Riešenie lineárnych diferenciálnych rovníc algoritmicky a v prostredí MATLAB

- Diferenciálne rovnice nazývame rovnice, v ktorých sa vyskytujú funkcie a ich derivácie.
- K diferenciálnym rovniciam nás najčastejšie vedú fyzikálne a matematické úlohy.

Druhy diferenciálnych rovníc

a) Obyčajné diferenciálne rovnice – ako neznáma vystupuje reálna funkcia jednej reálnej premennej a tiež derivácie tejto funkcie.
   - Hovoríme, že diferenciálna rovnica je *n*-tého rádu, ak v nej vystupuje *n*-tá derivácia neznámej funkcie *y* a ak už v nej nevystupuje žiadna jej derivácia vyššieho radu ako *n*.
     - Lineárne diferenciálne rovnice
     - Nelineárne diferenciálne rovnice

b) Parciálne diferenciálne rovnice – ako neznáma vystupuje funkcia dvoch alebo viac premenných a v ktorej vystupujú parciálne derivácie tejto neznámej funkcie.

Lineárne diferenciálne rovnice 1.rádu

- V úlohách, ktoré vedú na riešenie diferenciálnych rovníc 1. rádu je obyčajne vopred známa hodnota hľadanej funkcie v nejakom bode t_0.
- Úlohou je nájsť medzi všetkými riešeniami diferenciálnej rovnice $y' = f(t, y)$ také riešenie $y = y(t)$, ktoré spĺňa počiatočnú podmienku $y(t_0) = t_0$, kde y_0 je dané číslo. Takýto typ úlohy sa nazýva *Cauchyho úloha.*

Lineárne diferenciálne rovnice n-tého rádu

- Homogénna lineárna diferenciálna rovnica (DR bez pravej strany) je DR tvaru $a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$, kde a_i, i =0,1, ..., n sú spojité funkcie.
- Nehomogénna lineárna diferenciálna rovnica (DR s pravou stranou) je DR tvaru $a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b$, kde a_i, $i = 0,1, \dots, n$ a b sú spojité funkcie.
   - Všeobecné riešenie y rovnice je súčtom všeobecného riešenia $\bar{y}$ rovnice a partikulárneho riešenia y^* rovnice, tj. $y = \bar{y} + y^*$.

Riešenie LDR so špeciálnou pravou stranou

- *P*ravá strana LDR musí mať tvar $u(t) = e^{at} * (P_{s1}(t) * \cos bt + Q_{s2}(t) * \sin bt)$, potom parikulárne riešenie *y** bude mať tvar $y^* = x^k e^{at} * (p_s(t) * \cos bt + q_s * \sin bt)$
- V prípade viacerých možných pravých strán platí princíp superpozície: $u(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$, tak $y^* = y_1^* + y_2^* + \cdots + y_n^*$, kde $y_1{}^*, y_n{}^*, \dots, y_n{}^*$ sú partikulárne riešenia DR

Riešenie LDR laplaceovou transformáciou

- Laplaceová transformácia nám ponúka jednoduché riešenie diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi
- Pomerom Laplaceovho výstupného signálu k Laplaceovho vstupného signálu pri nulových počiatočných podmienkach je definovaný **obrazový prenos systému.**

  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$, => Y(s)=G(s)U(s)

  Kde $U(s)$ predstavuje vstup do systému a $Y(s)$ predstavuje výstup zo systému
- Späť do časovej oblasti sa dostaneme použitím spätnej transformácie.

PRÍKLAD 2

Majme LDR tvaru: $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 7 * \cos(3t)$. Nájdite všeobecné riešenie tejto LDR pre nulové počiatočné podmienky.

1. Najprv vyriešime homogénnu DR
   $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 0$

   Túto pre výpočet homogénnej DR potrebujeme vypočítať charakteristickú rovnicu:
   $s^2 - 2s - 3 = 0$
   $(s + 1)(s - 3) = 0$
   $s_1 = -1$
   $s_2 = 3$
   Riešením charakteristickej rovnice získame všeobecné riešenie $\bar{y} = C_1 * e^{-t} + C_2 * e^{3t}$

2. Následne vyriešime špeciálnu pravú stranu
   - V našom prípade je pravá strana $f(t) = 7 * \cos(3t)$.
   - Z všeobecného partikulárneho riešenia $y^* = x^k * e^{ax} * (A * \cos(bx) + B * \sin(bx))$ odhadneme s=0, a=0, b=3.
   - Keďže komplexne združené číslo $a + ib = 3i$ nie je v tomto prípade žiadnym koreňom, preto k=0.
   - A teda partikulárne riešenie tejto LDR je $y^* = x^0 * e^{0t} * (A * \cos(3t) + B * \sin(3t)) =$
     $= A * \cos(3t) + B * \sin(3t)$
3. Získané partikulárne riešenie zderivujeme:
   $(y^*)' = -3A * \sin(3t) + 3B * \cos(3t)$
   $(y^*)'' = -9A * cos(3t) - 9B * \sin(3t)$

4. Dosadíme partikulárne riešenia do pôvodnej LDR ($y'' - 2y' - 3y = 7 * \cos(3t)$)
   $$-9A * \cos(3t) - 9B * \sin(3t) - 2 * (-3A * \sin(3t) + 3B * \cos(3t)) -$$
   $$-3 * (A * cos(3t) + B * \sin(3t)) = 7 * \cos(3t)$$
   - Upravíme : $-9A * \cos(3t) - 9B * \sin(3t) + 6A * \sin(3t) - 6B * \cos(3t) - 3Acos(3t) -$
     $-3B * \sin(3t) = 7 * \cos(3t)$
     $$(-12A - 6B) * \cos(3t) + (-12B + 6A) * \sin(3t) = 7 * \cos(3t)$$
     $\cos(3t)$: $-12A - 6B = 7$ $A = -\frac{7}{15}$

$\sin(3t)$: $\quad -12B + 6A = 0 \quad\quad B = -\frac{7}{30}$

⇨ Partikulárnym riešením je rovnica $y^* = -\frac{7}{15} * \cos(3t) - \frac{7}{30} * \sin(3t)$

5. Všeobecné riešenie danej nehomogénnej LDR hľadáme v tvare $y = \bar{y} + y^*$

$$y = C_1 * e^{-t} + C_2 * e^{3t} - \frac{7}{15} * \cos(3t) - \frac{7}{30} * \sin(3t)$$

6. Určíme konštanty z počiatočných podmienok:

$$y(t) = C_1 * e^{-t} + C_2 * e^{3t} - \frac{7}{15} * \cos(3t) - \frac{7}{30} * \sin(3t)$$

$$y'(t) = -C_1 * e^{-t} + 3C_2e^{3t} + \frac{7}{5}\sin(3t) - \frac{7}{10}\cos(3t)$$

$y(0) = 0$: $\quad C_1 * e^{-1*0} + C_2 * e^{3*0} - \frac{7}{15} * \cos(3*0) - \frac{7}{30} * \sin(3*0) = 0$

$$C_1 + C_2 - \frac{7}{15} + 0 = 0$$

$$C_1 = \frac{7}{15} - C_2$$

$$C_1 = \frac{7}{40}$$

$y'(0) = 0$: $\quad -C_1 * e^{-t} + 3C_2e^{3t} + \frac{7}{5}\sin(3t) - \frac{7}{10}\cos(3t) = 0$

$$-C_1 + 3 * C_2 + 0 - \frac{7}{10} = 0$$

$$4 * C_2 = \frac{7}{6}$$

$$C_2 = \frac{7}{24}$$

7. Celkové riešenie: $\boxed{y = \frac{7}{40} * e^{-t} + \frac{7}{24} * e^{3t} - \frac{7}{15} * \cos(3t) - \frac{7}{30} * \sin(3t)}$

Overenie pomocou Laplaceovej transformácie

$y''(t) - 2 * y'(t) - 3 * y(t) = 7 * cos(3t),$ $\quad\quad PP: y(0) = y'(0) = 0$

1. Prevedieme LDR na obraz

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2 * \big(sY(s) - y(0)\big) - 3Y(s) = \frac{7s}{s^2 + 3^2}$$

$$s^2Y(s) - 2sY(s) - 3Y(s) = \frac{7s}{s^2 + 3^2}$$

2. Z obrazu vytvoríme prenosovú funkciu

$$Y(s) * (s^2 - 2s - 3) = \frac{7s}{s^2 + 3^2}$$

$$Y(s) = \frac{7s}{(s^2 + 3^2) * (s^2 - 2s - 3)}$$

3. Vypočítame korene prenosovej funkcie

$$\frac{7s}{(s^2 + 3^2) * (s^2 - 2s - 3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3} + \frac{Cs + D}{s^2 + 9}$$

$$7s = A * (s^2 + 9) * (s - 3) + B * (s^2 + 9) * (s + 1) + (Cs + D) * (s - 3) * (s + 1)$$

s^3: $0 = A + C + D$

s^2: $0 = -2A + B - 3C + D$

s^1: $7 = -3A - 2B + 9C + 9D$

s^0: $0 = -3B - 27C + 9D$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 9 & 9 & 7 \\ 0 & -3 & -27 & 9 & 0 \end{array}\right) \quad => \quad \begin{array}{l} A = \frac{7}{40} \\ B = \frac{7}{24} \\ C = -\frac{7}{15} \\ D = -\frac{7}{10} \end{array}$$

$$\frac{7s}{(s^2 + 3^2) * (s^2 - 2s - 3)} = \frac{\frac{7}{40}}{s+1} + \frac{\frac{7}{24}}{s-3} - \frac{\frac{7}{15}s + \frac{7}{10}}{s^2 + 9}$$

4. Následne použijeme spätnú transformáciu, aby sme sa dostali späť do časovej oblasti.

$\frac{7}{40} * \frac{1}{s+1} \div \frac{7}{40} * e^{-t}$

$\frac{7}{24} * \frac{1}{s-3} \div \frac{7}{24} * e^{3t}$

$\frac{-\frac{7}{15}s - \frac{7}{10}}{s^2+9} = -\frac{7}{15} * \frac{s}{s^2+3^2} - \frac{7}{10} * \frac{1}{s^2+3^2}$

$-\frac{7}{10} * \frac{1}{s^2+3^2} = -\frac{7}{10} * \frac{1}{s^2+3^2} * \frac{3}{3} = -\frac{7}{30} * \frac{3}{s^2+3^2} \div -\frac{7}{30} * \sin(3t)$

$$-\frac{7}{15}*\frac{s}{s^2+3^2} \div -\frac{7}{15}*\cos(3t)$$

5. Riešenie pomocou Laplaceovej transformácie

$$\boxed{y=\frac{7}{40}*e^{-t}+\frac{7}{24}*e^{3t}-\frac{7}{15}*\cos(3t)-\frac{7}{30}*\sin(3t)}$$

Pri riešení DR simulačným jazykom MATLAB je nutné si uvedomiť, že MATLAB neumožňuje riešiť DR vyššieho rádu, ale iba systém diferenciálnych rovníc 1.rádu. Preto používame transformáciu diferenciálnych rovníc n-tého rádu na diferenciálne rovnice 1-ho rádu.

Prepis do substitučného kanonického tvaru

$$y(t)=x_1$$

$$y'(t)=x_1'=x_2$$

$$y''(t)=x_2'=\frac{1}{a_2}*(7\cos(3t)-a_1*x_2-a_0*x_1)=7\cos(3t)+2x_2+3x_1$$

Program v simulačnom jazyku MATLAB

difrov.m

```
function xder = difrov(t,x)
%Zápis diferenciálnej rovnice 2.radu pomocou 2rovnic 1.radu
global  a0 a1 a2;
xder=[x(2) ; (7*cos(3*t)-a1.*x(2)-a0.*x(1))./a2];
return
```

analyt.m

```
%analytické riešenie
function d=analyt(t)
d=(7/40)*exp(-t)+(7/24)*exp(3*t)-(7/15)*cos(3*t)-(7/30)*sin(3*t);
return
```

chyba.m

```
%odhad chyby:
function chyba = rozdiel(d,y)

rozdiel = abs(d-y(:,1));         %vektor rozdielov v funkci9 v danom čase
chyba = max(rozdiel);
fprintf('Maximálna odchýlka = %d \n', chyba)
return
```

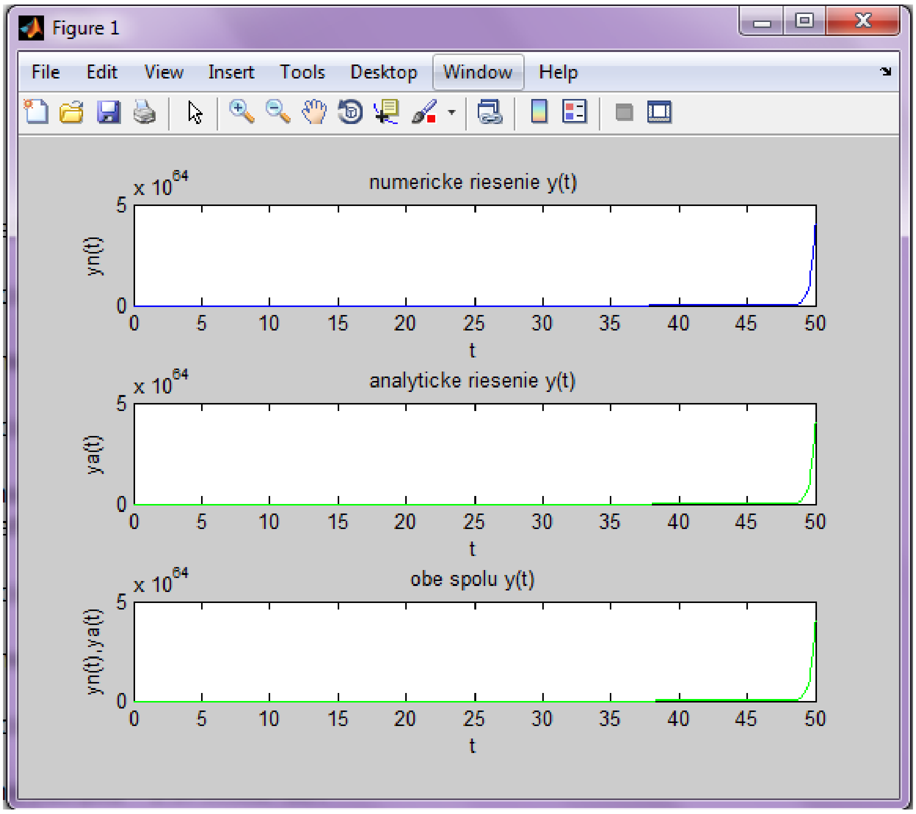
Hlavný program

```
global a;
a = input('Zadaj koeficienty LDR: [a(1) a(2) a(3)]\n');
T(1) = input('Zadaj počiatočnú hodnotu časového intervalu pre riešenie LDR: \n');
T(2) = input('Zadaj konečnú hodnotu časového intervalu pre riešenie LDR: \n');
PP = input('Zadaj počiatočné podmienky: [P(0) P(1)]\n');
```

```
%riešenie LDR pomocou funkcie ode45:
[t,y]=ode45('difrov',T,PP);

%analytické riešenie:
d = analyt(t);

%odhad chyby:
chyba = rozdiel(d,y);
%vykreslenie vyriešených priebehov:
subplot(3,1,1)
plot(t,y(:,1))
title('numerické riešenie y(t)'),xlabel('t'),ylabel('yn(t)')
subplot(3,1,2)
plot(t,d,'g')
title('analytické riešenie y(t)'),xlabel('t'),ylabel('ya(t)')
subplot(3,1,3)
plot(t,y(:,1),t,d,'g')
title('obe spolu y(t)'),xlabel('t'),ylabel('yn(t),ya(t)');
```



PRÍKLAD 3

$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t \qquad PP: y(0) = y'(0) = 0$

Riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice

$y'' + 2y' + y = 0$

1. Charakteristická rovnica: $s^2 + 2s + 1 = 0$
   $(s+1)(s+1) = 0$

Korene charakteristickej rovnice : $s_1 = -1$

$s_2 = -1$

Všeobecné riešenie vyplývajúce z charakteristickej rovnice: $\bar{y} = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$

2. Riešenie špeciálnej pravej strany :$f(t) = t$
   s=1, a=0, b=0, a+ib=0 => k=0

   Partikulárne riešenie : $y^*(t) = A_1 t + A_0$

   Derivovanie partikulárneho riešenia : $y'^*(t) = A_1$

   $y''^*(t) = 0$

   $1 * 0 + 2 * A_1 + A_1 t + A_0 = t$

   $A_1 = 1 \qquad 2 * A_1 + A_0 = 0$

   $A_0 = -2$

3. Všeobecné riešenie DR ($y = \bar{y} + y^*$): $y = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + t - 2$

4. Derivovanie všeobecného riešenia: $y'(t) = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t} - C_2 t e^{-t} + 1$

5. Výpočet konštánt z počiatočných podmienok:

$y(0) = 0$: $\quad 0 = C_1 e^0 + C_2 * 0 * e^0 + 0 - 2$

$2 = C_1$

$y'(0) = 0$: $\quad 0 = -C_1 e^0 + C_2 e^0 - C_2 * 0 * e^0 + 1$

$0 = -2 + 1 + C_2$

$C_2 = 1$

Celkové riešenie DR: $y(t) = t - 2 + 2e^{-t} + te^{-t}$

Riešenie pomocou Laplaceovej transformácie

$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t \qquad PP: y(0) = y'(0) = 0$

1. Prepis na obraz LDR: $s^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s^2}$
2. Prenosová funkcia LDR: $Y(s) = \frac{1}{s^2*(s^2+2s+1)}$
3. Rozklad prenosovej funkcie na parciálne zlomky $\frac{1}{s^2*(s+1)^2} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{s+1}$

$1 = A*(s+1)^2 + B*s*(s+1)^2 + C*s^2 + D*s^2*(s+1)$

A=1

B=-2

C=1

D=2

4. Prevod spätnou transformáciou do času , výsledné riešenie: $y(t) = t - 2 + t*e^{-t} + 2*e^{-t}$

Prepis do substitučného kanonického tvaru:

$$y(t) = x_1$$

$$y'(t) = x'_1 = x_2$$

$$y''(t)$$

Úloha: vytvorte funkciu v prostredí MATLAB, ktorá vyrieši zadanú diferenciálnu rovnicu numericky.