1 Návrh algoritmického riešenia problematiky diferenciálnych rovníc pre cvičenie predmetu SSHI.

Cena sa prispôsobuje zmenám dopytu a ponuky. Ak dopyt prevyšuje ponuku, teda požadovaného statku je nedostatok predajcovia si môžu dovoliť do istej miery zvyšovať ceny. V tejto kapitole sa zaoberám druhým prípadom, keď ponuka presahuje dopyt teda sa tvoria zásoby nepredaného tovaru.

1.1 Model cenového prispôsobenia so zásobami

Cena sa prispôsobuje zmenám dopytu a ponuky. Tento vzťah sa dá vyjadriť rovnicou :

$$y'(t) = \alpha(q(t)^D - q(t)^S); \alpha > 0 \qquad (3)$$

$q(t)^D$- hodnota dopytu, krivka sa dá vyjadriť ako $q(t)^D = A + By(t)$

$q(t)^S$- hodnota ponuky, krivka sa dá vyjadriť ako $q(t)^S = F + Gy(t)$

Môžeme povedať, že cena zásob *p(t)* klesá nie len v prípade, že ponuka prevažuje dopyt, ale aj vtedy ak sa vyskytnú zásoby nepredaného tovaru. Tento vzťah môžeme vyjadriť:

$$y'(t) = \alpha(q(t)^D - q(t)^S) - \beta\int\left[q(t)^S - q(t)^D\right]ds, \alpha > 0, \beta > 0. \qquad (4)$$

Prvý výraz predstavuje prevyšujúci dopyt nad ponukou pri bežnej cene. Druhý výraz je integrál z minulých rozdielov medzi množstvom, ktoré bolo ponúkané a množstvom, ktoré bolo požadované. Teda ide o zásoby nepredaného tovaru.

Ak zderivujeme rovnicu (4) podľa času získame diferenciálnu rovnicu 2. rádu:

$$y(t)'' = \alpha(q'(t)^D - q'(t)^S) - \beta\left[q(t)^S - q(t)^D\right]$$

ak platí že:

$$q(t)^D = A + By(t) \qquad q(t)^S = F + Gy(t)$$

potom môžeme model cenového prispôsobenia popísať nasledujúcou diferenciálnou funkciou 2. rádu

$$\boxed{y''(t) + \alpha(G - B)y'(t) + \beta(G - B)y(t) = \beta(A - F)}$$

Zavedieme substitúciu:

$$(G - B) = K \ ; \ (A - F) = C$$

Analytické riešenie rovnice $y''(t) + \alpha(K)y'(t) + \beta(K)y = 0$

$$\lambda^2 + \alpha(K)\lambda + \beta(K) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ kde } a = \alpha(K) \text{ a } b = \beta(K)$$

Ak uvažujeme, že korene rovnice sú rôzne reálne čísla, riešenie zapíšeme ako

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Partikulárne riešenie (predstavuje trvalú hodnotu ceny) je nájdene podľa rovnosti :

$$y''(t) = y'(t) = 0$$

dostávame

$$y_y = \bar{y} = \frac{C}{K}, K \neq 0$$

Kompletné riešenie lineárnej diferenciálne rovnice 2. rádu je:

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{C}{K}$$

1.2 Model cenového prispôsobenia so zásobami – príklad 4

Použitím nasledujúcich hodnôt riešime diferenciálnu rovnicu pre model cenového prispôsobenia so zásobami :

$\alpha = 0{,}25$ - koeficient ceny

$\beta = 0{,}2$ - koeficient množstva

G-B = 20 – rozdiel medzi množstvom tovaru, ktoré bolo ponúkané a množstvom ktoré bolo požadované

A-F = 100 – hodnota o koľko prevyšuje dopyt ponuku pri bežnej cene.

1.2.1 Analytické riešenie

1. Po dosadení hodnôt do rovnice

   $$y'' + \alpha(G-B)y' + \beta(G-B)y = \beta(A-F)$$

2. Dostávame diferenciálnu rovnicu 2. rádu.

   $$y'' + 0{,}25 * 20y' + 0{,}2 * 20y = 0{,}2 * 100$$

3. Úpravou na tvar:

   $$y'' + 5y' + 4y = 20$$

4. Riešim homogénnu diferenciálnu rovnicu

$$y'' + 5y' + 4y = 0$$

5. Charakteristická rovnica je

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$$

korene rovnice :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -4 \end{array}$$

6. Riešenie pridruženej homogénnej rovnice je

$$y_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4\ t}$$

7. Partikulárne riešenie

$$y_y = \bar{y} = \frac{100}{20} = 5$$

8. Všeobecné riešenie rovnice sa potom dá vyjadriť

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4\ t} + 5$$

Trajektória ceny sa blíži k hodnote 5.

9. Výpočet integračných konštánt C_1 a C_2

Počiatočné podmienky :

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4\ t} + 5 \text{ , } y'(t) = -C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{-4t}$$

$$\begin{array}{llll} y_0 = 6 & 6 = C_1 + C_2 + 5 & C_1 + C_2 = 1 & C_2 = -\frac{1}{3} \\ y_0' = 0 & 0 = -C_1 - 4C_2 & -C_1 - 4C_2 = 0 & C_1 = \frac{4}{3} \end{array}$$

$$y(t) = \frac{4}{3} e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-4t} + 5$$

1.2.2 Riešenie lineárnych diferenciálnych rovníc 2. rádu v jazyku Matlab

Máme diferenciálnu rovnicu 2. rádu v tvare:

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u(t)$$

$$y''(t) + 5y'(t) + 4y = 20 \qquad \begin{array}{ll} a_0 = 4 & a_2 = 1 \\ a_1 = 5 & u(t) = 20 \end{array}$$

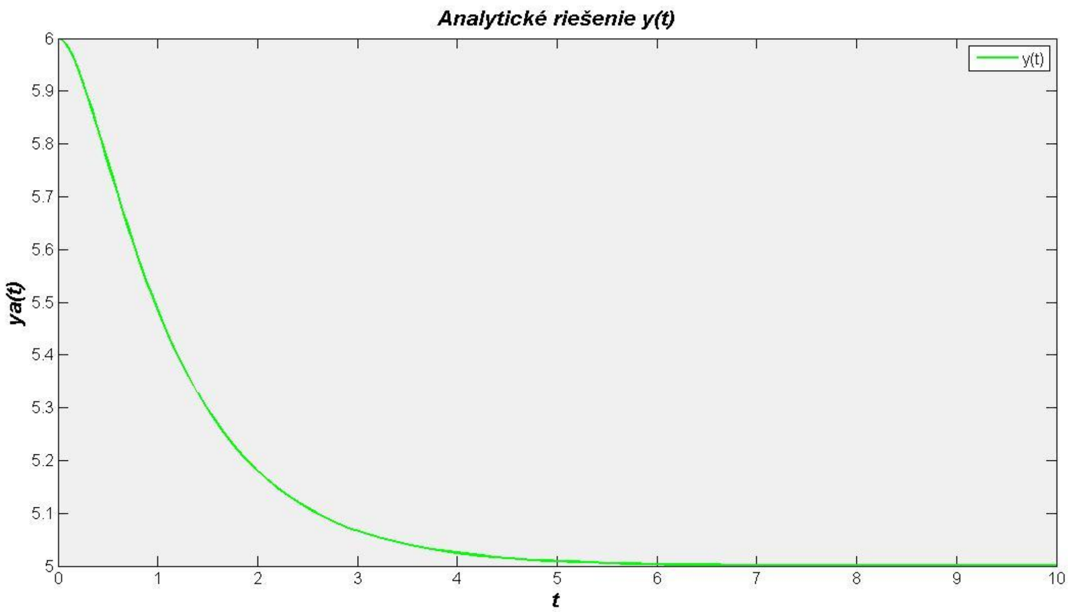
Keďže Matlab nedokáže vyriešiť diferenciálnu rovnicu pre n > 1, je potrebné aby sme túto rovnicu zjednodušili pomocou substitučného kanonického tvaru.

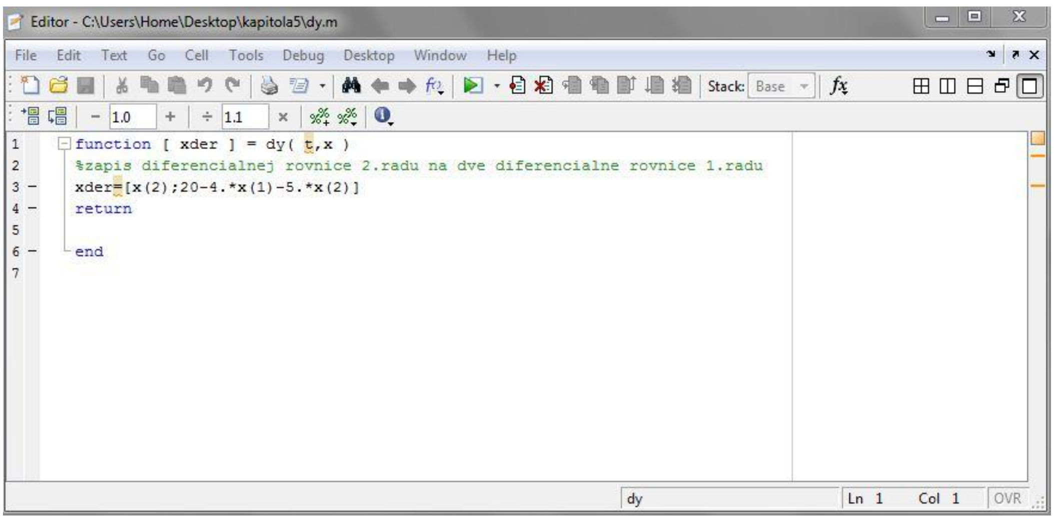
Substitučný kanonický tvar:

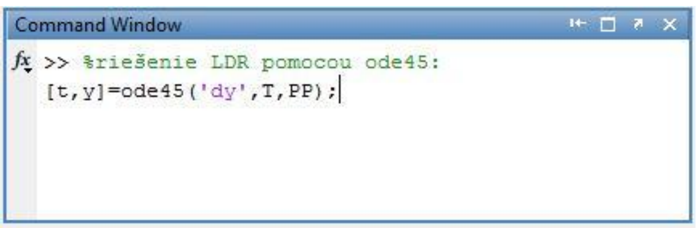
$$y(t) = x_1(t)$$

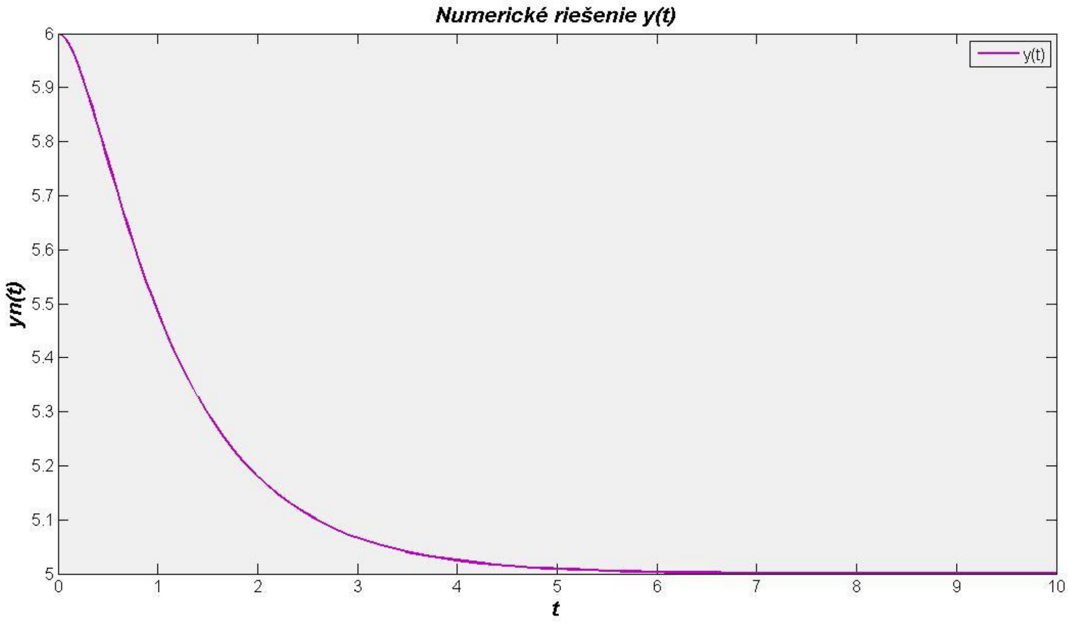
$$y'(t) = x_1'(t) = x_2(t) \qquad x_2'(t) = \frac{20}{1} - \frac{4}{1}x_1(t) - \frac{5}{1}x_2(t)$$

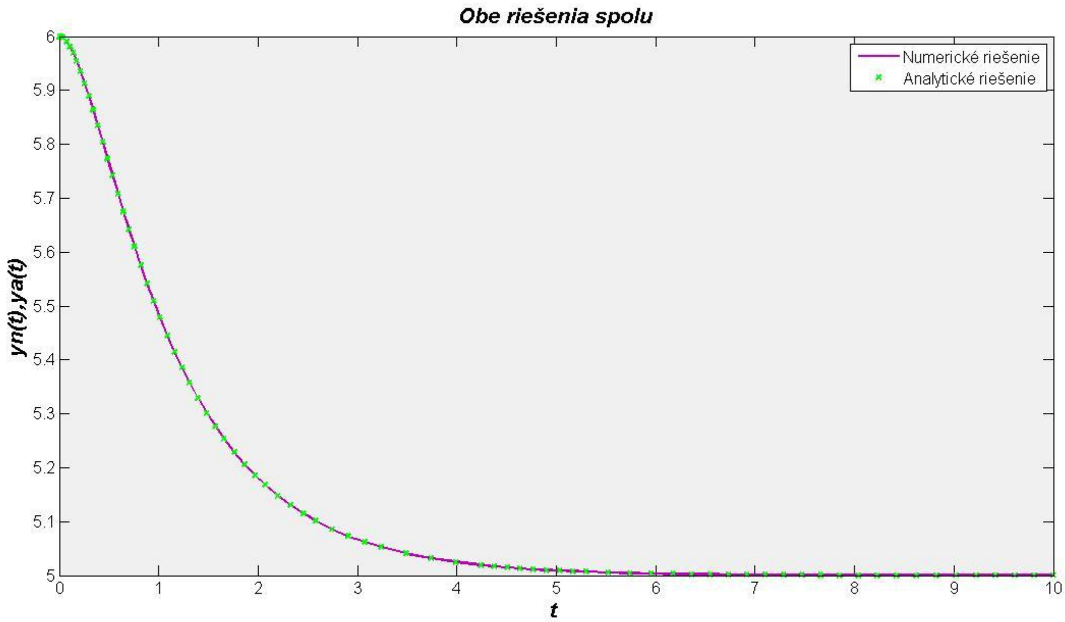
$$y''(t) = x_2'(t) = \frac{u(t)}{a_2} - \frac{a_0}{a_2}x_1(t) - \frac{a_1}{a_2}x_2(t)$$








Numerické riešenie y(t)
y(t)
yn(t)
t
6
5.9
5.8
5.7
5.6
5.5
5.4
5.3
5.2
5.1
5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


Obe riešenia spolu
Numerické riešenie
Analytické riešenie
yn(t),ya(t)
t
6
5.9
5.8
5.7
5.6
5.5
5.4
5.3
5.2
5.1
5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

1.2.3 Príklady

V nasledujúcich príkladoch riešte použitím udaných hodnôt diferenciálnu rovnicu pre model cenového prispôsobenia so zásobami.

<u>Príklad1</u>

$\alpha = 0,2$
$\beta = 0,2$
$G - B = 20$
$A - F = 100$

<u>Príklad2</u>

$\alpha = 0,05$
$\beta = 0,5$
$G - B = 20$
$A - F = 100$