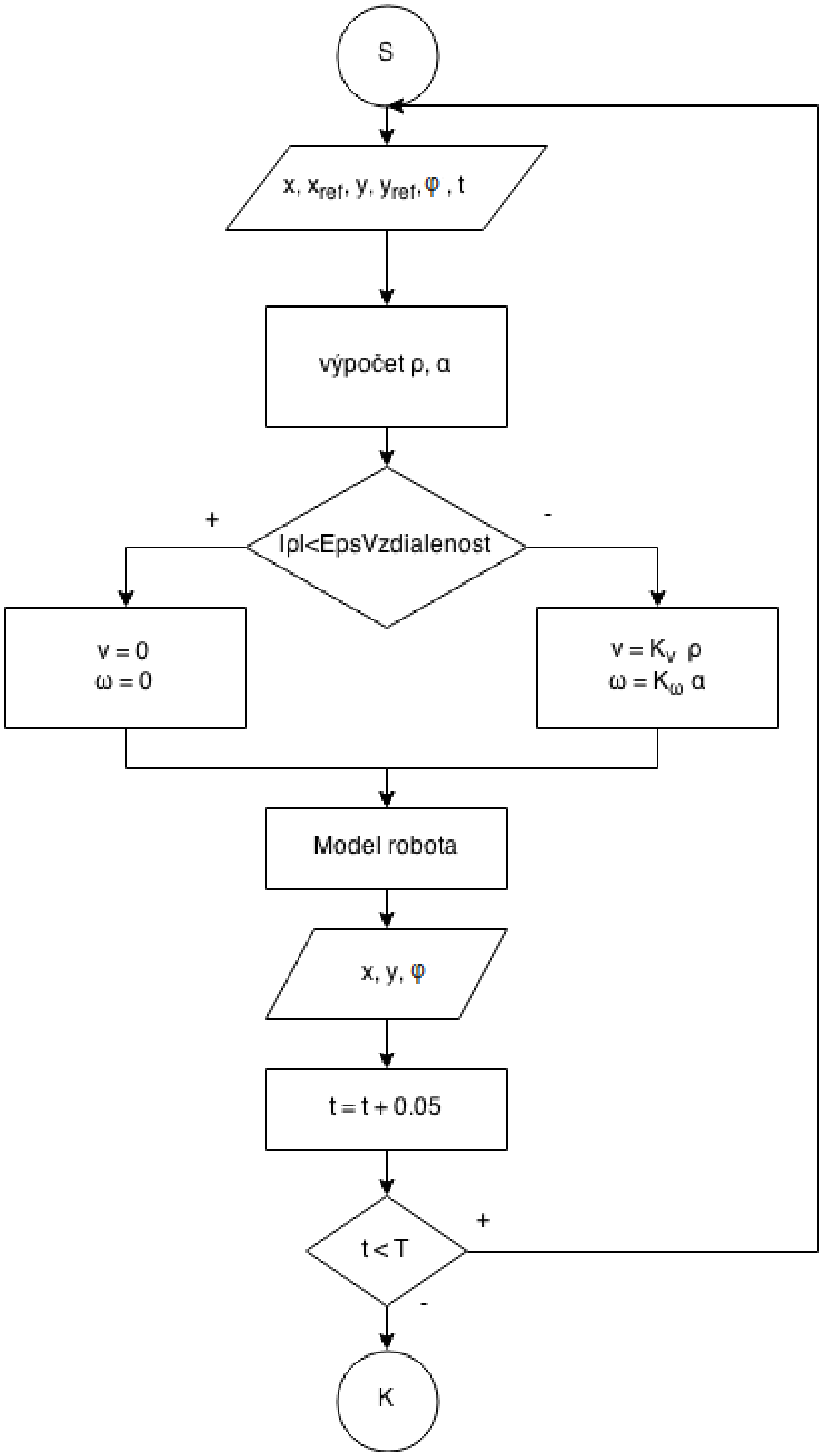
Overíme funkčnosť simulačného modelu robota pre celkovú hmotnosť a moment zotrvačnosti tým, že na vstup modelu budeme privádzať hodnoty uhlových rýchlosti kolies a pozorovať správanie robota. Percentuálny pomer hodnôt uhlových rýchlostí je 100 : 100, potom 100 : 75 a nakoniec 75 : 100. Výsledkom je dráha robota, ktorú prešiel. V našom prípade je počiatočná poloha robota $x = 0$, $y = 0$ a uhol natočenia $\varphi = 0\ rad$.



Obr. 2: Verifikácia matematického modelu robota

5 Algoritmus riadenia robota do bodu

Vývojový diagram algoritmu riadenia robota do bodu zobrazený na nasledujúcom obrázku.



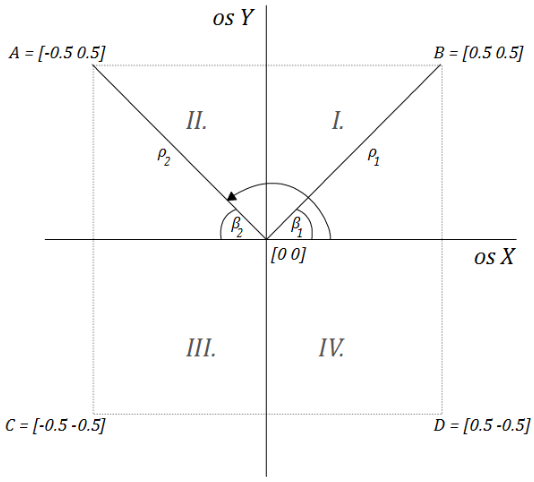
Obr. 3: Vývojový diagram algoritmu riadenia do bodu

Vzdialenosť robota ρ od bodu bude počítaná pomocou euklidovskej vzdialenosti

$$\rho = \sqrt{(x_{ref} - x)^2 + (y_{ref} - y)^2}, \tag{5.1}$$

kde x_{ref}, y_{ref} sú súradnice polohy bodu a x, y sú súradnice polohy robota. Uhol medzi priamkou vzdialenosti a vodorovnou osou x označíme β a vypočítame na základe rovnice

$$\beta = \tan^{-1} \frac{(y_{ref} - y)}{(x_{ref} - x)} \tag{5.2}$$



Problém nastáva pri výpočte uhla β v II. a IV. kvadrante. Súradnice polohy robota sú [0 0]. Použitím (5.2) dostávame, že uhol k bodu [0.5 0.5] vzhľadom ku polohe robota je $\beta_1 = \frac{\pi}{4} rad$. Uhol k bodu $[-0.5\ 0.5]$ vzhľadom ku polohe robota je $\beta_2 = -\frac{\pi}{4}\ rad$. Tu nastáva problém pri výpočte uhla β_2 pomocou (5.2). Pre potreby riadenia je nutné, aby sa k uhlu β pripočítalo alebo odpočítalo π vzhľadom na nasledujúce podmienky.

$$Ak\ x_{ref} < x\ a\ y_{ref} \geq 0\ potom\ \delta = \beta + \pi, \tag{5.3}$$

$$Ak\ x_{ref} < x\ a\ y_{ref} < 0\ potom\ \delta = \beta - \pi, \tag{5.4}$$

$$Ak\ x_{ref} \geq x\ potom\ \delta = \beta. \tag{5.5}$$

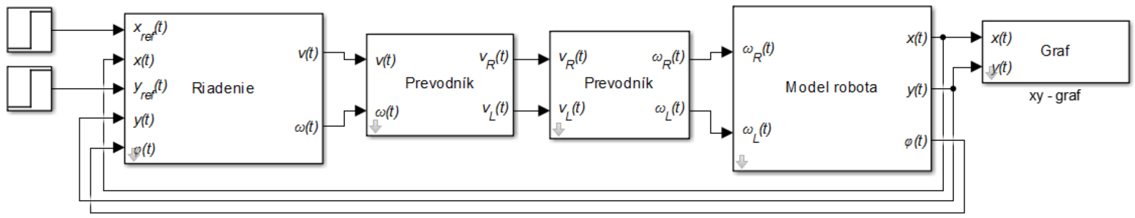
Výsledná odchýlka uhla natočenia robota α sa vypočíta ako

$$\alpha = \delta - \varphi \tag{5.6}$$

Následne ak vzdialenosť $\rho < EpsVzdialenost$, čo indikuje, že robota sa nachádza v okolí bodu, tak celková lineárna a uhlová rýchlosť v, ω je nulová. Inak sa celková lineárna a uhlová rýchlosť v, ω vypočíta ako

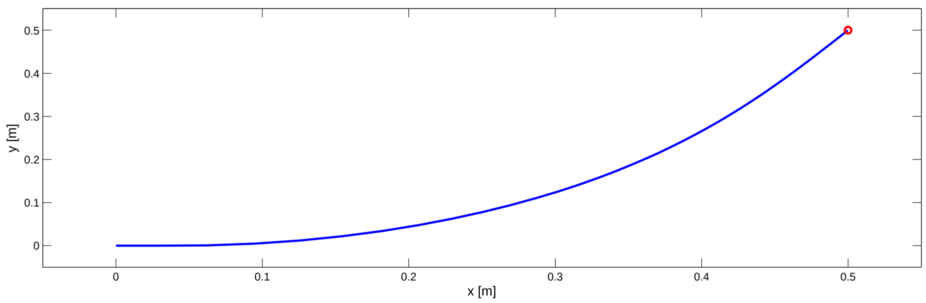
$$v = K_v \rho, \tag{5.7}$$

$$\omega = K_\omega \alpha. \tag{5.8}$$

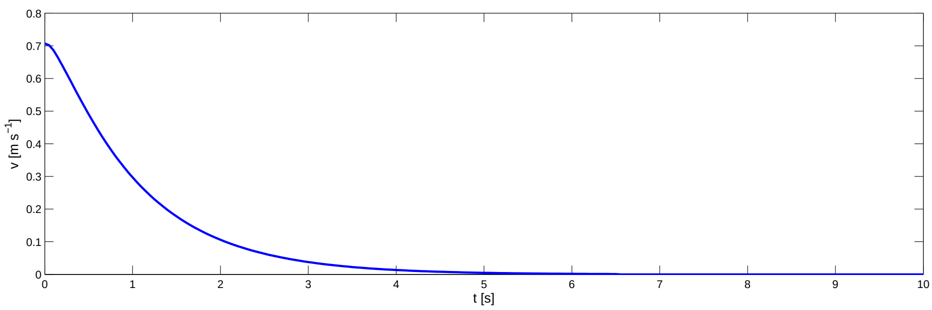


Obr. 4: Uzavretý regulačný obvod

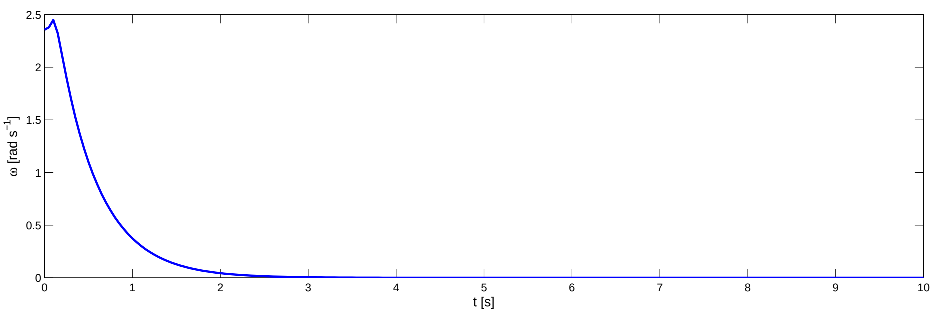
Cieľom riadenia je bod so súradnicami $x_{ref} = 0.5$, $y_{ref} = 0.5$. Počiatočná poloha robota je $x = 0$, $y = 0$ a uhol natočenia robota je $\varphi = 0rad$. Výstupom je graf dráhy robota, ktorú prešiel.



Obr. 5: Riadenie robota do bodu [0.5 0.5]



Obr. 6: Graf požadovanej celkovej lineárnej rýchlosti v pri riadení robota do bodu



Obr. 7: Graf požadovanej celkovej uhlovej rýchlosti ω pri riadení robota do bodu