Riešenie systémov lineárnych algebraických rovníc v MATLABe

Ing. Slávka Jadlovská (Simulačné systémy 2011/12)

Nech je daný **systém lineárnych algebraických rovníc** *n*-tého rádu vo všeobecnom tvare:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{1}$$

kde $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}, b_1, \ldots, b_n$ sú reálne čísla a usporiadaná *n*-tica $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ predstavuje riešenie systému.

Vzhľadom na pravidlá násobenia matíc môžeme systém (1) zapísať v maticovom tvare

$$\boxed{\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}} \tag{2}$$

ktorého matice koeficientov majú tvar $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$ (matica rozmeru *nxn*) a

$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ (stĺpcový vektor rozmeru *nx1*). Riešením systému je stĺpcový vektor $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ rozmeru *nx1*.

Pokiaľ je matica $\boldsymbol{A}$ **regulárna** (jej determinant je rôzny od 0, resp. matica $\boldsymbol{A}$ má plnú hodnosť), potom k nej **existuje inverzná matica** $\boldsymbol{A}^{-1}$, pre ktorú platí

$$\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \tag{3}$$

kde $\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$ je jednotková matica *n*-tého rádu.

Ak teda systém (2) vynásobíme **zľava** maticou $\boldsymbol{A}^{-1}$, naľavo sa osamostatní vektor $\boldsymbol{x}$ (pretože $\boldsymbol{Ix} = \boldsymbol{x}$):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Ax} &= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Ix} &= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \end{aligned} \tag{4}$$

a riešenie systému možno vyjadriť v tvare:

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}} \tag{5}$$

Pomôcka: Princíp (5) je analogický princípu, podľa ktorého sa riešia lineárne rovnice. Ak je daná lineárna rovnica (t.j. 1 rovnica 1. rádu s 1 riešením), napr.

$$5x = 8, \tag{6}$$

tak riešenie spočíva v tom, že vynásobíme ľavú aj pravú stranu prevrátenou hodnotou ku koeficientu, ktorý sa nachádza pri *x*, v tomto prípade $\frac{1}{5} = 5^{-1}$. Keďže platí, že súčin čísla a jeho prevrátenej hodnoty je 1 (analógia s (3)), tak riešenie rovnice dostávame v tvare

$$\frac{1}{5}5x = \frac{1}{5}8$$
$$\boxed{x = \frac{8}{5}} \tag{7}$$

Inak povedané, riešenie sme dostali **vydelením pravej strany koeficientom pri *x***. Je to síce triviálne tvrdenie, ale ak si ho porovnáme so vzťahom (5), môžeme povedať, že inverzia je istou analógiou delenia. Tento záver využijeme nižšie pri popise operácií ľavého a pravého maticového delenia.

Príklad 1. *Použitím programového prostredia MATLAB riešte nasledujúci systém lineárnych algebraických rovníc 3. rádu metódou a) násobenia inverznou maticou zľava b) ľavého maticového delenia:*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned} \tag{8}$$

Riešenie: *a) V MATLABe si vytvoríme matice* ***A***, ***b*** *a využitím príkazu* `inv` *na výpočet inverznej matice určíme riešenie systému* **x** *zo vzťahu (5):*

```
>> A=[2 5 3; 4 6 2; 1 -5 3];
>> b=[1; 5; 3];
>> x=inv(A)*b

x =

    2.0278
   -0.4028
   -0.3472
```

b) Operácia vynásobenia stĺpcového vektora inverznou maticou zľava je ekvivalentná s ***operáciou ľavého maticového delenia*** *v MATLABe. (Pomôcka: Uvažujte s inverziou ako s analógiou delenia a vzťah (5) si predstavujte ako „**b** delené **A**“.)*

```
>> x=A\b

x =

    2.0278
   -0.4028
   -0.3472
```

Systém lineárnych algebraických rovníc (1) možno okrem štandardného maticového vyjadrenia (2) zapísať aj v nasledovnom ekvivalentnom maticovom tvare:

$$\boxed{\boldsymbol{x}_E \boldsymbol{A}_E = \boldsymbol{b}_E} \tag{9}$$

pričom matice koeficientov majú tvar $\boldsymbol{A}_E = \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ (matica rozmeru *nxn*), $\boldsymbol{b}_E = \boldsymbol{b}^T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$ (riadkový vektor rozmeru *nx1*). Riešením systému je riadkový vektor $\boldsymbol{x}_E = \boldsymbol{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ rozmeru *nx1*. (*Odporúčanie:* Roznásobením po prvkoch overte, že zápis (9) je ekvivalentný zápisu (1) aj (2).)

Riešenie $\boldsymbol{x}_E$ systému (9) dostaneme, ak obidve strany rovnice vynásobíme **sprava** maticou $\boldsymbol{A}_E^{-1}$, čím sa podobne ako v predchádzajúcom prípade naľavo osamostatní vektor $\boldsymbol{x}_E$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_E \boldsymbol{A}_E \boldsymbol{A}_E^{-1} &= \boldsymbol{b}_E \boldsymbol{A}_E^{-1} \\ \boldsymbol{x}_E \boldsymbol{I} &= \boldsymbol{b}_E \boldsymbol{A}_E^{-1} \end{aligned} \tag{10}$$

a riešenie systému nadobudne tvar:

$$\boxed{\boldsymbol{x}_E = \boldsymbol{b}_E \boldsymbol{A}_E^{-1} = \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{T}} \left(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\right)^{-1}} \tag{11}$$

resp. (pokiaľ chceme riešenie vyjadriť v tvare stĺpcového, nie riadkového vektora):

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_E^{\boldsymbol{T}} = \left(\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{T}} \left(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\right)^{-1}\right)^{\boldsymbol{T}}} \tag{12}$$

Príklad 2. *Použitím programového prostredia MATLAB a maticového zápisu (9) riešte systém lineárnych algebraických rovníc 3. rádu z príkladu 1 metódou a) násobenia inverznou maticou sprava b) pravého maticového delenia.*

Riešenie: *a) Podobne ako v príklade 1 si v MATLABe vytvoríme matice **A**, **b** systému a využitím príkazu* `inv` *na výpočet inverznej matice určíme riešenie systému buď v tvare riadkového vektora* $\boldsymbol{x}_E$ *zo vzťahu (11), alebo v tvare stĺpcového vektora* $\boldsymbol{x}$ *zo vzťahu (12):*

```
>> A=[2 5 3; 4 6 2; 1 -5 3];
>> b=[1; 5; 3];
>> xe=b'*inv(A')

xe =

    2.0278   -0.4028   -0.3472

>> x=(b'*inv(A'))'

x =

    2.0278
   -0.4028
   -0.3472
```

*b) Operácia vynásobenia riadkového vektora inverznou maticou sprava je ekvivalentná s **operáciou pravého maticového delenia** v MATLABe. (Pomôcka: Uvažujte s inverziou ako s analógiou delenia a vzťah (5) si predstavujte ako „$\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{T}}$ delené $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$“.)*

```
>> xe=b'/A'

xe =

    2.0278   -0.4028   -0.3472

>> x=(b'/A')'

x =

    2.0278
   -0.4028
   -0.3472
```