TUTORIÁL5 - APLIKÁCIE METÓD NUMERICKEJ MATEMATIKY V JAZYKU MATLAB

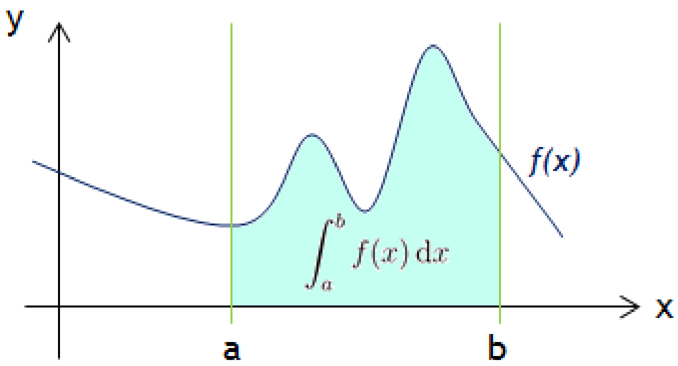
NÁPLŇ

T5 – 1. NUMERICKÉ RIEŠENIE INTEGRÁLU

V tejto kapitole sa oboznámime s numerickým riešením integrálu. Rozoberieme si dve metódy jeho riešenia a to - Obdĺžnikovú metódu a Lichobežníkovú metódu. A budeme sa zaoberať výpočtom integrálu funkcie zadanej tabuľkou.

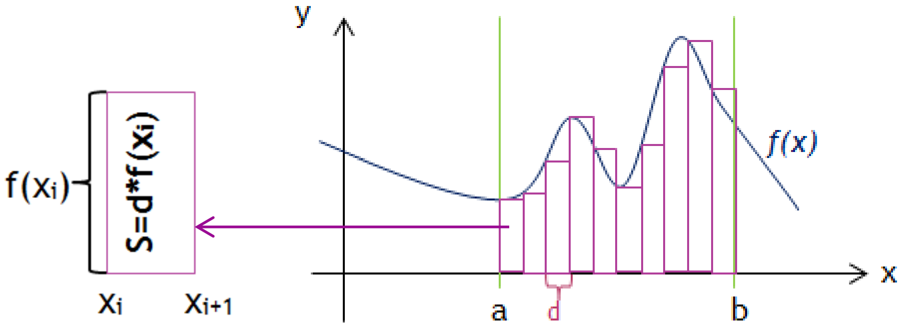
Určitý integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ predstavuje obsah plochy ohraničenej nerovnicami

a ≤ x ≤ b, 0 ≤ y ≤ f(x)



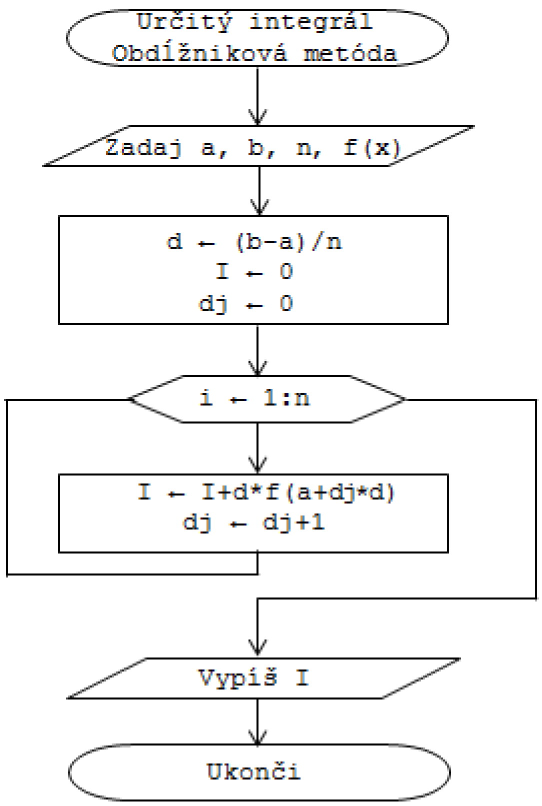
OBR. 1 - URČITÝ INTEGRÁL

1. Obdĺžniková metóda



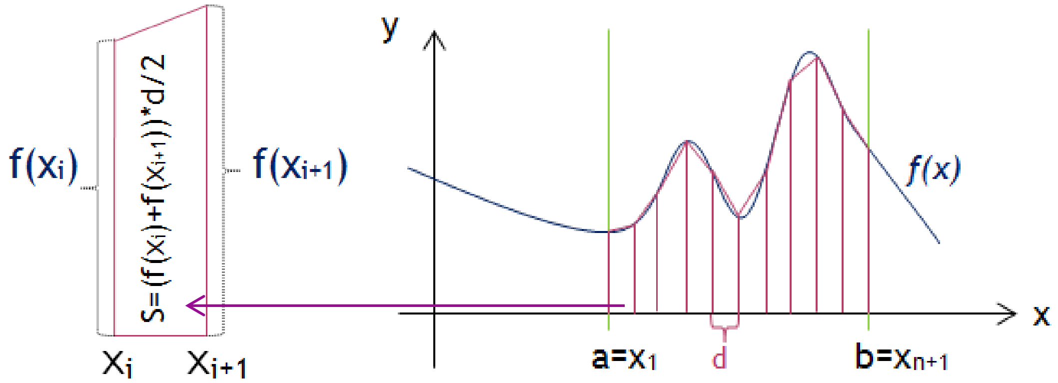
OBR. 2 - OBDĹŽNIKOVÁ METÓDA VÝPOČTU URČITÉHO INTEGRÁLU

Podstatou obdĺžnikovej metódy je rozdelenie intervalu <*a*,*b*> na *n* častí (v našom prípade 10). Plochu rozdelíme na n obdĺžnikov, ktorých jednu stranu bude tvoriť premenná $d=(b-a)/n$ alebo $d=x_{i+1}-x_i$ a druhú stranu tvorí funkčná hodnota v bode x_i. Obsah obdĺžnika potom vieme vypočítať : $S=d*f(x_i)$. Integrál potom vieme vyjadriť ako súčet obsahov jednotlivých obdĺžnikov.



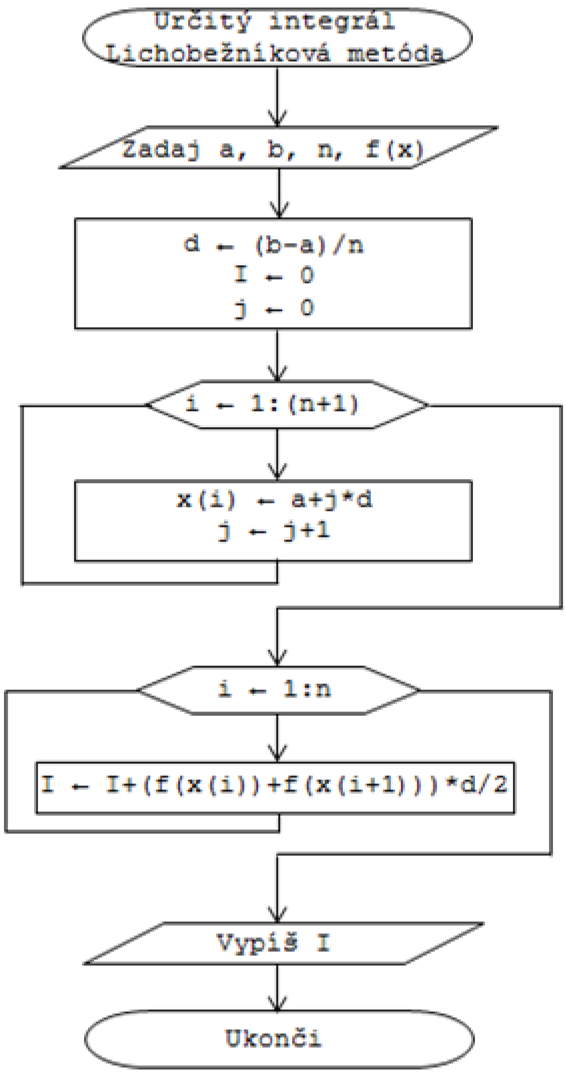
OBR. 3 - VÝVOJOVÝ DIAGRAM VÝPOČTU URČITÉHO INTEGRÁLU OBDĹŽNIKOVOU METÓDOU

2. Lichobežníková metóda



OBR. 4 - LICHOBEŽNÍKOVÁ METÓDA VÝPOČTU URČITÉHO INTEGRÁLU

Podstatou lichobežníkovej metódy je rozdelenie intervalu *<a,b>* na *n* častí (v našom prípade 10). Plochu rozdelíme na *n* lichobežníkov, ktorých výšku tvorí $d=(b-a)/n$ alebo $d=x_{i+1}-x_i$. Základňami jednotlivých lichobežníkov sú funkčné hodnoty v bodoch výšky – $f(x_i)$ a $f(x_{i+1})$. Pre obsah lichobežníka s takto danými stranami platí : $S=(f(x_i)+f(x_{i+1}))*d/2$. Výpočet integrálu sa realizuje sčítaním jednotlivých obsahov lichobežníkov.

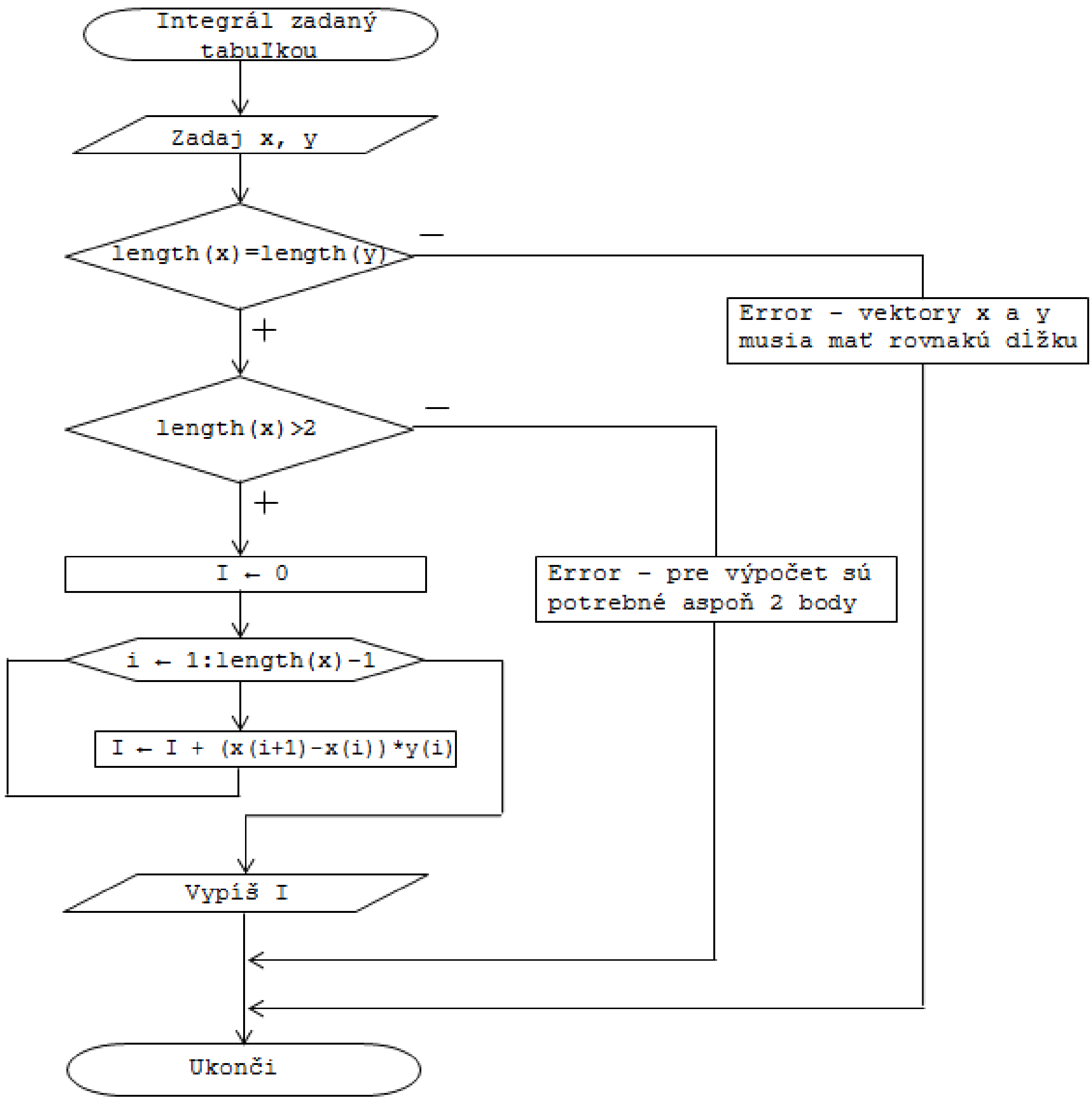


OBR. 5 - VÝVOJOVÝ DIAGRAM VÝPOČTU URČITÉHO INTEGRÁLU LICHOBEŽNÍKOVOU METÓDOU

Výpočet integrálu, keď je funkcia zadaná tabuľkou

V prípade, že predpis funkcie, ktorej integrál máme počítať, nepoznáme a máme len jej body zadané tabuľkou využijeme všetky tieto body [x_i, y_i]. Výpočet je možné vykonať po nahradení určitého integrálu týmto súčtom:

$$\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i).y_i$$



OBR. 6 - VÝVOJOVÝ DIAGRAM VÝPOČTU URČITÉHO INTEGRÁLU PRE FUNKCIU ZADANÚ TABUĽKOU

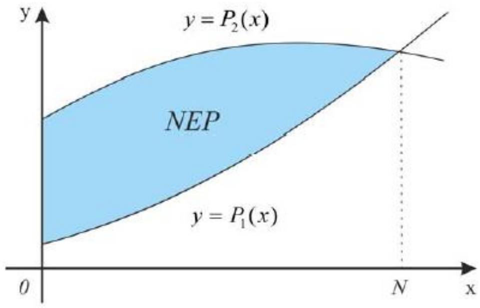
T5 – 2. EKONOMICKÉ APLIKÁCIE URČITÉHO INTEGRÁLU

Čistý prebytok zisku

Majme dva projekty, ktorých rýchlosti ziskov sú dané funkciami $P_1(x)$ a $P_2(x)$, kde x predstavuje počet rokov odteraz. Nech funkcia $P_2(x) > P_1(x)$ počas nasledujúcich N rokov odteraz.

Čistý prebytok zisku – **NEP** vypočítame nasledovne:

$$NEP = \int_0^N [P_2(x) - P_1(x)]\, dx$$

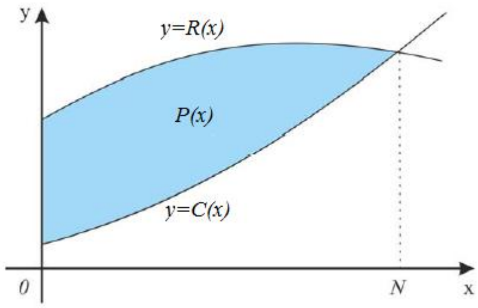


Zisk z výrobného zariadenia

Výrobné zariadenie vytvára príjem rýchlosťou $R(x)$ a náklady na jeho prevádzku rastú rýchlosťou $C(x)$, kde x predstavuje počet rokov odteraz. Zariadenie je ziskové pokiaľ platí nerovnosť $R(x)>C(x)$.

Zisk z výrobného zariadenia – **P**, za N rokov vypočítame podľa vzorca:

$$P(x) = \int_0^N [R(x) - C(x)]\, dx$$

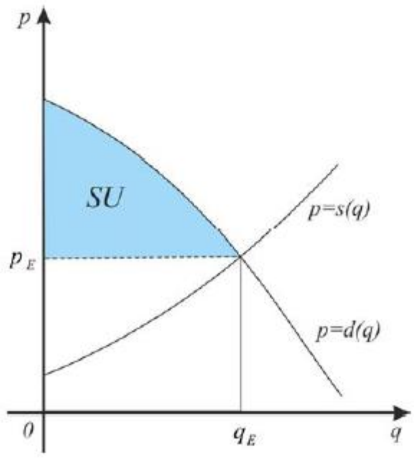


Spotrebiteľská úspora, podnikateľský prebytok

Majme danú funkciu dopytu $p=d(q)$ a funkciu ponuky $p=s(q)$ a súradnice rovnovážneho bodu $[q_E, p_E]$.

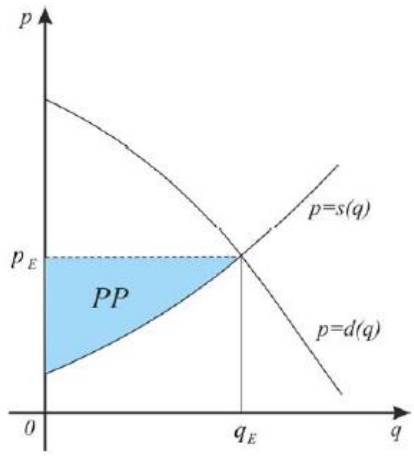
Spotrebiteľská úspora – **SU** predstavuje rozdiel medzi množstvom peňazí, ktoré sú spotrebitelia ochotní minúť za q_E výrobkov a množstvom peňazí, ktoré by minuli pri cene p_E.

$$SU = \int_0^{q_E} d(q)\,dq - p_E q_E$$



Podnikateľský prebytok – **PP** je rozdiel medzi množstvom peňazí, ktoré výrobcovia dostanú za q_E výrobkov predávaných za cenu p_E a množstvom peňazí, za ktoré boli ochotní predať q_E výrobkov.

$$PP = p_E q_E - \int_0^{q_E} s(q)\,dq$$

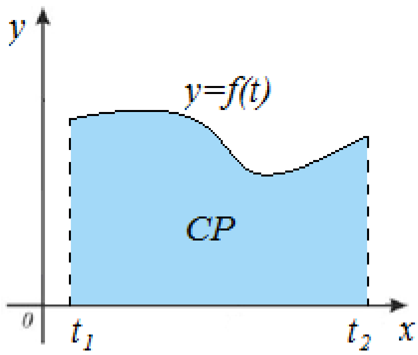


Celkový príjem

Nech je funkcia hustoty toku príjmu f(t) v čase t spojitá na intervale $<t_1,t_2>$

Celkový príjem – **CP** v čase $<t_1,t_2>$ určíme podľa vzorca:

$$CP = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$



Poznámka : Príklady na precvičenie k časti „Ekonomické aplikácie určitého integrálu“ nájdete v časti „5. Príklady na samostatné riešenie“ príklady : 6.- 10.

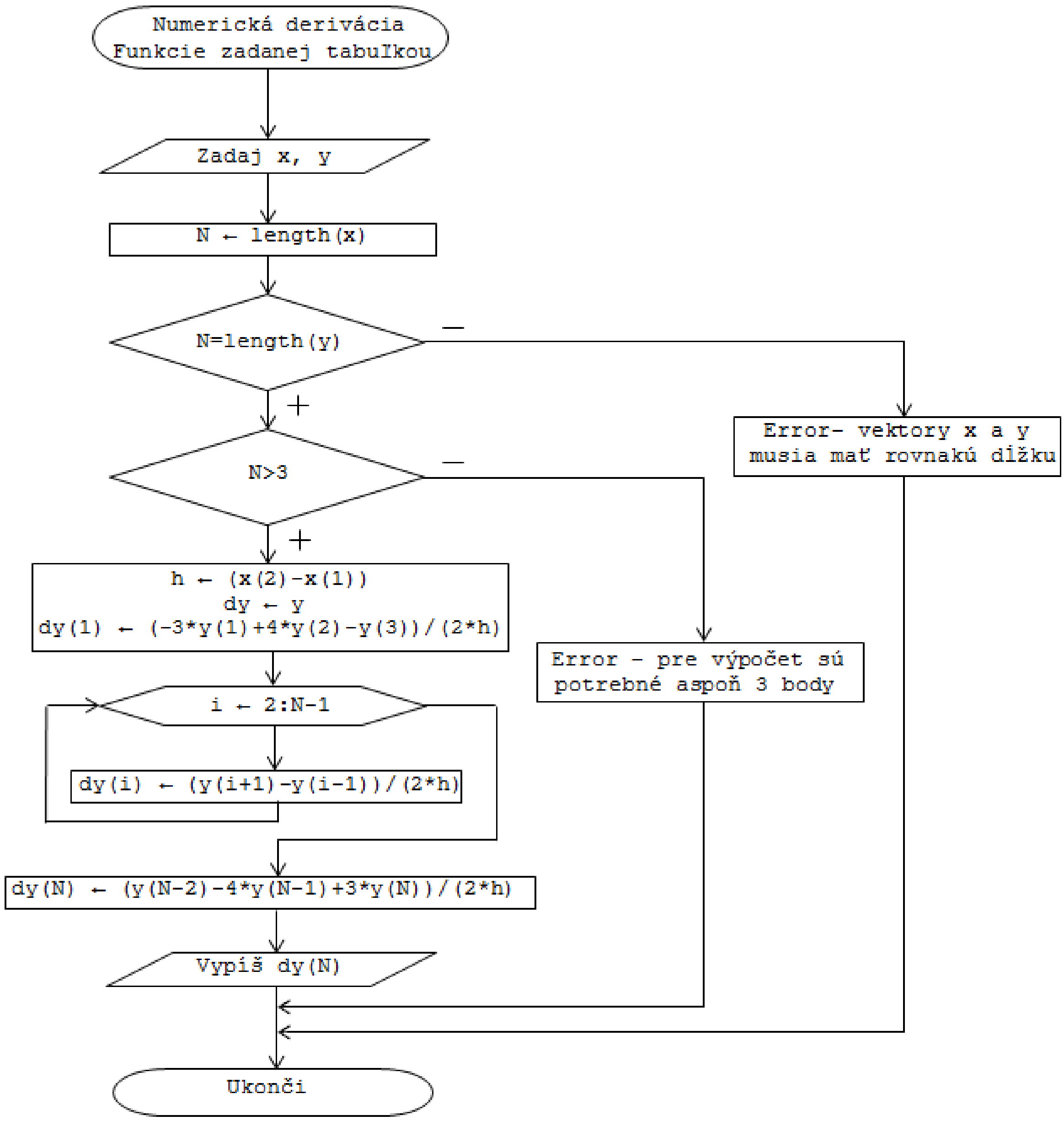
T5 – 2. NUMERICKÉ RIEŠENIE DERIVÁCIE

Derivácia predstavuje smernicu ku krivke v určitom bode. Pri odhade derivácie funkcie f(x) môžeme vychádzať z definície :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}(f(x+h)-f(x))/h$$

kde *h* je z prstencového okolia bodu 0. Po zvolení „malého“ *h*, dostaneme odhad derivácie v bode *x*. Tento postup však nie je možné použiť pri funkciách zadaných tabuľkou.

V prípade, že je funkcia zadaná tabuľkou, s rovnomerným rozdelením bodov x_1, x_2, x_3, ... ,x_{n-1}, x_n, môžeme použiť interpoláciu 2. Stupňa a získame vzťahy pre výpočet derivácie v daných bodoch – deriváciu vo vnútorných bodoch x_2, ... , x_{n-1} určíme podľa symetrického vzorca a okraje dopočítame z vnútorných bodov.



Matlab ponúka na deriváciu polynómu funkciu ***polyder***.

Riešený príklad 1: Predpokladajme, že pri cene p určitej komodity je dopyt po nej vyjadrený vzťahom q = 350 - 3p, pre 0 < p < 80. Vypočítajme elasticitu dopytu pre p = 60. Interpretujme výsledok.

Analytické riešenie:

Nech *q=D(p)* je funkciou dopytu, tak $E_D = -\frac{D'(p)}{D(p)}.p$ je elasticitou.

D´(p)=-3

$E_D = -\frac{-3}{350-3.60}.60 = 1{,}0588$

- Ak E_D = 1, tak funkcia dopytu má jednotkovú elasticitu, t. j. jednopercentná zmena ceny vyvolá jednopercentnú zmenu dopytu.
- Ak ED > 1, tak funkcia dopytu je elastická, t. j. jednopercentná zmena ceny vyvolá viac ako jednopercentnú zmenu dopytu.
- Ak ED < 1, tak funkcia dopytu je neelastická, t. j. jednopercentná zmena ceny vyvolá menej ako jednopercentnú zmenu dopytu.

1,0588>1 => funkcia je elastická

Algoritmické riešenie:

```
D=[-3 350]; %funkcia D(p)=-3p+350 zapísaná ako vektor
Dd=polyder(D);  %derivácia polynómu zapísaného ako vektor
x=polyval(Dd,60);  %hodnota polynómu Dd v bode 60
y=polyval(D,60);
Ed=-x/y*60;
if Ed==1 v='jednotkovú elasticitu' ;
    a=1;
else if Ed<1 v='neelastická';
        a=0;
    else v='elastická';
        a=0;
    end
end
if a==1
    fprintf('Elasticita funkcie=%f\nfunkcia má %s',Ed,v)
else  fprintf('Elasticita funkcie=%f\nfunkcia je %s',Ed,v)
end
```

Poznámka : Príklady na precvičenie k časti „Numerické riešenie derivácie“ nájdete v časti „5. Príklady na samostatné riešenie“ príklady : 11, 12

T5 - 3. NUMERICKÉ RIEŠENIE DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC

Pri výpočtoch diferenciálnych rovníc sa budeme zaoberať dvomi metódami ich riešenia, a to vstavanou funkciou **ode45** a vlastnou funkciou založenou na metóde **Runge - Kutta.** Pri oboch metódach je potrebné prepísanie diferenciálnej rovnice do požadovaného tvaru, s ktorým sa oboznámime v prvej podčasti.

Dôležité je uvedomiť si, že riešením diferenciálnych rovníc nie je jedno či niekoľko konkrétnych čísel, ale funkcia.

Prepis diferenciálnej rovnice

Nech nami riešená diferenciálna rovnica je daná predpisom :

$$y(t)'' + 3y(t)' + y(t) = 1$$

Najskôr je potrebné prepísať rovnicu do substitučného kanonického tvaru :

$y = x_1(t)$

$y(t)' = \mathbf{x_1(t)'} = x_2(t)$

$y(t)'' = \mathbf{x_2(t)'} = 1 - 3x_2(t) + x_1(t)$

Pre výpočet je dôležité poznať hodnoty : $\mathbf{x_1'}$ a $\mathbf{x_2'}$, ktoré budú reprezentované vektorom **[x1; x2].** V prostredí Matlab si vytvoríme funkciu, ktorú si nazveme „dif.m“. Jej výstupný parameter bude práve vektor [x1; x2] a nazveme si ho **„[xout]“**.

```
function [ xout ] = dif(t,x)
x1=x(2);
x2=x(1)-3*x(2)+1;
xout=[x1;x2];
end
```

Výpočet s využitím funkcie ode45

Výpočet pomocou funkcie ode45 je pre používateľa jednoduchší, keďže ode45 je už vopred naprogramovaná funkcia implementovaná do Matlabu.

Funkcia ode45 si vyžaduje vloženie rovnice, ktorú budeme počítať

```
[t,x2]=ode45(@dif, t, x(:,1))
```

Výsledok výpočtu je možné vykresliť nasledovne :

```
plot(t,x2(:,1),'k')
plot(t,x2(:,2),'k')
```

Metóda Runge - Kutta 4.rádu

Metóda Runge - Kutta je jednou z najznámejších numerických metód. Podstata spočíva v aproximácii lineárnych kombinácií funkčných hodnôt v zvolených bodoch. Vyjadrenie nového stavu systému pomocou predchádzajúceho stavu je dané vzťahmi :

$k_1 = T * f(t_n, x_n)$

$k_2 = T * f(t_n + ½T, x_n + ½Tk_1)$

$k_3 = T * f(t_n + ½T, x_n + ½Tk_2)$

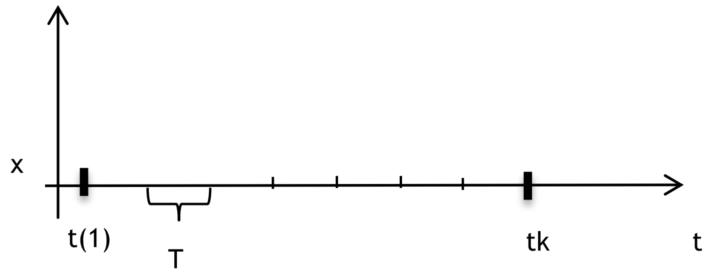
$k_4 = T * f(t_n + T, x_n + Tk_3)$

$x_{n+1} = x_n + (k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6$

pre n=1,2,3...

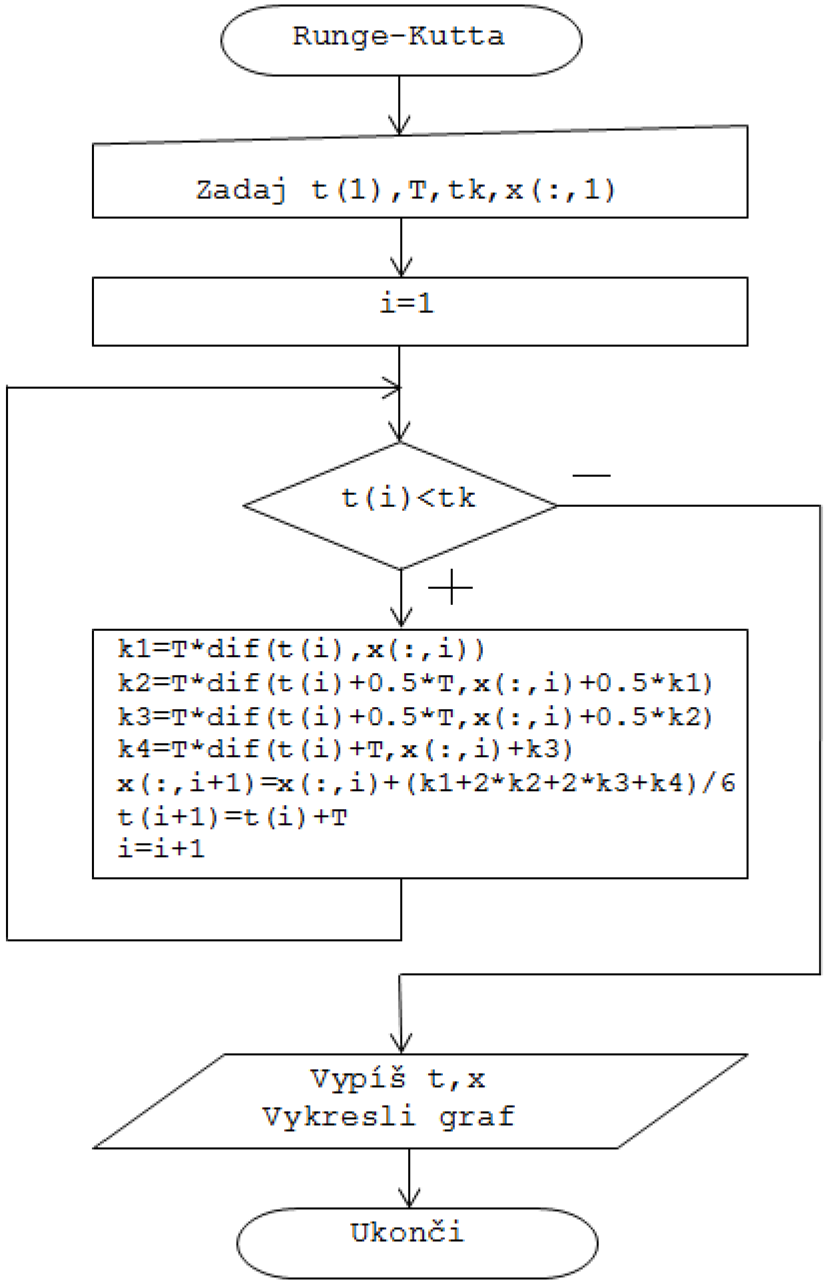
Zavedieme si premenné :

tk – hodnota t, pri ktorej chceme výpočet ukončiť
T – krok, s ktorým sa bude výpočet realizovať
t(1) – počiatočná hodnota t, pri ktorej sa výpočet odštartuje
x(: , 1) – počiatočný vektor x závislej premennej



Výsledok nášho výpočtu si môžeme pozrieť vo vykreslení :

```
plot(t,x(1,:),'r.')
plot(t,x(2,:),'r.')
```


Runge-Kutta
Zadaj t(1),T,tk,x(:,1)
i=1
t(i)<tk
—
+
k1=T*dif(t(i),x(:,i))
k2=T*dif(t(i)+0.5*T,x(:,i)+0.5*k1)
k3=T*dif(t(i)+0.5*T,x(:,i)+0.5*k2)
k4=T*dif(t(i)+T,x(:,i)+k3)
x(:,i+1)=x(:,i)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
t(i+1)=t(i)+T
i=i+1
Vypíš t,x
Vykresli graf
Ukonči

T5 - 5. PRÍKLADY NA SAMOTATNÉ RIEŠENIE

1. Vypočítajte integrál $\int_{0,1}^{1,5} \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{dx}$ obdĺžnikovou metódou, pre *n* zadané z klávesnice.
2. Vypočítajte integrál $\int_{0,5}^{2,3} \frac{dx}{\sqrt{(1+3x^2)}}$ obdĺžnikovou metódou pre *n*=5, 10 a 15. Výpočty porovnajte.
3. Vypočítajte integrál $\int_{0}^{2\pi} \sin(x)\,dx$, na výpočet použite lichobežníkovú metódu.
4. Simpsonova
5. Majme funkciu danú bodmi uvedenými v tabuľke. Vytvorte funkciu na numerický výpočet určitého integrálu obdĺžnikovou metódou. Aplikujte túto funkciu na výpočet integrálu funkcie danej nasledujúcou tabuľkou

x	1	2.12	3.24	4.36	5.48	6.6	7.72	8.84
y	0.265	0.369	0.985	1.356	1.452	0.874	1.256	2.012

6. Predpokladá sa, že o *x* rokov odteraz by prvý investičný plán vytváral zisk tempom $P1(x) = 120 + x^2$ tis. dolárov za rok a druhý investičný plán tempom $P2(x) = 140 + 2x$ tis. dolárov za rok.
   a. Koľko rokov odteraz a ktorý investičný plán by bol ziskovejší?
   b. O koľko väčší zisk by sme dosiahli pomocou výnosnejšieho plánu v porovnaní s menej výnosným za uvažované obdobie?

7. Predpokladá sa, že po *x* rokoch používania vytvára výrobné zariadenie príjem $R(x) = 3x/7+15/7$ tisíc € za rok a náklady rastú tempom $C(x) = x+2/7$ tisíc € za rok.
   a. Koľko rokov by bolo používanie zariadenia ziskové?
   b. Aký zisk by prinieslo používanie zariadenia za uvažované obdobie?

8. Je daná funkcia dopytu $d(q) = 15e^{-0,02q}$ eur za jednotku tovaru. Vypočítajte celkovú sumu peňazí, ktorú sú spotrebitelia ochotní minúť za nákup 10 jednotiek tovaru.

9. Je daná funkcia dopytu $d(q) = 320 - q^2$ a funkcia ponuky $s(q) = 250 + 4q$. Určme rovnovážny bod pre dané funkcie, odpovedajúcu trhovú cenu a pre túto cenu vypočítajme podnikateľský prebytok.

10. Výrobca tabletov očakáva, že *x* mesiacov odteraz budú spotrebitelia nakupovať 3 500 tabletov mesačne za cenu $P(x) = 75 + 2\sqrt{x}$ eur za tablet. Aký celkový obrat sa dá očakávať za nasledujúcich 18 mesiacov odteraz?

11. Náklad časopisu bude o t rokov odteraz $C(t) = 35t^2 + 70t + 30\ 000$ kusov. Odhadnime pomocou marginálnych nákladov ($MC(x) = C'(x)$) :
    a. náklad v 15. roku

b. prírastok počas 6. Roka

12. Ročné výnosy spoločnosti boli $R(t) = 15t^2 + 2300t + 1500000€$ t rokov po jej založení na začiatku roku 2008.
    a. Akým ročným tempom rástli ročné výnosy na začiatku roku 2015?
    b. Aké bolo percentuálne ročné tempo rastu ročných výnosov na začiatku roka 2015?

Poznámka:Percentuálnou mierou zmeny hodnoty funkcie nazývame výraz :$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}.100\%$