# Kapitola 2

# Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou Laplaceovej transformácie

Cieľom cvičenia je zvládnuť riešenie diferenciálnych rovníc pomocou Laplaceovej transformácie, keď charakteristická rovnica má rôzne reálne korene, viacnásobné reálne korene, komplexne združené korene a korene, ktoré sú kombináciou predošlých možností.

## 2.1 Prehľad pojmov

**Definícia Laplaceovej transformácie**

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} \hat{=} F(s) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{2.1}$$

kde $\mathcal{L}\left\{\right\}$ je Laplaceov operátor, $f(t)$ je nejaká funkcia času, ktorá sa nazýva originál, $F(s)$ sa nazýva obraz a $s$ je argument Laplaceovej transformácie (je to komplexná premenná).

**Skoková funkcia** – je definovaná nasledovne

$$u(t) = \begin{cases} k & \text{pre } t \geq 0 \\ 0 & \text{pre } t < 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Kvôli zjednodušeniu budeme používať jej zápis v tvare $u(t) = k$.

**Upozornenia**

- Argument Laplaceovej transformácie na rozdiel od literatúry Mészáros a kol. (1997) a Mikleš a kol. (1994) budeme označovať $s$. Takéto označenie sa používa vo svetovej literatúre, používa ho MATLAB aj Simulink a je použité aj v literatúre Mikleš a Fikar (1999).
- Pri Laplaceovej transformácii a spätnej Laplaceovej transformácii názvy funkcií zachováme. Originál od obrazu rozlíšime tak, že originál budeme písať malým písaným písmenom (napr. $f$, $y$, $u$, $z$) a obraz veľkým tlačeným písmenom s vyznačením, že ide o funkciu argumentu $s$ (napr. $F(s)$, $Y(s)$, $U(s)$, $Z(s)$).

## 2.2 Algoritmus riešenia diferenciálnych rovníc

Diferenciálne rovnice predstavujú matematický opis dynamických systémov. Riešením diferenciálnych rovníc sa získava časový priebeh výstupných veličín dynamických systémov pri definovaných vstupných veličinách a začiatočných podmienkach. Jednou z možností riešenia diferenciálnych rovníc je použitie Laplaceovej transformácie. Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou Laplaceovej transformácie možno rozdeliť do 3 krokov:

1. Urobí sa Laplaceova transformácia diferenciálnej rovnice. Znamená to, že sa k originálom, ktoré v rovnici vystupujú, nájdu obrazy. Rovnica, ktorú po transformácii dostaneme, je algebraická rovnica a neznámou v nej je obraz riešenia diferenciálnej rovnice.
2. Vyrieši sa algebraická rovnica. Riešením algebraickej rovnice sa nájde obraz riešenia diferenciálnej rovnice, ktorý má zvyčajne tvar racionálnej funkcie (zlomku).
3. Urobí sa spätná Laplaceova transformácia obrazu riešenia po jeho rozklade na parciálne zlomky. Spätnou Laplaceovou transformáciou sa získa originál k obrazu riešenia diferenciálnej rovnice, a teda riešenie diferenciálnej rovnice v časovej oblasti.

Pri riešení diferenciálnych rovníc pomocou Laplaceovej transformácie sa budú využívať vlastnosti Laplaceovej transformácie a slovník Laplaceových obrazov z uvedenej literatúry.

## 2.3 Spätná Laplaceova transformácia

Predpokladáme, že chceme urobiť spätnú Laplaceovu transformáciu obrazu v tvare racionálnej funkcie

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \tag{2.3}$$

kde $B(s)$ je polynóm stupňa $m$ a $A(s)$ je polynóm stupňa $n$. Pre fyzikálne realizovateľné systémy platí podmienka $m \leq n$.

### 2.3.1 Spätná Laplaceova transformácia pre rôzne reálne korene polynómu $A(s)$

Predpokladáme, že polynóm $A(s)$ má rôzne reálne korene $s_1$, $s_2$, …, $s_n$. Potom platí

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{a_n(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)} = \frac{B(s)/a_n}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)} \\ &= \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{K_n}{s-s_n} \end{aligned}$$

Konštanty $K_1$, $K_2$, …, $K_n$ nájdeme metódou porovnania koeficientov.

Originál $f(t)$ má v tomto prípade tvar

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K_1}{s-s_1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K_2}{s-s_2}\right\} + \cdots + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K_n}{s-s_n}\right\} \tag{2.4}$$

alebo

$$f(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \cdots + K_n e^{s_n t} \tag{2.5}$$

**Upozornenie**

Ak korene polynómu $A(s)$ sú rôzne reálne, konštanty $K_1$, $K_2$, …, $K_n$ možno vypočítať pre $j = 1$, …, $n$ aj pomocou nasledovného vzťahu

$$K_j = \lim_{s \to s_j} \frac{\frac{B(s)}{a_n}}{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (s - s_i)} \tag{2.6}$$

**Príklad 2.3.1:** *Diferenciálna rovnica s rôznymi reálnymi koreňmi charakteristickej rovnice*

Riešte diferenciálnu rovnicu

$$3y'''(t) + 21y''(t) + 42y'(t) + 24y(t) = 3u(t) \tag{2.7}$$

s nulovými začiatočnými podmienkami $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$, kde $u(t) = 2$.

**Riešenie:**

1. Urobí sa Laplaceova transformácia diferenciálnej rovnice pomocou slovníka Laplaceových obrazov a definícií vlastností Laplaceovej transformácie.
   Ak má diferenciálna rovnica pred najvyššou deriváciou iný koeficient ako 1, je vhodné týmto koeficientom celú rovnicu vydeliť ešte pred Laplaceovou transformáciou. Vyvarujeme sa tak niektorých chýb pri ďalšom riešení. Pre rovnicu (2.7) dostaneme

   $$y'''(t) + 7y''(t) + 14y'(t) + 8y(t) = u(t)$$

   Na transformáciu členov na ľavej strane diferenciálnej rovnice použijeme definíciu obrazu funkcie, definície obrazov derivácií funkcie a definíciu násobenia funkcie konštantou. Na transformáciu člena na pravej strane diferenciálnej rovnice použijeme definíciu skokovej funkcie. Dostaneme

   $$s^3Y(s) + 7s^2Y(s) + 14sY(s) + 8Y(s) = \frac{2}{s}$$

2. Vyrieši sa algebraická rovnica.
   Z predošlej rovnice vyjadríme obraz riešenia $Y(s)$. Postup je nasledovný

   $$Y(s)(s^3 + 7s^2 + 14s + 8) = \frac{2}{s}$$

   $$Y(s) = \frac{2}{s(s^3 + 7s^2 + 14s + 8)}$$

3. Urobí sa spätná Laplaceova transformácia.
   Menovateľ obrazu $Y(s)$ je polynóm 4. stupňa a z obrazu $Y(s)$ je zrejmé, že jeho jeden koreň je $s_1 = 0$. Treba ešte nájsť korene rovnice $s^3 + 7s^2 + 14s + 8 = 0$, ktorá je charakteristickou rovnicou diferenciálnej rovnice. Jej korene nájdeme napr. pomocou MATLABu:

   ```
   >> roots([1 7 14 8])
   ans =
      -4.0000
      -2.0000
      -1.0000
   ```

Charakteristická rovnica má teda 3 rôzne reálne korene $s_2 = -4$, $s_3 = -2$, $s_4 = -1$ a rozklad na parciálne zlomky sa urobí nasledovne:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{s(s^3+7s^2+14s+8)} = \frac{2}{s(s+4)(s+2)(s+1)} = \\ &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+4} + \frac{K_3}{s+2} + \frac{K_4}{s+1} \end{aligned}$$

Po vynásobení rovnice

$$\frac{2}{s(s^3+7s^2+14s+8)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+4} + \frac{K_3}{s+2} + \frac{K_4}{s+1}$$

menovateľom $s(s^3+7s^2+14s+8)$ dostaneme:

$$\begin{aligned} 2 &= K_1(s+4)(s+2)(s+1) + K_2 s(s+2)(s+1) + K_3 s(s+4)(s+1) \\ &\quad + K_4 s(s+4)(s+2) \\ 2 &= K_1(s^3+7s^2+14s+8) + K_2(s^3+3s^2+2s) \\ &\quad + K_3(s^3+5s^2+4s) + K_4(s^3+6s^2+8s) \\ 2 &= s^3(K_1+K_2+K_3+K_4) + s^2(7K_1+3K_2+5K_3+6K_4) \\ &\quad + s(14K_1+2K_2+4K_3+8K_4) + 8K_1 \end{aligned}$$

Na určenie koeficientov $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$ použijeme metódu porovnania koeficientov. Porovnaním koeficientov polynómov na pravej a ľavej strane ostatnej rovnice dostaneme sústavu 4 algebraických rovníc o 4 neznámych v tvare

$$\begin{aligned} s^3: \quad 0 &= K_1+K_2+K_3+K_4 \\ s^2: \quad 0 &= 7K_1+3K_2+5K_3+6K_4 \\ s^1: \quad 0 &= 14K_1+2K_2+4K_3+8K_4 \\ s^0: \quad 2 &= 8K_1 \end{aligned}$$

ktorú opäť môžeme riešiť pomocou MATLABu, keď ju zapíšeme v tvare

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 5 & 6 \\ 14 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

V MATLABe načítame maticu koeficientov, vektor pravých strán a jednoducho dostaneme riešenie:

```
>> A=[1 1 1 1;7 3 5 6;14 2 4 8;8 0 0 0]; B=[0;0;0;2]; k=inv(A)*B
k =
    0.2500
   -0.0833
    0.5000
   -0.6667
```

Z toho vyplýva, že $K_1 = 0{,}25$; $K_2 = -0{,}0833$; $K_3 = 0{,}5$; $K_4 = -0{,}6667$.
(Namiesto príkazu `k=inv(A)*B` možno použiť i príkaz `k=A\B`. Riešenie je možné urobiť aj ručne.)
Na výpočet koeficientov sa dá použiť aj vzorec (2.6), napr.:

$$K_1 = \lim_{s\to 0} \frac{2}{(s+4)(s+2)(s+1)} = \frac{2}{8} = 0{,}25$$

Pre obraz $Y(s)$ teda dostaneme

$$Y(s) = \frac{0{,}25}{s} - \frac{0{,}0833}{s+4} + \frac{0{,}5}{s+2} - \frac{0{,}6667}{s+1}$$

a máme ho v takom tvare, že pomocou slovníka už jednoducho urobíme spätnú Laplaceovu transformáciu. Originál k obrazu $Y(s)$ a zároveň riešenie diferenciálnej rovnice má tvar

$$y(t) = 0{,}25 - 0{,}0833\mathrm{e}^{-4t} + 0{,}5\mathrm{e}^{-2t} - 0{,}6667\mathrm{e}^{-t}$$

### 2.3.2 Spätná Laplaceova transformácia pre násobné reálne korene polynómu $A(s)$

Predpokladáme, že polynóm $A(s)$ má $n$-násobný reálny koreň $s_1$. Potom platí

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{a_n(s-s_1)^n} = \frac{B(s)/a_n}{(s-s_1)^n} \tag{2.8}$$

a rozklad na parciálne zlomky má tvar

$$F(s) = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{(s-s_1)^2} + \cdots + \frac{K_n}{(s-s_1)^n} \tag{2.9}$$

Konštanty $K_1$, $K_2$, …, $K_n$ nájdeme metódou porovnania koeficientov. Originál $f(t)$ má v tomto prípade tvar

$$f(t) = K_1\mathrm{e}^{s_1 t} + \frac{K_2}{1!}t\mathrm{e}^{s_1 t} + \cdots + \frac{K_n}{(n-1)!}t^{n-1}\mathrm{e}^{s_1 t} \tag{2.10}$$

**Príklad 2.3.2:** *Diferenciálna rovnica s násobnými reálnymi koreňmi charakteristickej rovnice*

Riešte diferenciálnu rovnicu

$$2y'''(t) + 24y''(t) + 96y'(t) + 128y(t) = 2u(t) \tag{2.11}$$

s nulovými začiatočnými podmienkami $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$, kde $u(t) = 2{,}5$.

**Riešenie:**

1. Urobí sa Laplaceova transformácia diferenciálnej rovnice pomocou slovníka Laplaceových obrazov a definícií vlastností Laplaceovej transformácie, keď predtým ešte rovnicu vydelíme koeficientom pred $y'''(t)$.
   Po vydelení rovnice koeficientom 2 a po jej Laplaceovej transformácii dostaneme
   $$s^3Y(s) + 12s^2Y(s) + 48sY(s) + 64Y(s) = \frac{2{,}5}{s}$$
2. Vyrieši sa algebraická rovnica.
   Z predošlej rovnice vyjadríme obraz riešenia $Y(s)$ v tvare
   $$Y(s) = \frac{2{,}5}{s(s^3 + 12s^2 + 48s + 64)}$$

3. Urobí sa spätná Laplaceova transformácia.
   Menovateľ $Y(s)$ je polynóm 4. stupňa a z obrazu $Y(s)$ je zrejmé, že jeho jeden koreň je $s_1 = 0$. Treba ešte nájsť korene rovnice $s^3 + 12s^2 + 48s + 64 = 0$, ktorá je charakteristickou rovnicou diferenciálnej rovnice. Jej korene nájdeme napr. pomocou MATLABu:

```
>> p=[1 12 48 64]; roots(p)
ans =
  -4.0000
  -4.0000 + 0.0000i
  -4.0000 - 0.0000i
```

   Charakteristická rovnica má teda jeden trojnásobný reálny koreň $s_2 = -4$ a rozklad na parciálne zlomky je nasledovný

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2{,}5}{s(s^3+12s^2+48s+64)} = \frac{2{,}5}{s(s+4)^3} \\ &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+4} + \frac{K_3}{(s+4)^2} + \frac{K_4}{(s+4)^3} \end{aligned}$$

   Po vynásobení rovnice

$$\frac{2{,}5}{s(s^3+12s^2+48s+64)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+4} + \frac{K_3}{(s+4)^2} + \frac{K_4}{(s+4)^3}$$

   menovateľom $s(s^3 + 12s^2 + 48s + 64)$ a postupnými úpravami dostaneme

$$2{,}5 = s^3(K_1+K_2)+s^2(12K_1+8K_2+K_3)+s(48K_1+16K_2+4K_3+K_4)+64K_1$$

   Porovnaním koeficientov polynómov na pravej a ľavej strane ostatnej rovnice dostaneme sústavu 4 algebraických rovníc o 4 neznámych v tvare

$$\begin{aligned} 0 &= K_1 + K_2 \\ 0 &= 12K_1 + 8K_2 + K_3 \\ 0 &= 48K_1 + 16K_2 + 4K_3 + K_4 \\ 2{,}5 &= 64K_1 \end{aligned}$$

   ktorú opäť môžeme riešiť pomocou MATLABu a po použití nasledovných príkazov jednoducho dostaneme riešenie:

```
>> A=[1 1 0 0;12 8 1 0;48 16 4 1;64 0 0 0]; B=[0;0;0;2.5]; k=A\B
k =
    0.0391
   -0.0391
   -0.1563
   -0.6250
```

   Z toho vyplýva, že $K_1 = 0{,}0391$; $K_2 = -0{,}0391$; $K_3 = -0{,}1563$; $K_4 = -0{,}6250$. Pre obraz $Y(s)$ dostaneme

$$Y(s) = \frac{0{,}0391}{s} - \frac{0{,}0391}{s+4} - \frac{0{,}1563}{(s+4)^2} - \frac{0{,}6250}{(s+4)^3}$$

   a máme ho v takom tvare, že pomocou slovníka už jednoducho urobíme spätnú Laplaceovu transformáciu. Originál k obrazu $Y(s)$ a zároveň riešenie diferenciálnej rovnice má tvar

$$\begin{aligned} y(t) &= 0{,}0391 - 0{,}0391\mathrm{e}^{-4t} - \frac{0{,}1563}{1!}t\mathrm{e}^{-4t} - \frac{0{,}6250}{2!}t^2\mathrm{e}^{-4t} \\ &= 0{,}0391 - 0{,}0391\mathrm{e}^{-4t} - 0{,}1563t\mathrm{e}^{-4t} - 0{,}3125t^2\mathrm{e}^{-4t} \end{aligned}$$

### 2.3.3 Spätná Laplaceova transformácia pre komplexne združené korene polynómu $A(s)$ s nulovými reálnymi časťami

Predpokladáme, že polynóm $A(s)$ má $n/2$ dvojíc komplexne združených koreňov $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \ldots, \pm i\omega_{n/2}$. Pre obraz $F(s)$ platí

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{a_n(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)\ldots(s^2+\omega_{n/2}^2)} \\ &= \frac{B(s)/a_n}{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)\ldots(s^2+\omega_{n/2}^2)} \end{aligned}$$

a rozklad na parciálne zlomky má tvar

$$F(s) = \frac{K_1 s + L_1}{s^2+\omega_1^2} + \frac{K_2 s + L_2}{s^2+\omega_2^2} + \ldots + \frac{K_{n/2} s + L_{n/2}}{s^2+\omega_{n/2}^2} \tag{2.12}$$

Konštanty $K_1$, $K_2$, $\ldots$, $K_{n/2}$, $L_1$, $L_2$, $\ldots$, $L_{n/2}$ nájdeme metódou porovnania koeficientov.

Originál $f(t)$ má v tomto prípade tvar

$$f(t) = K_1\cos(\omega_1 t) + \frac{L_1}{\omega_1}\sin(\omega_1 t) + \ldots + K_{n/2}\cos(\omega_{n/2} t) + \frac{L_{n/2}}{\omega_{n/2}}\sin(\omega_{n/2} t) \tag{2.13}$$

**Príklad 2.3.3:** *Diferenciálna rovnica s komplexne združenými koreňmi charakteristickej rovnice, ktoré majú nulovú reálnu časť*

Riešte diferenciálnu rovnicu

$$y''(t) + 4y(t) = u(t) \tag{2.14}$$

so začiatočnými podmienkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$, kde $u(t) = \cos(3t)$.

**Riešenie:**

1. Urobí sa Laplaceova transformácia diferenciálnej rovnice pomocou slovníka Laplaceových obrazov a definícií vlastností Laplaceovej transformácie.
   Po Laplaceovej transformácii diferenciálnej rovnice dostaneme
   $$\left[s^2Y(s) - 1s - 3\right] + 4Y(s) = \frac{s}{s^2+9}$$
2. Vyrieši sa algebraická rovnica.
   Z predošlej rovnice vyjadríme obraz riešenia $Y(s)$ v tvare
   $$Y(s) = \frac{s^3+3s^2+10s+27}{(s^2+9)(s^2+4)}$$
3. Urobí sa spätná Laplaceova transformácia.
   Menovateľ $Y(s)$ je polynóm 4. stupňa a z obrazu $Y(s)$ je zrejmé, že jedna dvojica komplexne združených koreňov je $\pm 3i$ a druhá $\pm 2i$. Rozklad na parciálne zlomky sa potom urobí nasledovne
   $$Y(s) = \frac{s^3+3s^2+10s+27}{(s^2+9)(s^2+4)} = \frac{K_1 s + L_1}{s^2+9} + \frac{K_2 s + L_2}{s^2+4}$$

Po vynásobení ostatnej rovnice menovateľom $(s^2+9)(s^2+4)$ a postupnými úpravami dostaneme

$$s^3+3s^2+10s+27 = s^3(K_1+K_2)+s^2(L_1+L_2)+s(4K_1+9K_2)+(4L_1+9L_2)$$

Porovnaním koeficientov polynómov na pravej a ľavej strane rovnice dostaneme 2 systémy 2 algebraických rovníc o 2 neznámych v tvare

$$\begin{aligned} 1 &= K_1+K_2 \\ 10 &= 4K_1+9K_2 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} 3 &= L_1+L_2 \\ 27 &= 4L_1+9L_2 \end{aligned}$$

Ich riešením dostaneme číselné hodnoty koeficientov $K_1 = -0{,}2$; $K_2 = 1{,}2$; $L_1 = 0$; $L_2 = 3$.
Obraz $Y(s)$ má tvar

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{-0{,}2s}{s^2+3^2} + \frac{1{,}2s+3}{s^2+2^2} \\ &= -0{,}2\frac{s}{s^2+3^2} + 1{,}2\frac{s}{s^2+2^2} + \frac{3}{2}\frac{2}{s^2+2^2} \end{aligned}$$

a pomocou slovníka už jednoducho urobíme spätnú Laplaceovu transformáciu. Originál k obrazu $Y(s)$ a zároveň riešenie diferenciálnej rovnice má tvar

$$y(t) = -0{,}2\cos(3t) + 1{,}2\cos(2t) + 1{,}5\sin(2t)$$

### 2.3.4 Spätná Laplaceova transformácia pre komplexne združené korene polynómu $A(s)$ s nenulovými reálnymi časťami

Nech polynóm $A(s)$ je polynóm 2. stupňa v tvare $A(s) = a_2s^2 + a_1s + a_0$ a má 1 dvojicu komplexne združených koreňov $\gamma \pm i\omega$. Vtedy ďalej predpokladáme, že polynóm $B(s)$ je polynóm 1. stupňa v tvare $B(s) = b_1s + b_0$. Potom platí

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1s+b_0}{a_2\left(s^2+\frac{a_1}{a_2}s+\frac{a_0}{a_2}\right)} = \frac{\frac{b_1}{a_2}s+\frac{b_0}{a_2}}{s^2+\frac{a_1}{a_2}s+\frac{a_0}{a_2}} = \frac{\tilde{b}_1s+\tilde{b}_0}{s^2+\tilde{a}_1s+\tilde{a}_0} \tag{2.15}$$

Ďalej treba zlomok matematicky upraviť do tvaru takých obrazov, aby sa za pomoci tabuľky obrazov dali jednoducho spätne transformovať. Obrazy, ktoré vyhovujú našej požiadavke sú obrazy funkcií $e^{-at}\cos(\omega t)$ a $e^{-at}\sin(\omega t)$, ktoré majú tvar $\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ a $\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$. Takže najprv upravíme menovateľa zlomku a dostaneme

$$F(s) = \frac{\tilde{b}_1s+\tilde{b}_0}{s^2+2\frac{\tilde{a}_1}{2}s+\left(\frac{\tilde{a}_1}{2}\right)^2+\tilde{a}_0-\left(\frac{\tilde{a}_1}{2}\right)^2} = \frac{\tilde{b}_1s+\tilde{b}_0}{\left(s+\frac{\tilde{a}_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\tilde{a}_0-\left(\frac{\tilde{a}_1}{2}\right)^2}\right)^2} \tag{2.16}$$

Po označení $\omega = \sqrt{\tilde{a}_0-\left(\frac{\tilde{a}_1}{2}\right)^2}$, $a = \frac{\tilde{a}_1}{2}$ môžeme písať

$$F(s) = \frac{\tilde{b}_1s+\tilde{b}_0}{(s+a)^2+\omega^2} \tag{2.17}$$

Teraz treba upraviť ešte čitateľa obrazu.

$$F(s)=\frac{\tilde{b}_1 s+\tilde{b}_0}{(s+a)^2+\omega^2}=\tilde{b}_1\frac{s+\frac{\tilde{b}_0}{\tilde{b}_1}}{(s+a)^2+\omega^2}=\tilde{b}_1\frac{s+a+\frac{\tilde{b}_0}{\tilde{b}_1}-a}{(s+a)^2+\omega^2} \tag{2.18}$$

Po zavedení $b=\frac{\tilde{b}_0}{\tilde{b}_1}-a$ platí

$$F(s)=\tilde{b}_1\frac{s+a+b}{(s+a)^2+\omega^2}=\tilde{b}_1\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}+\frac{\tilde{b}_1 b}{\omega}\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \tag{2.19}$$

Originál $f(t)$ má v tomto prípade tvar

$$f(t)=\tilde{b}_1\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega t)+\frac{\tilde{b}_1 b}{\omega}\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t) \tag{2.20}$$

**Príklad 2.3.4:** *Diferenciálna rovnica s komplexne združenými koreňmi charakteristickej rovnice, ktoré majú nenulové reálne časti*

Riešte diferenciálnu rovnicu

$$y'''(t)+10y''(t)+36y'(t)+40y(t)=u(t) \tag{2.21}$$

s nulovými začiatočnými podmienkami $y''(0)=y'(0)=y(0)=0$, kde $u(t)=2$.

**Riešenie:**

1. Urobí sa Laplaceova transformácia diferenciálnej rovnice pomocou slovníka Laplaceových obrazov a definícií vlastností Laplaceovej transformácie.
   Po Laplaceovej transformácii diferenciálnej rovnice dostaneme

   $$s^3Y(s)+s^2 10Y(s)+36sY(s)+40Y(s)=\frac{2}{s}$$

2. Vyrieši sa algebraická rovnica.
   Z predošlej rovnice vyjadríme obraz riešenia $Y(s)$ v tvare

   $$Y(s)=\frac{2}{s(s^3+10s^2+36s+40)}$$

3. Urobí sa spätná Laplaceova transformácia.
   Menovateľ obrazu $Y(s)$ je polynóm 4. stupňa a z obrazu $Y(s)$ je zrejmé, že jeho jeden koreň je $s_1=0$. Treba ešte nájsť korene rovnice $s^3+10s^2+36s+40=0$, ktorá je charakteristickou rovnicou diferenciálnej rovnice. Jej korene nájdeme napr. pomocou MATLABu:

   ```
   >> roots([1 10 36 40])
   ans =
     -4.0000 + 2.0000i
     -4.0000 - 2.0000i
     -2.0000
   ```

   Charakteristická rovnica má teda 3 korene, z toho jeden reálny $s_2=-2$ a jednu dvojicu komplexne združených koreňov $\gamma\pm\omega i=-4\pm 2i$. Polynóm, ktorý má túto dvojicu komplexne združených koreňov, nájdeme buď vydelením polynómu $s^3+10s^2+36s+40$ polynómom $s+2$ pomocou MATLABu napr. príkazom

```
>> p1=[1 10 36 40]; p2=[1 2]; p3=deconv(p1,p2)
p3 =
     1 8 20
```

alebo priradením polynómu dvojici komplexne združených koreňov $-4 \pm 2i$ príkazom

```
>> poly([-4+2i, -4-2i])
ans =
     1 8 20
```

Pre obraz $Y(s)$ potom platí

$$Y(s) = \frac{2}{s(s^3 + 10s^2 + 36s + 40)} = \frac{2}{s(s+2)(s^2 + 8s + 20)}$$

a rozklad na parciálne zlomky sa urobí nasledovne:

$$\frac{2}{s(s+2)(s^2 + 8s + 20)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3 s + L_3}{s^2 + 8s + 20}$$

Po vynásobení ostatnej rovnice menovateľom $s(s+2)(s^2 + 8s + 20)$ dostaneme

$$\begin{aligned} 2 &= K_1(s^3 + 10s^2 + 36s + 40) + K_2(s^3 + 8s^2 + 20s) + (K_3 s + L_3)(s^2 + 2s) \\ 2 &= s^3(K_1 + K_2 + K_3) + s^2(10K_1 + 8K_2 + 2K_3 + L_3) \\ &\quad + s(36K_1 + 20K_2 + 2L_3) + 40K_1 \end{aligned}$$

Porovnaním koeficientov polynómov na pravej a ľavej strane rovnice dostaneme sústavu 4 algebraických rovníc o 4 neznámych v tvare

$$\begin{aligned} 0 &= K_1 + K_2 + K_3 \\ 0 &= 10K_1 + 8K_2 + 2K_3 + L_3 \\ 0 &= 36K_1 + 20K_2 + 2L_3 \\ 2 &= 40K_1 \end{aligned}$$

Jej riešením dostaneme $K_1 = 0{,}05$; $K_2 = -0{,}125$; $K_3 = 0{,}075$; $L_3 = 0{,}35$.
Pre obraz $Y(s)$ teda platí

$$Y(s) = \frac{0{,}05}{s} - \frac{0{,}125}{s+2} + \frac{0{,}075s + 0{,}35}{s^2 + 8s + 20}$$

Prvé dva zlomky v obraze riešenia sú v takom tvare, že spätná Laplaceova transformácia sa dá urobiť veľmi jednoducho. Upraviť treba ešte posledný zlomok. Preto pokračujeme v úpravách a dostaneme

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{0{,}05}{s} - 0{,}125\frac{1}{s+2} + 0{,}075\frac{s + 4 + \frac{0{,}35}{0{,}075} - 4}{(s+4)^2 + 4} \\ &= \frac{0{,}05}{s} - 0{,}125\frac{1}{s+2} + 0{,}075\frac{s + 4 + 0{,}6667}{(s+4)^2 + 2^2} \\ &= \frac{0{,}05}{s} - 0{,}125\frac{1}{s+2} + 0{,}075\frac{s+4}{(s+4)^2 + 2^2} + \frac{0{,}075.0{,}6667}{2}\frac{2}{(s+4)^2 + 2^2} \\ &= \frac{0{,}05}{s} - 0{,}125\frac{1}{s+2} + 0{,}075\frac{s+4}{(s+4)^2 + 2^2} + 0{,}025\frac{2}{(s+4)^2 + 2^2} \end{aligned}$$

Teraz už obraz riešenia máme v takom tvare, že pomocou slovníka jednoducho urobíme spätnú Laplaceovu transformáciu. Originál k obrazu $Y(s)$ a zároveň riešenie diferenciálnej rovnice má tvar

$$y(t) = 0{,}05 - 0{,}125\mathrm{e}^{-2t} + 0{,}075\mathrm{e}^{-4t}\cos(2t) + 0{,}025\mathrm{e}^{-4t}\sin(2t)$$

**Upozornenie**

- Pri rozklade na parciálne zlomky si treba uvedomiť, že ak je v parciálnom zlomku v menovateli polynóm, ktorý ma reálny koreň (jednoduchý alebo viacnásobný), tak v čitateli je konštanta a ak je v menovateli parciálneho zlomku polynóm s dvojicou komplexne združených koreňov, tak v čitateli je polynóm 1. stupňa.

## 2.4 Neriešené príklady

**Príklad 2.4.1:**
Riešte diferenciálnu rovnicu $2y''(t)+6y'(t)+4y(t)=2u(t)$ so začiatočnými podmienkami $y(0)=1$, $y'(0)=2$, kde $u(t)=t$.

**Riešenie:**

$y(t)=-0{,}75+5\mathrm{e}^{-t}-3{,}25\mathrm{e}^{-2t}+0{,}5t.$

**Príklad 2.4.2:**
Riešte diferenciálnu rovnicu $3y''(t)+18y'(t)+27y(t)=3u(t)$ so začiatočnými podmienkami $y(0)=0$, $y'(0)=1$, kde $u(t)=3\sin(2t)$.

**Riešenie:**

$y(t)=0{,}213\mathrm{e}^{-3t}+1{,}4615t\mathrm{e}^{-3t}-0{,}213\cos(2t)+0{,}0888\sin(2t).$

**Príklad 2.4.3:**
Riešte diferenciálnu rovnicu $4y''(t)+16y'(t)+16y(t)=4u(t)$ s nulovými začiatočnými podmienkami $y'(0)=y(0)=0$, kde $u(t)=t\mathrm{e}^{-3t}$.

**Riešenie:**

$y(t)=-2\mathrm{e}^{-2t}+t\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-3t}+t\mathrm{e}^{-3t}.$

**Príklad 2.4.4:**
Riešte diferenciálnu rovnicu $2y'''(t)+22y''(t)+72y'(t)+72y(t)=2u(t)$ s nulovými začiatočnými podmienkami $y''(0)=y'(0)=y(0)=0$, kde $u(t)=3$. Jeden koreň charakteristickej rovnice $=-2$.

**Riešenie:**

$y(t)=0{,}0833-0{,}0417\mathrm{e}^{-6t}+0{,}3333\mathrm{e}^{-3t}-0{,}375\mathrm{e}^{-2t}.$

**Príklad 2.4.5:**
Riešte diferenciálnu rovnicu $3y'''(t)+15y''(t)+24y'(t)+12y(t)=3u(t)$ s nulovými začiatočnými podmienkami $y''(0)=y'(0)=y(0)=0$, kde $u(t)=4$. Jeden koreň charakteristickej rovnice $=-1$.

**Riešenie:**

$y(t)=1+2t\mathrm{e}^{-2t}+3\mathrm{e}^{-2t}-4\mathrm{e}^{-t}.$

**Príklad 2.4.6:**
Riešte diferenciálnu rovnicu $0{,}5y'''(t)+y''(t)+8y'(t)+16y(t)=0{,}5u(t)$ s nulovými začiatočnými podmienkami $y''(0)=y'(0)=y(0)=0$, kde $u(t)=5$. Jeden koreň charakteristickej rovnice $=-2$.

**Riešenie:**

$y(t)=0{,}1563-0{,}0313\cos(4t)-0{,}0625\sin(4t)-0{,}125\mathrm{e}^{-2t}.$

**Príklad 2.4.7:**
Riešte diferenciálnu rovnicu $0{,}5y'''(t) + 6y''(t) + 24y'(t) + 32y(t) = 0{,}5u(t)$ s nulovými začiatočnými podmienkami $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$, kde $u(t)$=2,5. Jeden koreň charakteristickej rovnice $= -4$.

**Riešenie:**

$y(t) = 0{,}0391 - 0{,}3125t^2\mathrm{e}^{-4t} - 0{,}1563t\mathrm{e}^{-4t} - 0{,}0391\mathrm{e}^{-4t}$.

**Príklad 2.4.8:**
Riešte diferenciálnu rovnicu $2y'''(t) + 12y''(t) + 74y'(t) + 116y(t) = 2u(t)$ s nulovými začiatočnými podmienkami $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$, kde $u(t) = 3$. Jeden koreň charakteristickej rovnice $= -2$.

**Riešenie:**

$y(t) = 0{,}0517 - 0{,}06\mathrm{e}^{-2t} + 0{,}0083\mathrm{e}^{-2t}\cos(5t) - 0{,}0207\mathrm{e}^{-2t}\sin(5t)$.

## 2.5 MATLAB: príkazy k problematike

**výpočet koreňov polynómu p** `roots(p)`

**výpočet koeficientov polynómu pre jeho zadané korene k1, k2** `poly([k1 k2])`

**delenie polynómov p1, p2** `deconv(p1,p2)`

**výpočet inverznej matice k matici A** `inv(A)`

**rozklad na parciálne zlomky** `[r,p,k]=residue(citatel,menovatel)`, kde `r` je vektor koeficientov čitateľov, `p` je vektor zodpovedajúcich pólov a `k` je absolútny člen. Táto funkcia je veľmi dobre použiteľná, ak má Laplaceov obraz v menovateli iba reálne korene. V prípade komplexných koreňov menovateľa treba tieto ešte sčítať.