5 Modelovanie fyzikálnych systémov v prostredí MATLAB

5.1 Modelovanie a simulácia RLC obvodu – nabíjanie kondenzátora v prostredí MATLAB

Úloha:
Vypočítajte a znázornite priebeh prúdu i(t) a napätia $u_c(t)$ v RLC obvode s parametrami $R = 5\Omega$, $L = 0{,}1H$, $C = 100\mu F$ po pripojení na napätie $U_{DC} = 10V$. Zostavte matematický a simulačný model RLC obvodu pre nabíjanie kondenzátora.

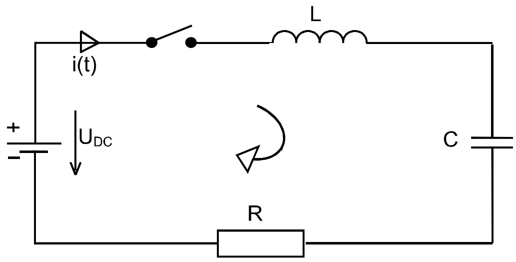
a) modelovanie RLC obvodu – analytická identifikácia → matematický model

Systém RLC obvodu je popísaný diferenciálno- integrálnou rovnicou vyplývajúcou z 2. Kirchhoffovho zákona:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = U_{DC} \qquad (1)$$

Počiatočné podmienky riešenia uvažujeme:

$$i(0) = 0;\ u_C(0) = 0 \qquad (2)$$



Obrázok 5-1 Nabíjanie kondenzátora cez technickú cievku

pre prúd pretekajúci obvodom platí vzťah:

$$i = C * \frac{du_c}{dt} \qquad (3)$$

Úpravou integrálu v rovnici (1) získame výslednú diferenciálnu rovnicu popisujúcu nabíjanie kondenzátora, ktorá reprezentuje matematický model RLC obvodu:

$$CL * \frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + CR\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = U_{DC} \qquad (4)$$

$$CL * u_c''(t) + CR * u_c'(t) + u_c(t) = U_{DC} \qquad (4a)$$

V prípade, že RLC obvod je pripojený na jednosmerné napätie U_{DC} pri nulových počiatočných podmienkach, potom za stavové veličiny je vhodné zvoliť napätie na kondenzátore a prúd pretekajúci obvodom: u_{Ct} a i_t. Volíme teda substitúciu

$$x_1(t) = u_{Ct},\ \ x_2(t) = i_t$$

a substitučný kanonický tvar systému má tvar

$$x_1' = u_{Ct}' = \frac{x_2}{C} \qquad x_2' = i'(t) = C * u_{Ct}'$$

Dostávame systém dvoch DR 1.rádu:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \frac{1}{C}x_2(t) \\ x_2' &= \frac{1}{L}(U_{DC} - R * x_2(t) - x_1(t)) \end{aligned} \qquad (5)$$

b) Simulácia nabíjania kontenzátora v RLC obvode v jazyku MATLAB

Simulujte v prostredí MATLAB časový priebeh napätia $u_C(t)$ pri prechodovom deji nabíjania kondenzátora, časový priebeh prúdu *i(t)* v obvode, úbytok napätia na odpore $u_R(t)$ a na cievke $u_L(t)$.

<u>Riešenie v programovom prostredí MATLAB:</u>

funkcia **nabikon.m**

```
% súbor nabikond.m - popis pre nabíjanie
%kondenzátora v RLC obvode
function xdot = nabikond(t,x) % vracia st. derivácie
R=5;
L=0.1;
C=1e-4;
Udc=10;
xdot = [x(2)/C; (1/L)*(Udc-R*x(2)-x(1))];
```

Hlavný program: **RLC45nab.m**

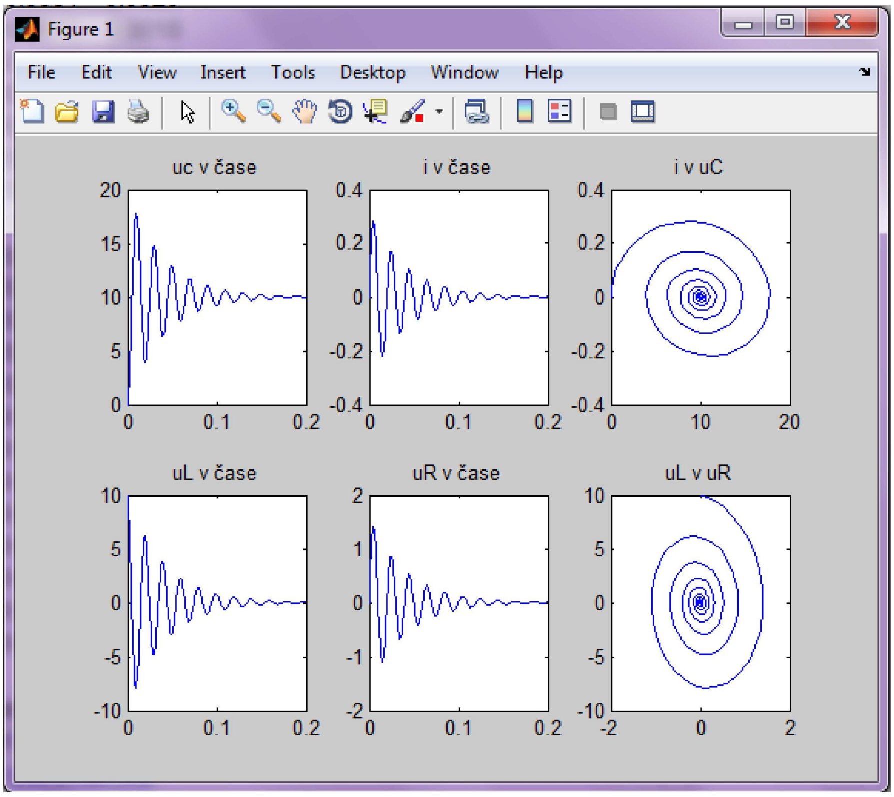
```
% súbor RLC45nab.m na vyhodnotenie súboru nabikond.m
t0=0;   tfin=0.2;
x0=[0 0]';
tol=1e-5; trace=0;

[t,x]=ode45('nabikond',t0,tfin,x0,tol,trace)

subplot(231), plot(t,x(:,1)), title('uc v čase');
subplot(232), plot(t,x(:,2)), title('i v čase');

uC=x(:,1);  iC=x(:,2);
uR=iC*5;  uL=(10-uR-uC);

subplot(233), plot(uC,iC), title('i v uC');
subplot(234), plot(t,uL), title('uL v čase');
subplot(235), plot(t,uR), title('uR v čase');
subplot(236), plot(uR,uL), title('uL v uR');
```



Obrázok 5-2 Grafické znázornenie $u_c(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$ a i(t) v RLC obvode

5.2 Modelovanie a simulácia RLC obvodu – vybíjanie kondenzátora v prostredí MATLAB

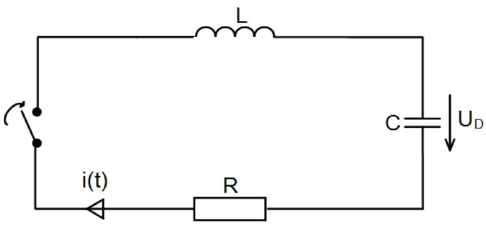
Úloha:
Vypočítajte a znázornite priebeh prúdu a napätia v RLC obvode s parametrami $R = 5\Omega$, $\mathrm{L} = 0{,}1\mathrm{H}$, $\mathrm{C} = 100\mu\mathrm{F}$, ak na kondenzátore bolo v čase $t = 0$ napätie $u_{DC} = 10V$. Zostavte matematický a simulačný model RLC obvodu pre výbíjanie kontenzátora.

a) Modelovanie RLC obvodu – analytická identifikácia → matematický model

Uvažovaný RLC obvod vieme popísať na základe 2. Kirchhoffovho zákona lineárnou diferenciálnou rovnicou 2: rádu:

$$L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = 0,$$

pričom pre počiatočné podmienky platí: $i(0) = 0\,, \frac{di(0)}{dt} = \frac{u_{DC}}{L}$



Obrázok 5-3 Vybíjanie kondenzátora cez technickú cievku

Pre prepis lineárnej diferenciálnej rovnice popisujúcej systém do substitučného kanonického tvaru zvolíme substitúciu $x_1(t) = i(t)$.

$$x_1´(t) = \frac{di(t)}{dt};$$

$$x_2´(t) = \frac{1}{L}\left(-Rx_2(t) - \frac{1}{C}x_1(t)\right),$$

s uvažovaním počiatočných podmienok $i(0) = 0\,, \frac{di(0)}{dt} = \frac{u_{DC}}{L}$

b) Simulácia vybíjania kondenzátora RLC obvodu v jazyku MATLAB

Simulujte v prostredí MATLAB časový priebeh napätia $u_C(t)$ pri vybíjaní kondenzátora, časový priebeh prúdu $i(t)$ tečúceho v obvode, úbytok napätia na odpore $u_R(t)$ a na cievke $u_L(t)$.

<u>Riešenie v programovom prostredí MATLAB:</u>

funkcia: **vybikond.m**

```
%vybikond - vybíjanie kondenzátora v obvode s cievkou a odporom
function xdot=vybikond(t,x); % vracia stavové ch.
R=5;  L=0.1; C=1e-4;
xdot=[x(2); (1/L)*(-R*x(2)-(1/C)*x(1))]; %maticový zápis oboch rovníc
```

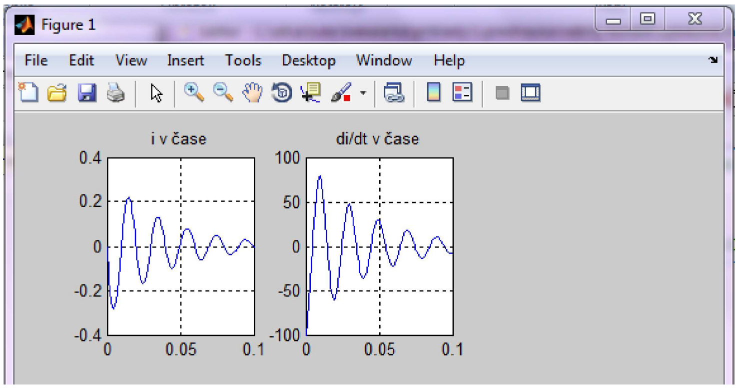
hlavný program:

```
t0=0; tfin=0.1;
x0=[0; -100];
tol=1e-3;

[t,x]=ode23('vybikond',t0,tfin,x0,tol);

subplot(231), plot(t,x(:,1)), grid, title('i v čase');
subplot(232), plot(t,x(:,2)), grid, title('di/dt v čase');

ic=x(:,1);  di=x(:,2);
uR=ic*5;  uL=di*0.1;
uC=(-uR-uL);
```



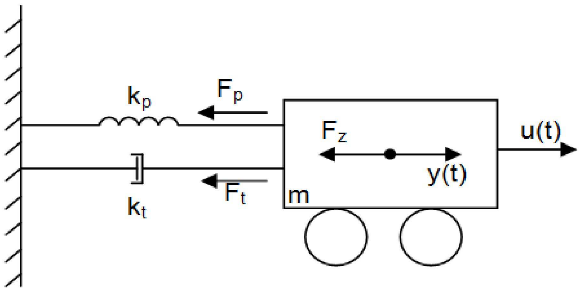
Obrázok 5-4 Vybíjanie kondenzátora – časový priebeh prúdu tečúceho v obvode a jeho derivácia

5.3 Modelovanie a simulácia systému "pružina-tlmič"

Úloha:
Zostavte matematický a simulačný model systému „pružina-tlmič".

a) Modelovanie systému „pružina – tlmič" – analytická identifikácia

$u(t)$ - budiaca sila
$F_p(t)$ – direktívna sila pružiny
$F_t(t)$ – sila viskózneho trenia
$F_z(t)$ - sila zotrvačnosti
$y(t)$ – poloha vozíka
y´(t) - rýchlosť vozíka



Uvažujeme, že pre jednotlivé sily znázornené na obrázku platí :

$$F_z(t) = m * \frac{dy^2(t)}{dt^2} \qquad F_t(t) = k_t * \frac{dy(t)}{dt} \qquad F_p(t) = k_p * y(t)$$

Na základe zákona o rovnováhe síl (súčet síl pôsobiacich na teleso v ťažisku je rovný nule), t.j.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = 0$$

môžeme napísať :

$$F_z(t) + F_p(t) + F_t(t) = u(t)$$

Po dosadení za jednotlivé sily *F*$F_Z(t)$, $F_T(t)$, $F_P(t)$ do zákona o rovnováhe síl dostavame lineárnu diferenciálnu rovnicu s konštatnými koeficientami, ktorá predstavuje matematický model systému „pružina-tlmič":

$$m * \frac{d^2y(t)}{dt} + k_t * \frac{dy(t)}{dt} + k_p * y(t) = u(t)$$

Pre prepis LDR do substitučného kanonického tvaru vykonáme substitúciu: $y(t) = x_1(t)$;

$$x_1´(t) = x_2(t)$$

$$x_2´(t) = \frac{u(t)}{m} - \frac{k_p}{m} * x_1(t) - \frac{k_t}{m} x_2(t)$$

b) Simulácia časových priebehov polohy *y(t)*,rýchlosti *y´(t)* a zrýchlenia *y´´(t)* systému „pružina – tlmič" pri pôsobení vstupnej sily *u(t)*

Simuláciu vykonajte pre nasledujúce parametre: *m=30kg* ,$k_t = 20$,$k_p = 15$, $u(t) = 10N$

funkcia **vozik.m**

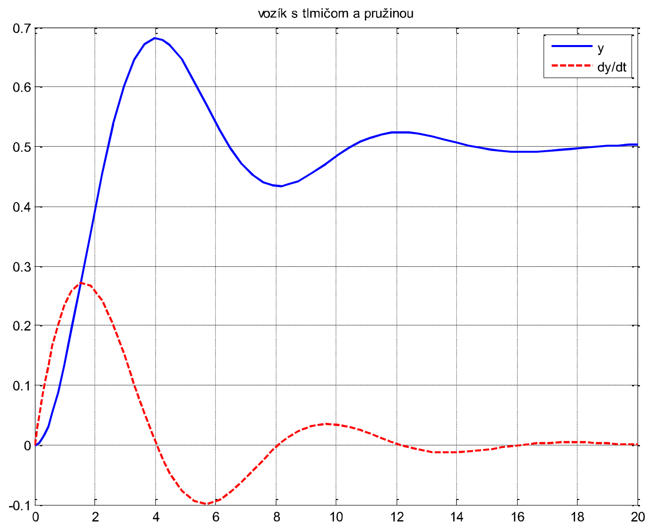
```
% funkcia 'vozik.m' - vozík s tlmičom a pružinou
function xdot=vozik(t,x)
global u m kt kp
xdot=[x(2); u/m-(kp*x(1))/m-(kt*x(2))/m];
```

hlavný program

```
t0=0;
tfin=20;
global u m kt kp
u=input('zadaj vonkajsiu silu u = ');
m=input('zadaj hmotnost vozika m = ');
kp=input('zadaj konstantu pruziny kp = ');
kt=input('zadaj konstantu tlmica kt = ');
x0=input('zadaj pociatocne podmienky x0 = ');

[t,x]=ode23('vozik', t0,tfin, x0);

plot(t,x(:,1),'k-',t,x(:,2),'k--')
% alebo plot(t,x) pricom x je dvojrozmerny vektor
```



Obrázok 5-5 Simulácia dynamického systému „vozik-pružina"

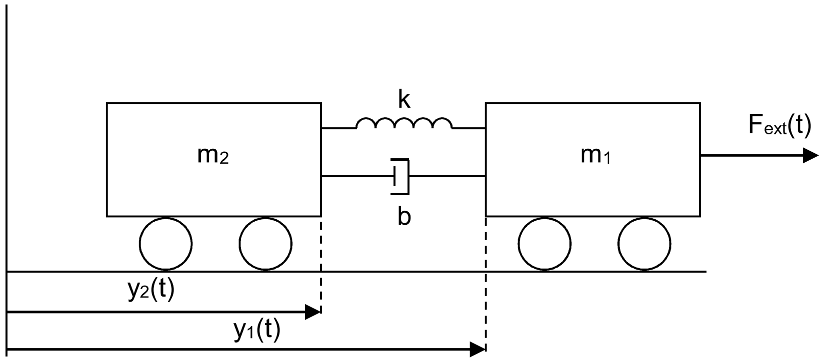
časove priebehy polohy y(t) a rýchlosti y´(t)

Pozn. Každá funkcia v simulačnom jazyku MATLAB definovaná ako m-file má svoje vlastné lokálne premenné, ktoré sú neviditelné pre ostatné funkcie. Ak chceme, aby lokálne premenné v používanej funkcii boli viditelné aj mimo funkcie, musíme ich deklarovať pomocou príkazu ***„global"***

5.4 Modelovanie a simulácia systému "dva vozíky v interakcii" v jazyku MATLAB

Úloha:
Zostavte matematický a simulačný model systému „dva vozíky v interakcii".

Vozová súprava (dva vozíky v interakcii) predstavuje model dynamického správania sa dvoch telies prepojených pružinou a tlmičom. Tento typ systému sa často používa v kybernetike pri modelovaní kmitavých systémov.



Obrázok 5-6 Fyzikálny systém, dva vozíky v interakcii

a) Modelovanie systému „dva vozíky v interakcii" – analytická identifikácia

Vstup do systému:
$F_{ext}(t)$ – sila pôsobiaca na vozík s hmotnosťou m_1 a následne aj na vozík s hmotnosťou m_2

Výstup zo systému:
$y(t)$- vzdialenosť medzi vozíkmi:
$y(t) = y_1(t) - y_2(t)$

Systém je popísaný dvoma lineárnymi diferenciálnymi rovnicami 2. rádu:

1. Prvá LDR popisuje sily pôsobiace na vozík s hmotnosťou m_1 :

$$m_1 y_1''(t) = -k[y_1(t) - y_2(t)] - b[y_1'(t) - y_2'(t)] + F_{ext}(t)$$

2. Druhá LDR popisuje pôsobenie síl na vozík s hmotnosťou m_2:

$$m_2 y_2''(t) = k[y_1(t) - y_2(t)] + b[y_1'(t) - y_2'(t)]$$

pričom parameter *b* predstavuje koeficient tlmenia a parameter *k* predstavuje tuhosť pružiny.

Model systému v substitučnom kanonickom tvare:

$$x_1'(t) = x_2(t)$$

$$x_2'(t) = -\frac{k}{m_1}x_1(t) + \frac{k}{m_1}x_3(t) - \frac{b}{m_1}x_2(t) + \frac{b}{m_1}x_4(t) + \frac{1}{m_1}F_{ext}(t)$$

$$x_3'(t) = x_4(t)$$

$$x_4'(t) = \frac{k}{m_2}x_1(t) - \frac{k}{m_2}x_3(t) + \frac{b}{m_2}x_2(t) - \frac{b}{m_2}x_4(t)$$

Systém štyroch DR prvého rádu predstavuje matematický model systému dva vozíky v interakcii v substitučnom kanonickom tvare, ktorý je takto pripravený na programovú implmentáciu do simulačného jazyka MATLAB

Výstup systému *y(t)* odpovedá rozdiel vzdialeností jednotlivých vozíkov od zvislej osi:

$y(t) = x_1(t) - x_3(t)$→rovnica pre výstup

b) Simuláciou v jazyku MATLAB zistite časový priebeh vzdialenosti medzi dvoma vozíkmi *y(t)* pri pôsobení vonkajšej sily $F_{ext}(t)$ na daný systém. Simuláciu vykonajte pre vhodnú voľbu parametrov systému *m1, m2, b, k* a budiaceho vstupného signálu vstupnej sily *F.*

<u>Riešenie v programovom prostredí MATLAB:</u>

funkcia : vozíky.m

```
function xder=voziky(t,x)
global m1 b k F m2

xder=[x(2); (-/m1)*x(1)+(k/m1)*x(3)(b/m1)*x(2)+(b/m1)*x(4)+(1/m1)*F;
x(4);(k/m2)*x(1)-(k/m2)*x(3)+(b/m2)*x(2)-(b/m2)*x(4)]

return
```

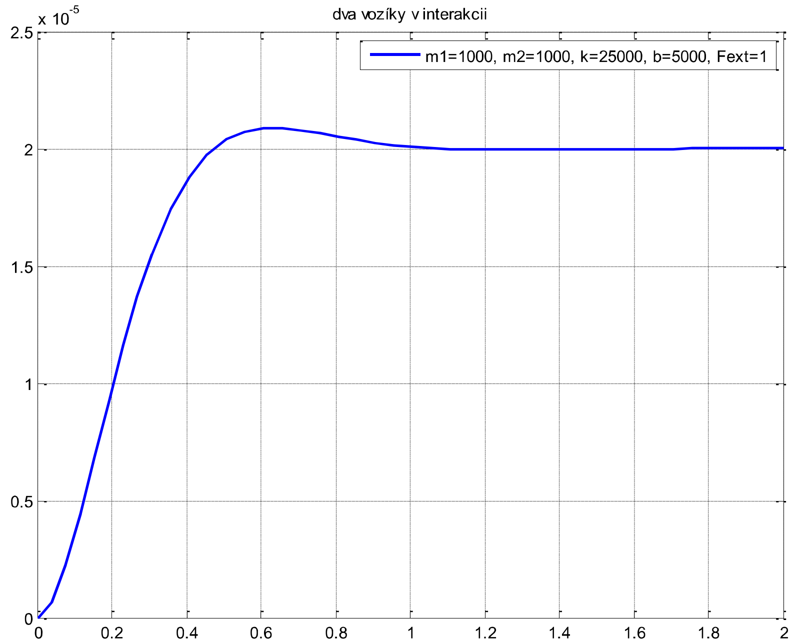
Hlavný program

```
global m1 b k F m2   %parametre systému

m1=1000;
m2=1000;
b=5000;
k=25000;
F=1;

[t,y]=ode45('voziky',[0 2],[0 0])

plot(t,y(:,1))
grid on;
title('dva vozíky v interakcii')
legend('m1=1000, m2=1000, k=25000, b=5000, Fext=1')
```

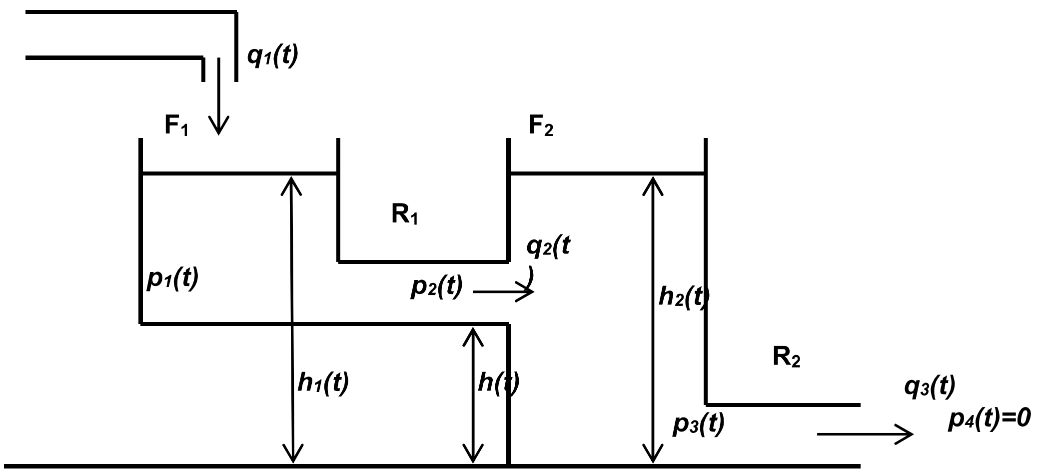


Obrázok 5-7 Simulácia vzdialenosti medzi dvoma vozíkmi v interakcii y(t) pri pôsobení sily $F_{ext}(t)$

5.5 Modelovanie a simulácia hydraulického systému - dve nádoby v interakcii v jazyku MATLAB

Úloha:
Zostavte matematický model hydraulického systému dvoch nádob v interakcii, pričom uvažujete, že vstupom do systému je prítok do prvej nádoby $q_1(t)$ a výstup hydraulického systému je výtok z druhej nádoby $q_3(t)$

Na riešenie danej úlohy uvažujeme hydraulický systém pozostávajúci z dvoch vodorovne prepojených nádob s prítokom aj odtokom v dvojrozmernom súradnicovom systéme.



Obrázok 5-8 Hydraulický systém – dve nádoby v interakcii

a) Modelovanie hydraulického systému – matematický model

Hydrostaticky tlak v jednotlivých nádobách a potrubí je popísaný rovnicou

$$p = \rho g h$$

Linearizovaná závislosť prietoku v prietokovej trubici z nádrže 1 do nádrže 2 je popísaná rovnicou:

$$q_2(t) = \frac{1}{R_1}\left(p_1(t) - p_2(t)\right)$$

a linearizovaná závislosť prietoku v odtokovej trubici z nádrže 2. je popísaná rovnicou:

$$q_3(t) = \frac{1}{R_2}\left(p_3(t) - p_4(t)\right)$$

Diferenciálne rovnice opisujúce dynamiku, t.j. zmenu objemu kvapaliny v obidvoch nádobách v závislosti od vstupného a výstupného prietoku z konkrétnej nádoby majú tvar:

$$F_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t)$$

$$F_2 \frac{dh_2(t)}{dt} = q_2(t) - q_3(t)$$

Úpravou týchto rovníc získame výslednú diferenciálnu rovnicu pre matematický model hydraulického systému kde $q_3(t)$ je hľadané riešenie LDR pri budení $u = q_1(t)$:

$$\frac{F_1 R_2}{\rho g}\frac{dq_3(t)}{dt} + \frac{F_1 R_1 F_2 R_2}{(\rho g)^2}\frac{d^2 q_3(t)}{dt^2} + \frac{F_1 R_1}{\rho g}\frac{dq_3(t)}{dt} + \frac{F_2 R_2}{\rho g}\frac{dq_3(t)}{dt} + q_3(t) = q_1(t)$$

Pre prehľadnejší zápis LDR zvolímenasledujúce označenie:

$$T_1 = \frac{F_1 R_1}{\rho q} \qquad T_2 = \frac{F_2 R_2}{\rho q} \qquad T_3 = \frac{F_1 R_2}{\rho q}$$

Lineárna diferenciálna rovnica popisujúca prechodový dej odtoku z druhej nádoby má tvar :

$$T_1 T_2 \ddot{q_3}(t) + (T_1 + T_2 + T_3)\dot{q_3}(t) + q_3(t) = q_1(t)$$

Prepis do substitučného kanonického tvaru :

ak zvolíme substitúciu $x_1(t) = q_3(t)$ dostaneme

$$x_1{}'(t) = \frac{1}{T_1 T_2} x_1(t)$$

$$x_2{}'(t) = \frac{-1}{T_1 T_2} x_1(t) + \frac{-(T_1 + T_2 + T_3)}{T_1 T_2} x_2(t) + \frac{q_1(t)}{T_1 T_2}$$

b) **Úloha na samostatné riešenie**

Zostavte simulačný model HS v jazyku MATLAB s využitím funkcie *„ode45“*, ktorého výsledkom bude časový priebeh fyzikálnej veličiny *„$q_3(t)$“* čo je výtok z druhej nádoby pri uvažovanom prítoku *„$q_1(t) = 1$ $m^3 s^{-1}$*

Parametre simulačného výpočtu:
Počiatočné podmienky: $q_3(0) = 0$, $q'_3(0) = 0$
prierezy nádob :_ $F_1 = 0.25m^2$ $F_2 = 0.2m^2$,
odpor potrubia : $R_1 = 20kPa$ $R_2 = 20kPa$
hustota kvapaliny : $\rho = 998\ kg m^{-3}$
gravitačné zrýchlenie : $g = 9.81 m s^{-2}$
budiaci signál – prítok $u(t) = q_1(t)$, $q_1 = 1m^3 s^{-1}$