Využitie aproximácie v programovom prostredí MATLAB

metóda najmenších štvorcov

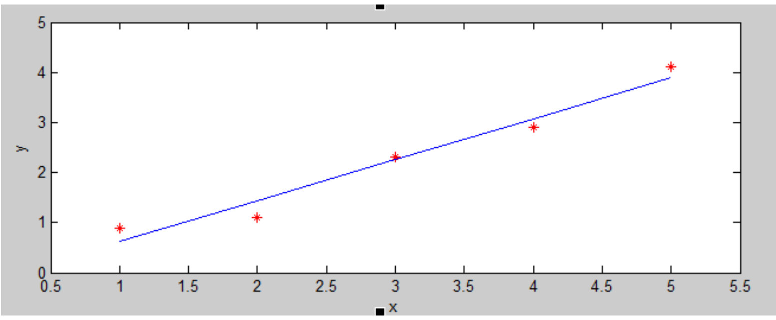
chyby aproximácie

funkcie – polyfit, polyval

- aproximovaná funkcia je približná funkcia, t. j. snažíme sa nejakú zložitejšiu funkciu vyjadriť jednoduchšie; jednoduchými aritmetickými operáciami. Práve polynómy sú najjednoduchšie funkcie, ktoré možno vypočítať priamo, dobre sa s nimi zaobchádza a ľahko sa derivujú či integrujú.
- úlohou aproximácie je nahradenie funkcie funkciou $f: A \rightarrow R$ pomocou funkcie $g: A \in B \rightarrow R$
- vo veľkej miere sa aproximácia využíva hlavne preto, lebo v praxi sa ideálne hodnoty vyskytujú málokedy
- príkladom aproximácie je metóda najmenších štvorcov

Metóda najmenších štvorcov

- Metóda najmenších štvorcov spočíva v nájdení funkcie n-tého stupňa, ktorá čo najlepšie eliminuje náhodné odchýlky nameraných hodnôt.



Aproximácia priamkou

- Priamka je popísaná polynómom 1.stupňa, $y(x) = a_0 x + a_1$
- Majme súbor n bodov so súradnicami (x_i, y_i). Metóda najmenších štvorcov umožňuje vypočítať parametre a_0 a a_1 priamky tak, že súčet štvorcov (druhých mocnín) vzdialenosti jednotlivých bodov od tejto priamky je najmenší možný. Túto podmienku je možné zapísať vzťahom:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_0 x_i + a_1 - y_i)^2 \rightarrow min$$

Z tejto podmienky vieme vypočítať hodnoty a_0 a a_1 :

$$a_0 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$a_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i\right)/n$$

Korelačný koeficient určuje do akej miery lineárny vzťah $y = a_0 x + a_1$ aproximuje hodnoty znaku y hodnotami x. Korelačný koeficient je vždy číslo z intervalu <-1,1> a krajné hodnoty, čiže -1 a 1 nadobúda práve vtedy, ako je medzi znakmi priama, resp. nepriama úmera.

Korelačný koeficient je definovaný vzorcom :

$$r_{x,y} = \frac{s_{x,y}}{s_x s_y} = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x}).(y_i - \bar{y})}{s_x s_y}.$$

Lineárna závislosť medzi hodnotami znakov x a y je malá, ak $|r_{x,y}| < 0{,}3$, mierna, ak $0{,}3 < |r_{x,y}| < 0{,}8$ a silná, ak $0{,}8 < |r_{x,y}| < 1$.

Dá sa dokázať, že hodnoty týchto parametrov popisujú súradnice minima pôvodného vzťahu.

- ⇨ K získaniu hodnôt aproximačného polynómu nám slúži funkcia ***polyval***.
- ⇨ ***y_aproximované = polyval (P, x)***

x → vektor hodnôt nezávislej premennej

P → vektor koeficientov aproximovaného polynómu

y_aproximované → vektor hodnôt aproximovaného polynómu

- ⇨ Voľba stupňa polynómu väčšinou závisí na fyzikálnej podstate problému
- ⇨ Pokiaľ pre n-závislých premenných použijeme polynóm n-1 stupňa, ide o interpoláciu (t. j. polynóm bude prechádzať každým bodom pôvodných hodnôt $[x_i, y_i]$)

Chyby aproximácie

- ⇨ Súčet štvorcov odchýlok vypočítame jednoducho pomocou sumy z druhej mocniny rozdielu $y\_aproximované$ a y, teda $S = sum((y\_aproximované - y).\verb|^|2)$. Nezabudnite, že potrebujeme každý rozdiel umocniť ak to tak neurobíte, programové prostredie MARLAB Vás upozorní na chybu :

```
>> S=sum((y_aprox-y)^2)
??? Error using ==> mpower
Inputs must be a scalar and a square matrix.
```

- ⇨ Stredná kvadratická odchýlka ako chyba aproximácie : $S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - p_1(x_i))^2}$, pričom p_1 je približná hodnota funkcie v bode x.

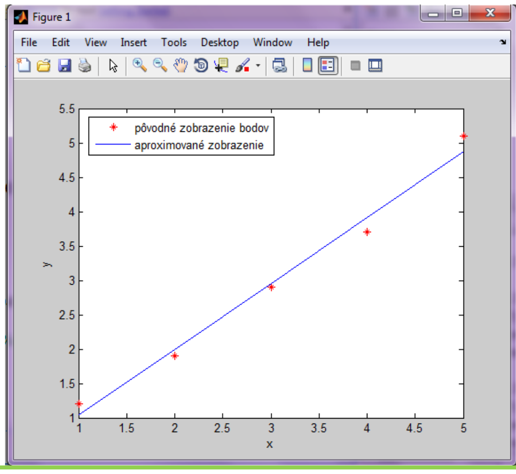
PRÍKLAD 1

Napíšte program v simulačnom jazyku Matlab pre aproximáciu neznámych bodov x_i, y_i priamkou, ktorá je popísaná tabuľkou:

x_i	1	2	3	4	5
$y_i = f(x_i)$	1.2	1.9	2.9	3.7	5.1

Riešenie v programovom prostredí MATLAB:

```
>> x=[1:5];
>> y=[1.2,1.9,2.9,3.7,5.1];
>> P=polyfit(x,y,1)

P =

   0.9600    0.0800

>> y_aprox = polyval(P,x)

y_aprox =

   1.0400    2.0000    2.9600    3.9200    4.8800

>> S=sum((y_aprox-y).^2) %výpočet sumy štvorcov odchyliek

S =

   0.1360
```




```
>> plot(x,y,'r*')
>> hold on
>> plot(x,y_aprox)
>> legend('pôvodné zobrazenie bodov', 'aproximované zobrazenie')
```

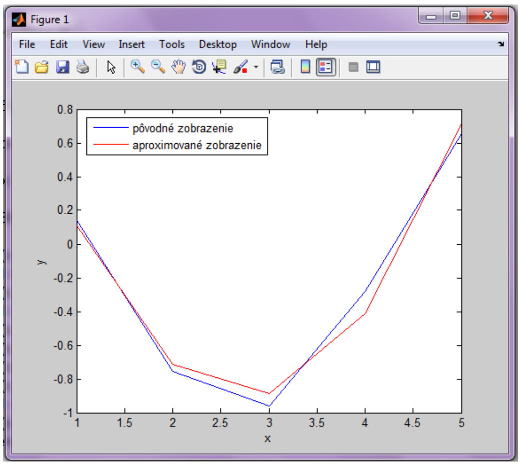
Aproximácia polynómom 2.rádu

⇨ Polynóm 2.rádu : $P(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$

PRÍKLAD 2

Napíšte program pre aproximáciu funkcie $y = sin(x + 2)$ pre $x = 1,2, \ldots ,5$ polynómom 2.rádu.

```
>> x=[1:5];
>> y=sin(x+2);
>> P=polyfit(x,y,2)

P =

   0.3250   -1.7992    1.5830

>> y_aprox = polyval(P,x)

y_aprox =

   0.1088   -0.7153   -0.8894   -0.4135    0.7125

>> S=sum((y_aprox-y).^2) %výpočet sumy štvorcov odchyliek

S =

   0.0286
```




```
>> plot(x,y)
>> hold on
>> plot(x,y_aprox,'r')
>> legend('pôvodné zobrazenie', 'aproximované zobrazenie')
```

<u>Aproximácia polynómom n - tého rádu</u>

- ⇨ Pre výpočet aproximácie polynómom n-tého stupňa použijeme funkciu ***polyfit***, ktorá počíta aproximáciu metódou najmenších štvorcov.

- ⇨ ***P = polyfit (x,y,n)***

  - n → stupeň polynómu
  - y → vektor hodnôt závislej premennej
  - x → vektor hodnôt nezávislej premennej
  - P → vektor **koeficientov** výsledného aproximačného polynómu

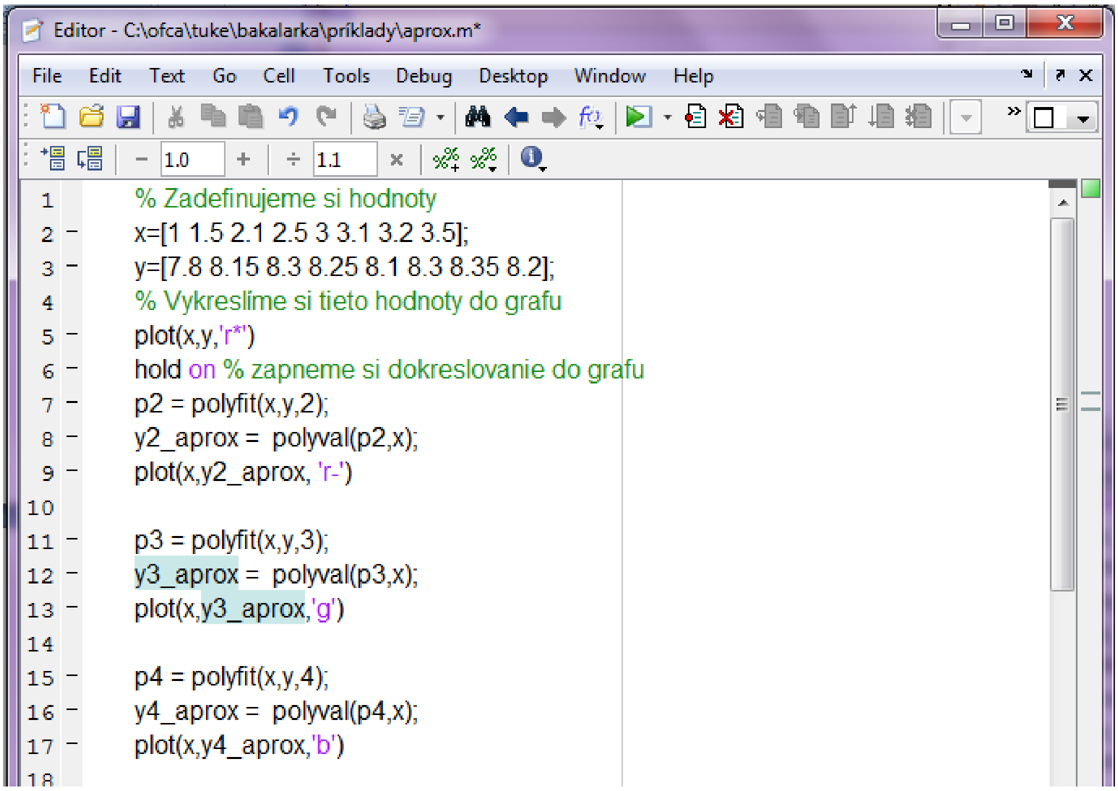
Pomocou funkcie ***polyfit*** dostaneme len koeficienty výsledného polynómu.

$P(x) = p_1x^n + p_2x^{n-1} + \cdots + p_nx^1 + p_{n+1}$, čo nám nepostačuje a potrebujeme získať hodnoty aproximačného polynómu

<u>PRÍKLAD 3</u>

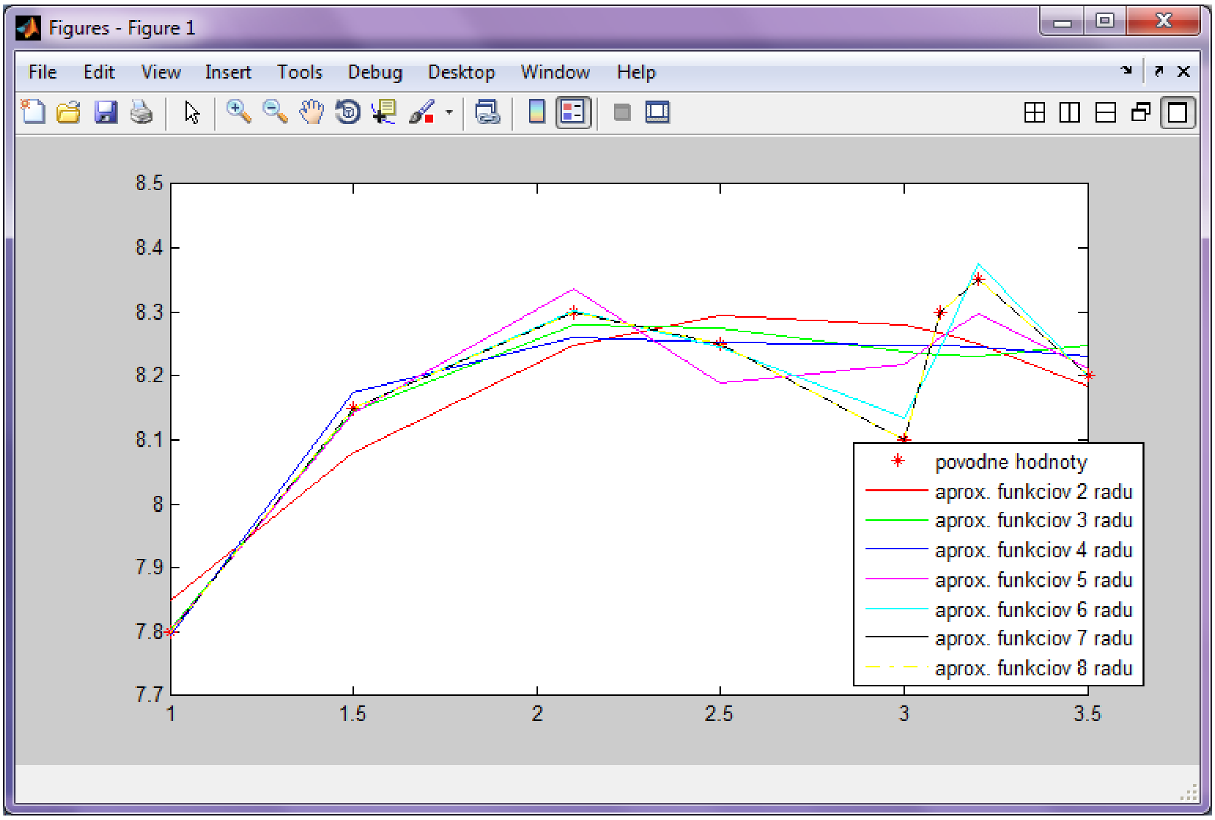
Aproximujte funkciu popísanú tabuľkou funkciou 2, 3, ... 8 rádu

x_i	1	1,5	2,1	2,5	3	3,1	3,2	3,5
y_i	7,8	8,15	8,3	8,25	8,1	8,3	8,35	8,2



```
p5 = polyfit(x,y,5);
y5_aprox =  polyval(p5,x);
plot(x,y5_aprox,'m')

p6 = polyfit(x,y,6);
y6_aprox =  polyval(p6,x);
plot(x,y6_aprox,'c')

p7 = polyfit(x,y,7);
y7_aprox =  polyval(p7,x);
plot(x,y7_aprox,'k')

% Kazde dalsie bude uz len prekreslovat aproximaciu funkciou 7meho radu,
% kedze mame 8 hodnotove vektory
p8 = polyfit(x,y,8);
y8_aprox =  polyval(p8,x);
plot(x,y8_aprox,'y-.')

legend('povodne hodnoty', 'aprox. funkciov 2 radu','aprox. funkciov 3 radu',...
'aprox. funkciov 4 radu','aprox. funkciov 5 radu','aprox. funkciov 6 radu',...
'aprox. funkciov 7 radu','aprox. funkciov 8 radu')
```

Program popísaný v m-súbore pre výpočet príkladu č. 3



Vykreslenie aproximovanej funkcie z príkladu 3