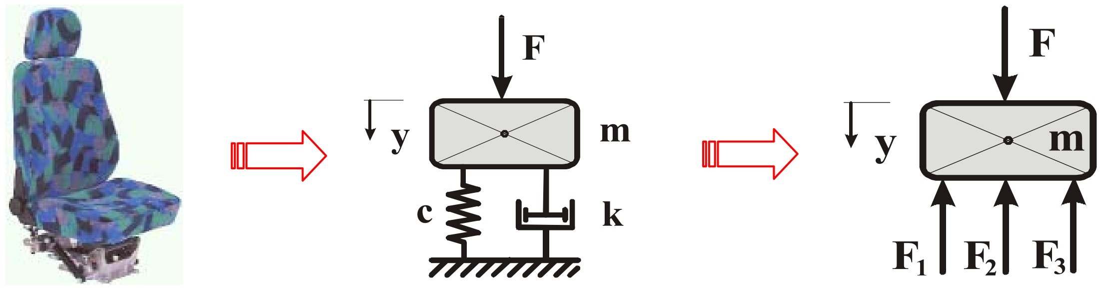
DYNAMIKA PRACOVNÍ SEDAČKY ŘIDIČE

ČTENÍ POTŘETÍ

(LEVEL 3 – Laplaceova transformace jako nástroj řešení lineárních diferenciálních rovnic.)

Podívejme se tentokrát na dynamiku pracovní sedačky řidiče prizmatem matematiky aneb – trocha teorie jistě nikomu neuškodí ...

Matematickým modelem sedačky je diferenciální rovnice, jejíž řešení popisuje její pohyb. Připomeňme její odvození.



$\mathbf{F} = \mathbf{m_2} \cdot \mathbf{g}$	…	váha řidiče
$\mathbf{F_1} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{y}$	…	reakce pružiny
$\mathbf{F_2} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{y'} = \mathbf{k} \cdot dy/dt$	…	reakce tlumiče
$\mathbf{F_3} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{y''} = \mathbf{m} \cdot d^2\mathbf{y}/dt^2$	…	setrvačný odpor

$$\mathbf{F_3} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_1} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{y''} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{y'} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{F}$$

$\mathbf{m} = \mathbf{m_1} + \mathbf{m_2}$

$\mathbf{m_1}$	…	hmotnost sedačky
$\mathbf{m_2}$	…	hmotnost řidiče
$\mathbf{g}$	…	gravitační zrychlení
$\mathbf{c}$	…	koeficient tuhosti pružiny
$\mathbf{k}$	…	koeficient tlumení tlumiče

Pro konkrétní hodnoty :

$\mathbf{m_1} = 20$ kg $\quad \mathbf{m_2} = 80$ kg
$\mathbf{g} = 10$ m/s^2
$\mathbf{c} = 8 \cdot 10^3$ N/m
$\mathbf{k} = 2{,}4 \cdot 10^3$ Ns/m

$\mathbf{m} = \mathbf{m_1} + \mathbf{m_2} = 20 + 80 = 100$ kg
$\mathbf{F} = \mathbf{m_2} \cdot \mathbf{g} = 80 \cdot 10 = 800$ N

nabývá diferenciální popis tvaru : $\boxed{100 \cdot \mathbf{y''} + 2400 \cdot \mathbf{y'} + 8000 \cdot \mathbf{y} = \mathbf{F}}$

Poloha sedačky **y** je vztažena k ustálenému stavu, odpovídajícímu deformaci pružiny vyvolané samotnou její váhou bez vnějšího zatížení. Váhu řidiče lze považovat za vnější sílu **F** [N] působící na sedačku. Poznamenejme, že kladnou výchylku **y** simulované reakce je nutné chápat tak, jak je naznačeno na obrázku, tedy prosednutí směrem dolů.

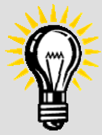
Předpokládejme, že v ustáleném klidovém stavu sedačky (nulové počáteční podmínky : $\mathbf{y}(0) = 0$, $\mathbf{y}'(0) = 0$) dosedne náhle řidič a vyvolá tak její pohyb. Řešení diferenciální rovnice za těchto podmínek a s tímto buzením analyticky popisuje vyvolaný pohyb.

Řešení :

Nejprve připomeňme statickou úvahu uvedenou již v první části textu. Jedná se o určení $\mathbf{y}(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{y}(t)$, tj. celkové prosednutí sedačky v ustáleném stavu, po odeznění přechodového děje. Tuto hodnotu můžeme určit velmi snadno i jednoduchou úvahou bez použití složité matematiky (matematický rozbor však musí tento závěr samozřejmě potvrdit).

Z fyzikální podstaty je zřejmé, že se jedná o **stabilní** systém v tom smyslu, že po dosednutí řidiče na sedačku dojde k přechodovému ději, který se za konečný čas prakticky ustálí. Po dostatečně dlouhé době $t \to \infty$ proto platí : $\mathbf{F} \to \mathbf{F}(\infty) = 800$, $\mathbf{y}'' \to \mathbf{y}''(\infty) = 0$, $\mathbf{y}' \to \mathbf{y}'(\infty) = 0$, $\mathbf{y} \to \mathbf{y}(\infty) \neq 0$. Diferenciální popis tak přechází do tvaru :

$$100 \,.\, \underbrace{\mathbf{y}''(\infty)}_{0} + 2400 \,.\, \underbrace{\mathbf{y}'(\infty)}_{0} + 8000 \,.\, \mathbf{y}(\infty) \;=\; \underbrace{\mathbf{F}(\infty)}_{800}$$



$$8000 \,.\, \mathbf{y}(\infty) \;=\; 800$$

$$\underline{\mathbf{y}(\infty) \;=\; 0{,}1 \text{ m} = 10 \text{ cm}}$$

Zabývejme se dále pohybem sedačky po dosednutí řidiče. Její pohyb je analyticky popsán v čase řešením uvedené diferenciální rovnice. Řešme ji pomocí **Laplaceovy transformace**. Je to velmi jednoduchý a efektivní aparát, který nám umožní převést lineární diferenciální rovnici na rovnici algebraickou, v tomto tvaru pak nalézt řešení (jeho obraz) a opět ho převést zpět do časové oblasti. Byť tento postup vypadá na první pohled složitě, řešení diferenciální rovnice je tímto způsobem velmi jednoduché. K formálnímu řešení vystačíme s několika málo korespondencemi a vlastnostmi, viz příloha na konci tohoto textu. Obraz diferenciální rovnice nalezneme snadno :

$$\boxed{100 \,.\, \mathbf{y}'' + 2400 \,.\, \mathbf{y}' + 8000 \,.\, \mathbf{y} \;=\; \mathbf{F}}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &\doteqdot \mathbf{Y}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{y}'(t) &\doteqdot \mathbf{s}\,\mathbf{Y}(\mathbf{s}) - \mathbf{y}(0+) \\ \mathbf{y}''(t) &\doteqdot \mathbf{s}^2\mathbf{Y}(\mathbf{s}) - \mathbf{s}\,\mathbf{y}(0+) - \mathbf{y}'(0+) \end{aligned}\right\} \qquad \text{viz příloha na konci textu}$$

$$\mathbf{F}(t) \doteqdot 800 / \mathbf{s} \;=\; \mathbf{F}(s)$$

$$\boxed{100 \,.\, [\, \mathbf{s}^2\mathbf{Y}(\mathbf{s}) - \mathbf{s}\,\mathbf{y}(0+) - \mathbf{y}'(0+)\,] + 2400 \,.\, [\, \mathbf{s}\,\mathbf{Y}(\mathbf{s}) - \mathbf{y}(0+)\,] + 8000 \,.\, \mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \mathbf{F}(\mathbf{s})}$$

Obraz diferenciální rovnice je rovnice algebraická s jedinou neznámou $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$, obrazem řešení :

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \frac{1}{100\,\mathbf{s}^2 + 2400\,\mathbf{s} + 8000}\;\mathbf{F}(\mathbf{s}) \;+\; \frac{\mathbf{s}\,.\,100\,\mathbf{y}(0+) + [\,100\,\mathbf{y}'(0+) + 2400\,\mathbf{y}(0+)\,]}{100\,\mathbf{s}^2 + 2400\,\mathbf{s} + 8000}$$

vyjádřili jsme tak obraz reakce dynamického systému pro jakékoliv buzení a počáteční podmínky, v našem konkrétním případě však :

$$\mathbf{y}(0+) = \mathbf{y}'(0+) = 0 \qquad ; \qquad \mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{800}{\mathbf{s}}$$

$$\underline{\mathbf{Y}(\mathbf{s})} = \frac{1}{100\,\mathbf{s}^2 + 2400\,\mathbf{s} + 8000} \cdot \frac{800}{\mathbf{s}} = \frac{8}{(\,\mathbf{s}^2 + 24\,\mathbf{s} + 80\,)\,\mathbf{s}} = \underline{\frac{8}{(\,\mathbf{s}+4\,)(\,\mathbf{s}+20\,)\,\mathbf{s}}}$$

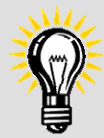
Poznámka :

Hodnotu $\mathbf{y}(\infty)$ reakce sedačky po odeznění přechodového děje můžeme ověřit již v této fázi řešení z nalezeného obrazu $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ využitím limitních korespondencí mezi obrazem a předmětem (viz příloha na konci textu).

$$\mathbf{y}(\infty) = \lim_{s\to 0} \mathbf{s}\,\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \lim_{s\to 0} \frac{8}{(\,\mathbf{s}+4\,)(\,\mathbf{s}+20\,)} = 0,1$$

SROVNEJ !

Použitím druhé limitní korespondence určíme naopak začátek pochodu, který musí být v souladu se zadanými počátečními podmínkami.



$$\mathbf{y}(0+) = \lim_{s\to\infty} \mathbf{s}\,\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \lim_{s\to\infty} \frac{8}{(\,\mathbf{s}+4\,)(\,\mathbf{s}+20\,)} = 0$$

$$\boxed{\mathbf{y}'(\mathrm{t}) \doteqdot \mathbf{s}\,\mathbf{Y}(\mathbf{s}) - \mathbf{y}(0+) = \frac{8}{(\,\mathbf{s}+4\,)(\,\mathbf{s}+20\,)}}$$

$$\mathbf{y}'(0+) = \lim_{s\to\infty} \frac{8\,\mathbf{s}}{(\,\mathbf{s}+4\,)(\,\mathbf{s}+20\,)} = 0$$

Ověření shody těchto limitních hodnot v této fázi řešení je vhodnou kontrolou správnosti nalezeného obrazu. Poznamenejme však, že shoda hodnot nedokazuje správnost obrazu, ale naopak rozpor by prokázal chybu.

Řešení popisující pohyb sedačky v reálném čase získáme zpětnou Laplaceovou transformací. Nejprve obraz rozložíme na součet parciálních zlomků, které pak postupně podle slovníku korespondencí uvedených v příloze na konci textu převedeme do hledaného předmětu.

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \frac{8}{\mathbf{s}\,(\,\mathbf{s}+4\,)(\,\mathbf{s}+20\,)} = \frac{\mathrm{A}}{\mathbf{s}} + \frac{\mathrm{B}}{(\,\mathbf{s}+4\,)} + \frac{\mathrm{C}}{(\,\mathbf{s}+20\,)}$$

$$\mathrm{A} = \lim_{s\to 0} \mathbf{Y}(\mathbf{s})\cdot\mathbf{s} = \lim_{s\to 0} \frac{8}{(\,\mathbf{s}+4\,)(\,\mathbf{s}+20\,)} = 0,1$$

$$\mathrm{B} = \lim_{s\to -4} \mathbf{Y}(\mathbf{s})\cdot(\,\mathbf{s}+4\,) = \lim_{s\to -4} \frac{8}{\mathbf{s}\,(\,\mathbf{s}+20\,)} = -\frac{1}{8} = -0,125$$

$$\mathrm{C} = \lim_{s\to -20} \mathbf{Y}(\mathbf{s})\cdot(\,\mathbf{s}+20\,) = \lim_{s\to -20} \frac{8}{\mathbf{s}\,(\,\mathbf{s}+4\,)} = \frac{1}{40} = 0,025$$

Poznámka :

Koeficienty parciálních zlomků lze určit i jiným způsobem. Sečteme-li formálně uvažované parciální zlomky a srovnáme-li koeficienty u příslušných mocnin vzniklého polynomu v čitateli s polynomem čitatele rozkládaného obrazu, dostaneme soustavu algebraických rovnic, jejíž řešením jsou hledané koeficienty (tzv.metoda neurčitých koeficientů).

$$\mathbf{Y(s)} = \frac{A}{\mathbf{s}} + \frac{B}{(\mathbf{s}+4)} + \frac{C}{(\mathbf{s}+20)} = \frac{A(\mathbf{s}+4)(\mathbf{s}+20)+B\mathbf{s}(\mathbf{s}+20)+C\mathbf{s}(\mathbf{s}+4)}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+4)(\mathbf{s}+20)} =$$

$$= \frac{\mathbf{s}^2(A+B+C)+\mathbf{s}\,(24A+20B+4C)+80A}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+4)(\mathbf{s}+20)} = \frac{8}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+4)(\mathbf{s}+20)}$$

$$\left.\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ 24A+20B+4C &= 0 \\ 80A &= 8 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A &= 0{,}1 \\ B &= -0{,}125 \\ C &= 0{,}025 \end{aligned}$$

Metoda neurčitých koeficientů se zdá být jednodušší (snad je i častěji používaná), výpočet je však v obecném případě pracnější. Uvedený přístup s limitními manipulacemi je vysoce efektivní zejména v případě reálných jednonásobných kořenů jmenovatele rozkládané funkce.

Poznámka :

Povšimněme si, že koeficienty A, B, C parciálních zlomků jsou rezidua obrazu **Y**(**s**) v jeho singulárních bodech (pólech) – a také se tak jako rezidua i počítají. Vzhledem ke stupňům polynomů čitatele (nula) a jmenovatele (tři) obrazu musí být jejich součet roven nule. *(Součet reziduí je roven podílu koeficientů (n-1)-ní mocniny **s** čitatele a n-té mocniny **s** jmenovatele, kde n je nevyšší **s** mocnina ve jmenovateli – obraz musí být racionální lomená funkce ryzí.)*

Tato kontrola je vhodným ověřením správnosti rozkladu. Ale pozor ! V případě vícenásobných pólů nejsou obecně koeficienty všech parciálních zlomků rezidua rozkládaného obrazu. V tomto případě je nutné i uvedený výpočet koeficientů parciálních zlomků poněkud modifikovat, viz např. /1/.

Pokud máme obraz **Y**(**s**) rozložený na součet parciálních zlomků, jsme již jen kousíček od hledaného řešení diferenciální rovnice. Z integrální podstaty Laplaceovy transformace totiž vyplývá, že obraz součtu dílčích funkcí se rovná součtu jejich obrazů (a obráceně). Můžeme proto velmi jednoduše nalézt pomocí slovníku L-transformace předměty odpovídající jednotlivým parciálním zlomkům a vyjádřit hledané řešení jejich součtem.

$$\mathbf{Y(s)} = \frac{0{,}1}{\mathbf{s}} + \frac{-0{,}125}{(\mathbf{s}+4)} + \frac{0{,}025}{(\mathbf{s}+20)}$$

Výsledné řešení

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = (0{,}1 - 0{,}125\cdot e^{-4t} + 0{,}025\cdot e^{-20t})\cdot \boldsymbol{\eta}(t)}$$

Symbol $\boldsymbol{\eta}(t) = \begin{cases} 1 & \textit{pro}\ t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(tzv.Heavisideův jednotkový skok) formálně ošetřuje platnost uvedeného vztahu jen pro $t \ge 0$.

Rychlost pohybu sedačky určíme jako derivaci

$$\underline{\mathbf{y}'(t) = (0{,}5\cdot e^{-4t} + 0{,}5\cdot e^{-20t})\cdot \boldsymbol{\eta}(t)}$$

Ověřme správnost limitních hodnot řešení na začátku a na konci děje :

$$\mathbf{y}(0+) \;=\; \lim_{t\to 0+} \mathbf{y}(t) \;=\; \lim_{t\to 0+} \left(0{,}1 - 0{,}125\cdot e^{-4t} + 0{,}025\cdot e^{-20t} \right) \;=\; 0$$

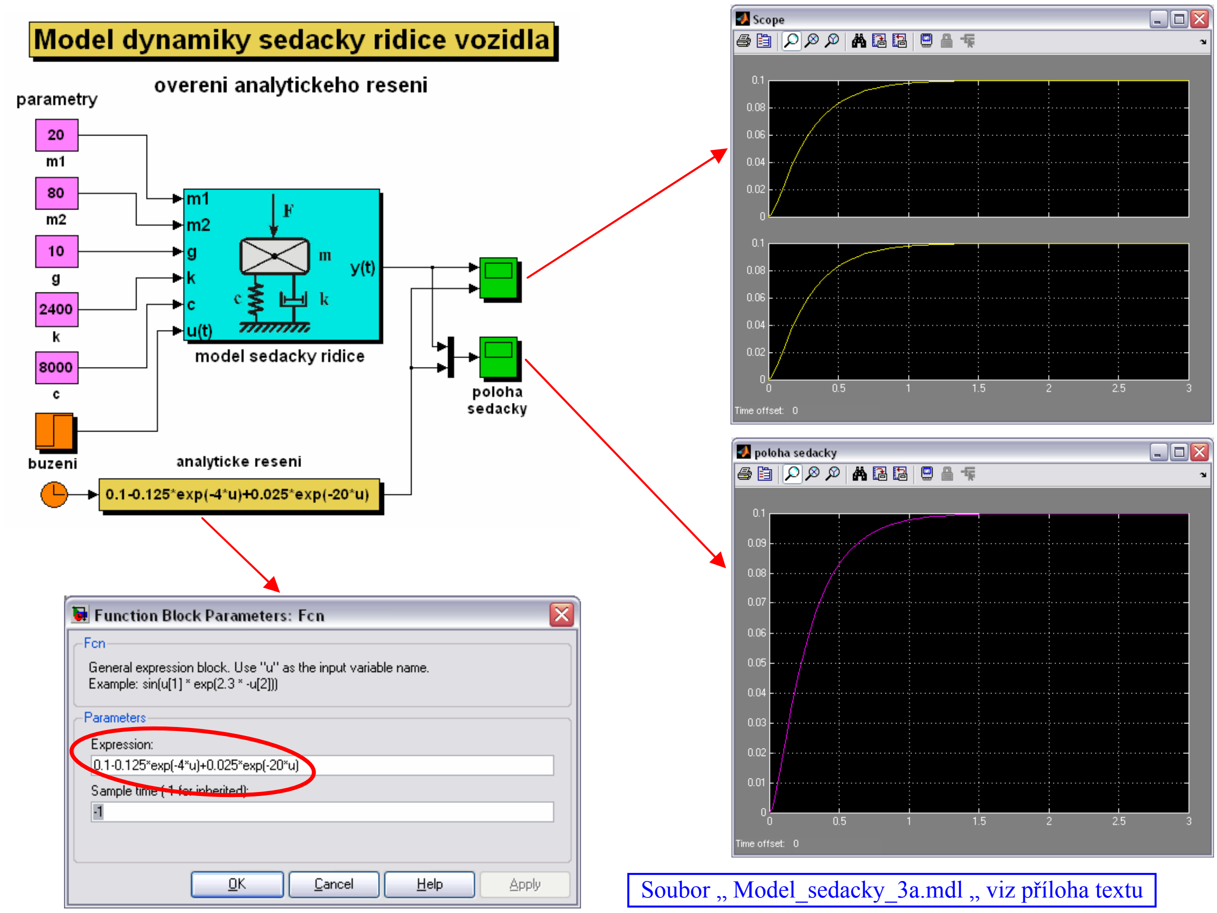
$$\mathbf{y}'(0+) \;=\; \lim_{t\to 0+} \mathbf{y}'(t) \;=\; \lim_{t\to 0+} \left(0{,}5\cdot e^{-4t} + 0{,}5\cdot e^{-20t} \right) \;=\; 0$$

$$\mathbf{y}(\infty) \;=\; \lim_{t\to \infty} \mathbf{y}(t) \;=\; \lim_{t\to \infty} \left(0{,}1 - 0{,}125\cdot e^{-4t} + 0{,}025\cdot e^{-20t} \right) \;=\; 0{,}1$$

$$\mathbf{y}'(\infty) \;=\; \lim_{t\to \infty} \mathbf{y}'(t) \;=\; \lim_{t\to \infty} \left(0{,}5\cdot e^{-4t} + 0{,}5\cdot e^{-20t} \right) \;=\; 0$$

SROVNEJ !

Ověření analytického a simulačního výsledku simulací v prostředí Matlab - Simulink :

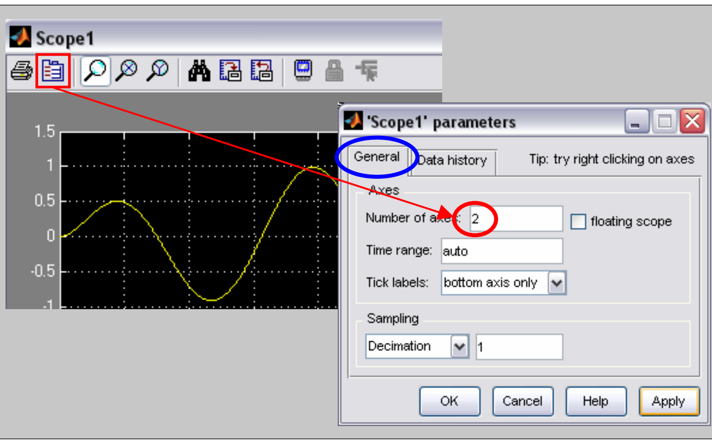


Soubor „ Model_sedacky_3a.mdl „ viz příloha textu

Simulační model sedačky řidiče byl doplněn funkčním blokem (ve schématu označeno žlutě) realizujícím analytické řešení diferenciální rovnice. Praktická shoda je prokázána překrytím obou průběhů zakreslených do jednoho grafu (fialový průběh).

Technická poznámka :

Zobrazení různých průběhů do paralelních oken grafu zajistíme nastavením parametru „Number of axes“ v liště zobrazovače.



Situace 2.

Dynamický systém **na mezi periodicity**. Minimální hodnota tlumení $\mathbf{k}$, při které se ještě neobjevují kmitavé složky průběhu. Kořeny charakteristické rovnice jsou *reálné násobné*. (Modifikace matematického řešení.)

Obraz řešení diferenciální rovnice za stejných okolností s jinými hodnotami konstrukčních parametrů

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\mathbf{m}\,\mathbf{s}^2 + \mathbf{k}\,\mathbf{s} + \mathbf{c}} \cdot \frac{800}{\mathbf{s}} = \left[\begin{array}{l} spec. \\ \mathbf{m} = 100 \\ \mathbf{c} = 8000 \end{array}\right] = \frac{8}{(\mathbf{s}^2 + \mathbf{k}\cdot 10^{-2}\,\mathbf{s} + 80)\,\mathbf{s}}$$

charakteristická rovnice a její kořeny

$$\mathbf{s}^2 + \mathbf{k}\cdot 10^{-2}\,\mathbf{s} + 80 = 0 \qquad ; \qquad \mathbf{s}_{1,2} = \frac{-\mathbf{k}\cdot 10^{-2} \pm \sqrt{\mathbf{k}^2\cdot 10^{-4} - 4\cdot 80}}{2}$$

pro dvojnásobný kořen

$$\mathbf{k}^2\cdot 10^{-4} - 4\cdot 80 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\mathbf{k} = \sqrt{4\cdot 80\cdot 10^{+4}} \approx 17{,}89\cdot 10^2} \quad [\mathrm{Ns/m}]$$

Hodnota na mezi aperiodicity

$$\mathbf{s}_{1,2} = \frac{-17{,}89\cdot 10^2\cdot 10^{-2}}{2} \approx -8{,}94$$

Obraz řešení je v tomto případě

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \frac{8}{(\mathbf{s}^2 + \mathbf{k}\cdot 10^{-2}\,\mathbf{s} + 80)\,\mathbf{s}} = \frac{8}{(\mathbf{s}+8{,}94)^2\,\mathbf{s}} = \frac{A}{\mathbf{s}} + \frac{B}{(\mathbf{s}+8{,}94)^2} + \frac{C}{(\mathbf{s}+8{,}94)}$$

$$A = \lim_{\mathbf{s}\to 0} \mathbf{Y}(\mathbf{s})\cdot\mathbf{s} = \lim_{\mathbf{s}\to 0} \frac{8}{(\mathbf{s}+8{,}94)^2} = 0{,}1$$

$$B = \lim_{\mathbf{s}\to -8{,}94} \mathbf{Y}(\mathbf{s})\cdot(\mathbf{s}+8{,}94)^2 = \lim_{\mathbf{s}\to -8{,}94} \frac{8}{\mathbf{s}} \approx -0{,}89$$

$$C = \lim_{\mathbf{s}\to -8{,}94} \frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{ds}\{\mathbf{Y}(\mathbf{s})\cdot(\mathbf{s}+8{,}94)^2\} = \lim_{\mathbf{s}\to -8{,}94} \frac{d}{ds}\frac{8}{\mathbf{s}} = \lim_{\mathbf{s}\to -8{,}94} \frac{-8}{\mathbf{s}^2} \approx -0{,}1$$

Poznámka :

V případě vícenásobných pólů by se koeficienty parciálních zlomků s klesající mocninou kořenového činitele počítaly jako limita ze stejně rostoucí derivace {dtto} vynásobené faktoriálním koeficientem 1/n! , n … řád derivace.
Poznamenejme, že uvedené limity jsou v regulárních bodech, takže se jedná jen o pouhé dosazení hodnot (stejně tak, jako i v předcházejícím případě).

Poznámka :

V tomto případě jsou rezidua $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ pouze koeficienty A a C (pozor ! - B není reziduum). Také i zde samozřejmě platí, že součet reziduí je roven nule $A + C = 0$.

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \frac{0{,}1}{\mathbf{s}} - \frac{0{,}89}{(\mathbf{s}+8{,}94)^2} - \frac{0{,}1}{(\mathbf{s}+8{,}94)}$$

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = (0{,}1 - 0{,}89\cdot t\cdot e^{-8{,}94t} - 0{,}1\cdot e^{-8{,}94t})\cdot\boldsymbol{\eta}(t)}$$

Situace 3.

Dynamický systém **kmitavý** s vlastními harmonickými složkami pohybu. Kořeny charakteristické rovnice jsou *komplexní*.

Předpokládejme hodnoty parametrů **m** = 100 [kg] , **k** = 400 [Ns/m] , **c** = 8 . 10^3 [N/m]

$$\mathbf{Y(s)} = \frac{1}{\mathbf{m\,s^2 + k\,s + c}} \cdot \frac{800}{\mathbf{s}} = \left| \begin{array}{l} \mathbf{m} = 100 \\ \mathbf{k} = 400 \\ \mathbf{c} = 8000 \end{array} \right| = \frac{8}{(\mathbf{s}^2 + 4\,\mathbf{s} + 80)\,\mathbf{s}}$$

Charakteristická rovnice a její kořeny

$$\mathbf{s}^2 + 4\,\mathbf{s} + 80 = 0 \quad ; \quad \mathbf{s}_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 80}}{2} \approx -2 \pm i\,8{,}72$$

Kořeny charakteristické rovnice jsou komplexní, dynamický systém má vlastní kmity s frekvencí 8,72 [rad/s] a s exponenciálním tlumením e^{-2t}.

Rozklad na parciální zlomky předpokládáme díky komplexním kořenům ve tvaru

$$\mathbf{Y(s)} = \frac{8}{(\mathbf{s}^2 + 4\,\mathbf{s} + 80)\,\mathbf{s}} = \frac{A}{\mathbf{s}} + \frac{B\cdot\mathbf{s} + C}{\mathbf{s}^2 + 4\,\mathbf{s} + 80}$$

Koeficient A určíme nejlépe reziduálním výpočtem, koeficienty B a C metodou neurčitých koeficientů

$$A = \lim_{\mathbf{s}\to 0} \mathbf{Y(s)}\cdot\mathbf{s} = \lim_{\mathbf{s}\to 0} \frac{8}{\mathbf{s}^2 + 4\,\mathbf{s} + 80} = 0{,}1$$

$$\mathbf{Y(s)} = \frac{0{,}1}{\mathbf{s}} + \frac{B\cdot\mathbf{s} + C}{\mathbf{s}^2 + 4\,\mathbf{s} + 80} = \frac{\mathbf{s}^2(B + 0{,}1) + \mathbf{s}\,(C + 0{,}4) + 8}{(\mathbf{s}^2 + 4\,\mathbf{s} + 80)\,\mathbf{s}} = \frac{8}{(\mathbf{s}^2 + 4\,\mathbf{s} + 80)\,\mathbf{s}}$$

$$\left.\begin{array}{l} B + 0{,}1 = 0 \\ C + 0{,}4 = 0 \end{array}\right\} \quad B = -0{,}1 \quad ; \quad C = -0{,}4$$

$$\mathbf{Y(s)} = \frac{0{,}1}{\mathbf{s}} - \frac{0{,}1\cdot\mathbf{s} + 0{,}4}{\mathbf{s}^2 + 4\,\mathbf{s} + 80}$$

Následuje důležitá úprava druhé části rozkladu **Y(s)** (parciálního zlomku odpovídajícího dvojici komplexně sdružených kořenů) do tvaru podle posledních dvou korespondencí uvedených ve slovníku na konci textu

$$\mathbf{Y(s)} = \frac{0{,}1}{\mathbf{s}} - \frac{0{,}1\cdot\mathbf{s} + 0{,}4}{(\mathbf{s} + 2)^2 + 76} = \frac{0{,}1}{\mathbf{s}} - \frac{0{,}1\,(\mathbf{s} + 2) + 0{,}2}{(\mathbf{s} + 2)^2 + 76} =$$

TRIK !

$$= \frac{0{,}1}{\mathbf{s}} - \frac{0{,}1\,(\mathbf{s} + 2)}{(\mathbf{s} + 2)^2 + 76} - \frac{0{,}2}{\sqrt{76}}\,\frac{\sqrt{76}}{(\mathbf{s} + 2)^2 + 76}$$

dále už jen jednoduchý převod podle uvedeného slovníku do předmětu

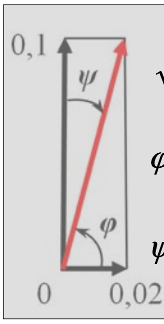
$$\mathbf{y}(t) = (\,0{,}1 - 0{,}1\,e^{-2t}\cos\sqrt{76}\,t - \frac{0{,}2}{\sqrt{76}}e^{-2t}\sin\sqrt{76}\,t\,)\cdot\boldsymbol{\eta}(t) =$$

$$= \{\,0{,}1 - e^{-2t}[\,0{,}1\cdot\cos(\,8{,}72\,t) + 0{,}02\cdot\sin(8{,}72\,t)\,]\,\}\cdot\boldsymbol{\eta}(t)$$

Podle vkusu, případně další „kosmetická“ úprava

$$\mathbf{y}(t) = [\,0{,}1 - 0{,}1\cdot e^{-2t} \sin(8{,}72\,t + 1{,}37)\,]\cdot \boldsymbol{\eta}(t) =$$

$$= [\,0{,}1 - 0{,}1\cdot e^{-2t} \cos(8{,}72\,t - 0{,}2)\,]\cdot \boldsymbol{\eta}(t)$$



$$\sqrt{0{,}1^2 + 0{,}02^2} \approx 0{,}1$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{0{,}1}{0{,}02} \approx 1{,}37$$

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{0{,}02}{0{,}1} \approx 0{,}2$$

Situace 3.- jiná varianta řešení

Předpokládejme **stejnou** situaci, stejnou diferenciální rovnici, ukažme si však jinou variantu přechodu od obrazu k řešení v časové oblasti.

Předpokládáme stejné hodnoty parametrů **m** = 100 [kg] , **k** = 400 [Ns/m] , **c** = 8 . 10^3 [N/m]

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\mathbf{m}\,\mathbf{s}^2 + \mathbf{k}\,\mathbf{s} + \mathbf{c}}\cdot\frac{800}{\mathbf{s}} = \left|\begin{matrix}\mathbf{m} = 100\\ \mathbf{k} = 400\\ \mathbf{c} = 8000\end{matrix}\right| = \frac{8}{(\,\mathbf{s}^2 + 4\,\mathbf{s} + 80\,)\,\mathbf{s}}$$

Stejná je samozřejmě i charakteristická rovnice a její kořeny

$$\mathbf{s}^2 + 4\,\mathbf{s} + 80 = 0 \qquad ; \qquad \mathbf{s}_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 80}}{2} \approx -2 \pm i\,8{,}72$$

Rozklad na parciální zlomky však předpokládáme ve tvaru s komplexními koeficienty

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \frac{8}{(\,\mathbf{s}^2 + 4\,\mathbf{s} + 80\,)\,\mathbf{s}} = \frac{A}{\mathbf{s}} + \frac{B}{(\,\mathbf{s} + 2 - i\,8{,}72)} + \frac{C}{(\,\mathbf{s} + 2 + i\,8{,}72)}$$

Všechny koeficienty A, B, C jsou v tomto případě rezidua obrazu v jeho pólech a určíme je

$$A = \lim_{\mathbf{s}\to 0} \mathbf{Y}(\mathbf{s})\cdot\mathbf{s} = \lim_{\mathbf{s}\to 0} \frac{8}{\mathbf{s}^2 + 4\,\mathbf{s} + 80} = 0{,}1$$

$$B = \lim_{\mathbf{s}\to -2 + i8{,}72} \mathbf{Y}(\mathbf{s})\cdot(\mathbf{s} + 2 - i\,8{,}72) = \lim_{\mathbf{s}\to -2 + i8{,}72} \frac{8}{\mathbf{s}\,(\,\mathbf{s} + 2 + i\,8{,}72)} = \cdots \approx -0{,}05 + i\,0{,}01$$

$$C = \lim_{\mathbf{s}\to -2 - i8{,}72} \mathbf{Y}(\mathbf{s})\cdot(\mathbf{s} + 2 + i\,8{,}72) = \lim_{\mathbf{s}\to -2 - i8{,}72} \frac{8}{\mathbf{s}\,(\,\mathbf{s} + 2 - i\,8{,}72)} = \cdots \approx -0{,}05 - i\,0{,}01$$

Poznámka :

Koeficienty B a C musejí být nutně *komplexně sdružené*, nebylo proto nutné C znovu počítat. Zde jsou všechny tři koeficienty parciálních zlomků rezidua obrazu **Y**(**s**) v jeho pólech, proto také platí A + B + C = 0 .

Rozklad na parciální zlomky

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \frac{8}{(\,\mathbf{s}^2 + 4\,\mathbf{s} + 80\,)\,\mathbf{s}} = \frac{0{,}1}{\mathbf{s}} + \frac{-0{,}05 + i\,0{,}01}{(\,\mathbf{s} + 2 - i\,8{,}72)} + \frac{-0{,}05 - i\,0{,}01}{(\,\mathbf{s} + 2 + i\,8{,}72)}$$

pomocí slovníku (viz na konci textu) přechod do předmětu

$$\mathbf{y}(t) = [\,0{,}1 + (-0{,}05 + i\,0{,}01)\,e^{(-2+i\,8{,}72)t} + (-0{,}05 - i\,0{,}01)\,e^{(-2-i\,8{,}72)t}\,]\cdot \boldsymbol{\eta}(t) =$$

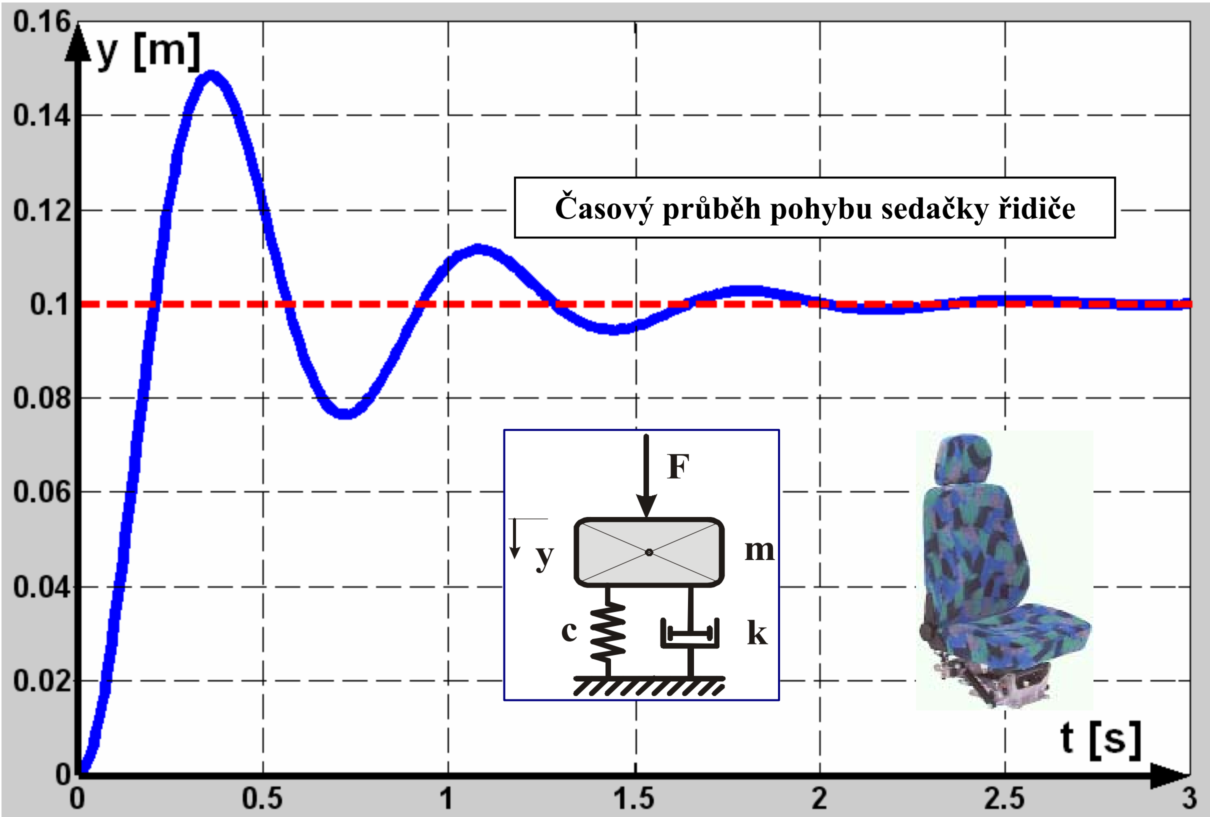
$$= \{0{,}1 + e^{-2t}[(-0{,}05 + i\,0{,}01)(\cos 8{,}72t + i\sin 8{,}72t) +$$

$$+ (-0{,}05 - i\,0{,}01)(\cos 8{,}72t - i\sin 8{,}72t)]\}\cdot \boldsymbol{\eta}(t) =$$

$$= \cdots = \underline{\{\,0{,}1 - e^{-2t}[\,0{,}1\cdot\cos(\,8{,}72\,t) + 0{,}02\cdot\sin(8{,}72\,t)\,]\,\}\cdot \boldsymbol{\eta}(t)}$$

SROVNEJ !

Samozřejmě, že výsledek je naprosto stejný. Obě varianty se liší jen přístupem ke zpětné Laplaceově transformaci. (Všechny cesty přeci vedou do Říma. :o)) Jak je tedy ctěná libost, mně se první přístup, bez práce v komplexní oblasti, zdá poněkud jednodušší a příjemnější.



Vypracoval : Janeček J., KŘT TU Liberec

Základní vztahy a korespondence
Laplaceovy transformace

$$\frac{k}{s} \doteqdot k\,.\,\eta(t)$$

$$\frac{k}{s^n} \doteqdot k\,\frac{1}{(n-1)!}\,t^{n-1}.\,\eta(t)$$

$$\frac{k}{s-a} \doteqdot k\,e^{at}\,.\,\eta(t)$$

$$\frac{k}{(s-a)^n} \doteqdot k\,\frac{1}{(n-1)!}\,t^{n-1}e^{at}.\,\eta(t)$$

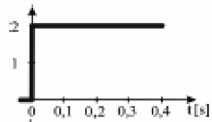
$$k\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \doteqdot k\,\sin(\omega t).\,\eta(t)$$

$$k\,\frac{s}{s^2+\omega^2} \doteqdot k\,\cos(\omega t).\,\eta(t)$$

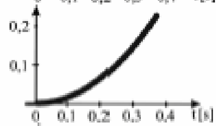
$$k\,\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \doteqdot k\,e^{at}\sin(\omega t).\,\eta(t)$$

$$k\,\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} \doteqdot k\,e^{at}\cos(\omega t).\,\eta(t)$$

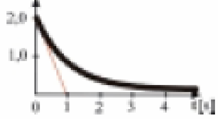
$$\frac{2}{s} \doteqdot 2\,.\,\eta(t)$$



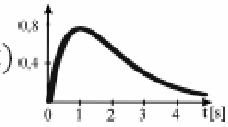
$$\frac{3}{s^3} \doteqdot \frac{3}{2}\,t^2\,.\,\eta(t)$$



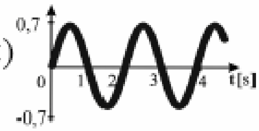
$$\frac{2}{s+1} \doteqdot 2\,.\,e^{-t}.\,\eta(t)$$



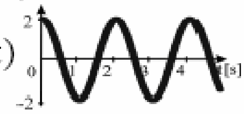
$$\frac{2}{(s+1)^2} \doteqdot 2\,t\,e^{-t}.\,\eta(t)$$



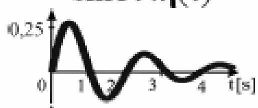
$$\frac{2}{s^2+9} \doteqdot \frac{2}{3}\sin 3t.\,\eta(t)$$



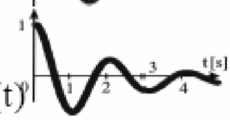
$$\frac{2\,s}{s^2+9} \doteqdot 2\cos 3t.\,\eta(t)$$



$$\frac{1}{(s+0{,}5)^2+9} \doteqdot \frac{1}{3}\,e^{-0{,}5\,t}\sin 3t\,.\eta(t)$$



$$\frac{s+0{,}5}{(s+0{,}5)^2+9} \doteqdot e^{-0{,}5\,t}\cos 3t.\,\eta(t)$$



L - obraz derivací funkce

$$y(t) \doteqdot \mathbf{Y}(s)$$
$$y'(t) \doteqdot s\,\mathbf{Y}(s)-y(0+)$$
$$y''(t) \doteqdot s^2\mathbf{Y}(s)-s\,y(0+)-y'(0+)$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}(t) \doteqdot s^n\mathbf{Y}(s)-s^{n-1}y(0+)-s^{n-2}y'(0+)-\ldots-y^{(n-1)}(0+)$$

Limitní korespondence

$$y(0+)=\lim_{s\to\infty} s\,\mathbf{Y}(s)$$
$$y(\infty)=\lim_{s\to 0} s\,\mathbf{Y}(s)$$

Janeček J., KŘT TUL