TUTORIÁL6 - MODELOVANIE SYSTÉMOV HROMADNEJ OBSLUHY V PROSTREDÍ MATLAB

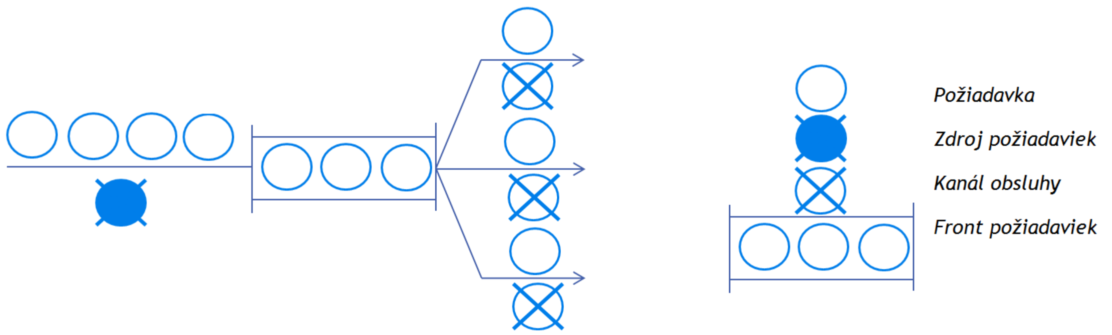
NÁPLŇ

1. HROMADNÁ OBSLUHA
2. PRÍKLADY POUŽITIA HROMADNEJ OBSLUHY
    a. OTVORENÝ JEDNOKANÁLOVÝ SYSTÉM HROMADNEJ OBSLUHY BEZ ČAKANIA
    b. OTVORENÝ VIACKANÁLOVÝ SYSTÉM HROMADNEJ OBSLUHY BEZ ČAKANIA
3. PRÍKLADY NA SAMOSTATNÉ RIEŠENIE
4. POUŽITÁ LITERATÚTA

T6 – 1. HROMADNÁ OBSLUHA

Teória hromadnej obsluhy skúma kvantitatívnu stránku procesov súvisiacich s hromadnou obsluhou požiadaviek rôzneho charakteru. Ako obslužný systém môžeme chápať telefónnu ústredňu, lekársku ordináciu, čerpaciu stanicu pohonných hmôt, centrálnu jednotku počítača a pod. Vo všetkých týchto prípadoch je tu existencia jedného alebo viacerých kanálov, ktoré uspokojujú určité požiadavky. V prípade, že je v systéme aspoň jeden obslužný kanál voľný, požiadavka, ktorá vstúpi do systému je obslúžená a opúšťa ho. V prípade, že všetky kanály sú obsadené požiadavka sa zaradí do frontu a čaká, alebo opúšťa systém neobslúžená. Cieľom teórie hromadnej obsluhy je optimalizovať parametre obslužného systému napr. priemernú dĺžku frontu v systéme hromadnej obsluhy je možné ovplyvniť zmenou počtu obslužných kanálov, alebo zmenou intenzity obsluhy.

Systém hromadnej obsluhy tvorí súbor zariadení (osôb) schopných vykonávať obsluhu požiadavky – *kanály obsluhy* a súbor požiadaviek čakajúcich v systéme na obsluhu - *front požiadaviek*. Potenciálne požiadavky predstavujú *zdroj požiadaviek*. Systém hromadnej obsluhy možno schematický znázorniť nasledovne:



Klasifikácia systémov hromadnej obsluhy

1. Podľa počtu obslužných kanálov:
   a. Jednokanálové
   b. Viackanálové
2. Podľa zdroja požiadaviek:
   a. Uzavretý systém (zdroj požiadaviek konečný)
   b. Otvorený systém (zdroj požiadaviek nekonečný)
3. Podľa charakteru vstupného prúdu:
   a. Stacionárnym alebo nestacionárnym vstupným prúdom
   b. Poissonovským alebo nepoissonovským vstupným prúdom
4. V prípade plného obsadenia kanálov sa delia na systémy:
   a. S čakaním
      i. Ohraničeným
      ii. Neohraničeným
   b. Bez čakania – s odmietnutím

V príkladoch budeme uvažovať o vstupnom prúde požiadaviek tvorenom Poissonovským procesom, hlavne z dôvodu, že mnoho reálnych procesov obsluhy spĺňa tento predpoklad a taktiež Poissonovský proces je podrobne rozpracovaný.

Poissonov proces je prúd javov, ktorý má tieto vlastnosti:

1. Nezávislosť prírastkov – počet javov, ktoré sa vyskytnú v určitom intervale, nezávisí od počtu javov v iných intervaloch
2. Stacionárnosť (homogenita v čase) – počet javov v ľubovoľných rovnako dlhých časových intervaloch je konštantný
3. Regulárnosť (ordinárnosť) – pravdepodobnosť výskytu viac než jedného javu v dostatočne malom časovom intervale Δt je zanedbateľne malá. Z toho vyplýva, že v intervale $(t, t+ \Delta t)$ môže nastať len jeden z prípadov:
   a. Vyskytne sa práve jeden javy s pravdepodobnosťou $\lambda\Delta t$
   b. Nevyskytne sa žiadny jav s pravdepodobnosťou $1- \lambda\Delta t$

Z čoho je jasné, že v Poissonovskom procese je možný len prechod systému od najbližšieho „vyššieho“ stavu, alebo zotrvanie v tom istom stave.

T6 – 2. PRÍKLADY POUŽITIA HROMADNEJ OBSLUHY

A. OTVORENÝ JEDNOKANÁLOVÝ SYSTÉM HROMADNEJ OBSLUHY BEZ ČAKANIA

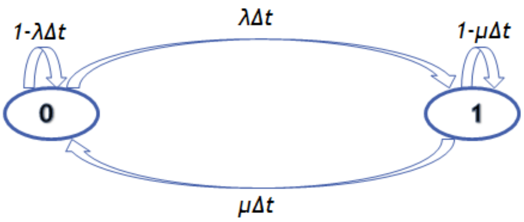
Pri modelovaní systému sa vychádza z nasledujúcich predpokladov:

1. Vstupný prúd je Poissonov proces s intenzitou vstupu λ
2. Čas obsluhy má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou $\bar{t} = \frac{1}{\mu}$; μ je intenzita obsluhy. Koeficient zaťaženia systému $\Psi=\lambda/\mu$
3. Počet kanálov $n=1$
4. Front sa nevytvára; ak je systém obsadený, požiadavka bude odmietnutá
5. Zdroj požiadaviek je neohraničený

Systém má 1 obslužný kanál, do úvahy prichádzajú 2 možné stavy: S_0 – systém je voľný a S_1 – v systéme je jedna požiadavka, ktorá je práve obsluhovaná. Vychádzajúc z vlastností Poissonovho vstupného prúdu a exponenciálneho rozdelenia času obsluhy, možno pravdepodobnosti zmeny stavu systému popísať nasledovne (mocniny veličiny Δt sa zanedbávajú):

$S_0 \rightarrow S_0$	$1-\lambda\Delta t$	Do systému nevstúpi žiadna požiadavka
$S_0 \rightarrow S_1$	$\lambda\Delta t$	Do systému vstúpi jedna požiadavka
$S_1 \rightarrow S_0$	$(1-\lambda\Delta t)\mu\Delta t \doteq \mu\Delta t$	Do systému nevstúpi žiadna a práve jedna obslúžená požiadavka opustí systém
$S_1 \rightarrow S_1$	$1-\mu\Delta t$	Žiadna požiadavka neopustí systém alebo jedna požiadavka vstúpi do systému a jedna obslúžená systém opustí

Pravdepodobnosti zmeny stavu systému možno graficky znázorniť pomocou grafu:



Z toho vyplývajú vzťahy pre výpočet pravdepodobností:

$p_0(t+\Delta t)=p_0(t)(1-\lambda\Delta t) + p_1(t)\mu\Delta t$

$p_1(t+\Delta t)=p_0(t)\lambda\Delta t + p_1(t)(1-\mu\Delta t)$

Z čoho po úpravách dostávame diferenciálne rovnice:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda p_0(t) - \mu p_1(t)$$

Počiatočné podmienky : $p_0(0)=1$, $p_1(0)=0$

Riešený príklad – Telefón na ústredni zvoní v priemere každých 12 minút pričom jeden hovor trvá priemerne 6 minúty. Vstupný prúd možno považovať za Poissonovský proces a čas obsluhy za exponenciálne rozdelený. Určte:

a. pravdepodobnosť, že linka je obsadená – pravdepodobnosť odmietnutia
b. aké percento hovorov bude vybavené – relatívnu kapacitu
c. pomocou diferenciálnych rovníc znázornite priebeh ??? a porovnajte s vypočítanými hodnotami

Riešenie

λ = 1 volanie za 12 minút = 5 volaní/h

$\bar{t}$ = 6 minút na požiadavku = 1/10 h/pož.

$\mu = \frac{1}{\bar{t}}$ = 10 volaní/h

$\Psi = \frac{\lambda}{\mu}$ = 5/10 = 0,5

$P_{st} = p_1 = 1 - p_0 = 1/3$

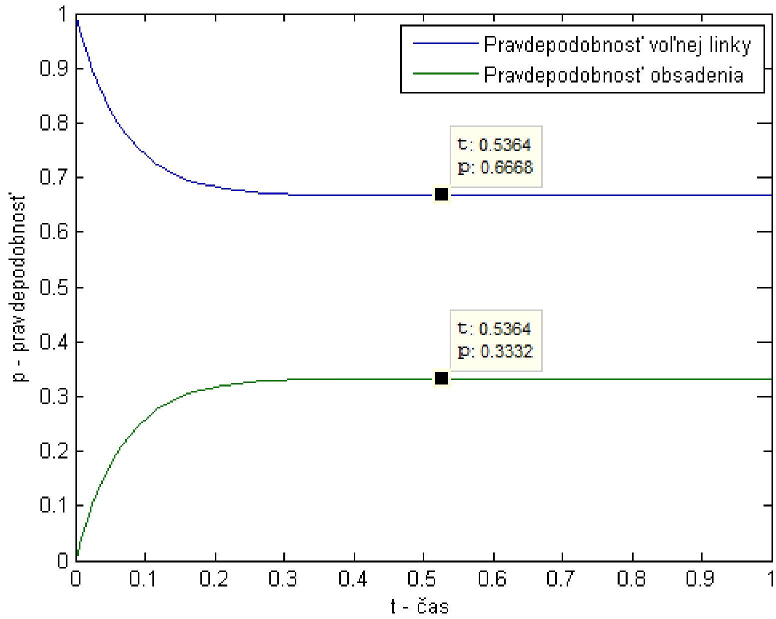
$K_r = p_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = 2/3$

Vytvoríme si funkciu :

```
function [pder] = ustredna(t,p)

pder = [-lambda*p(1)+mi*p(2)
        lambda*p(1)-mi*p(2)];


return
```

Hlavný program :

```
pp = [1 0];      % počiatočné podmienky
t =  [0 1];
lambda = 6;
mi = 12;

[t,pder] = ode45(@ustredna,t,pp);

plot(t,pder)
legend('Pravdepodobnosť voľnej linky','Pravdepodobnosť obsadenia')
```



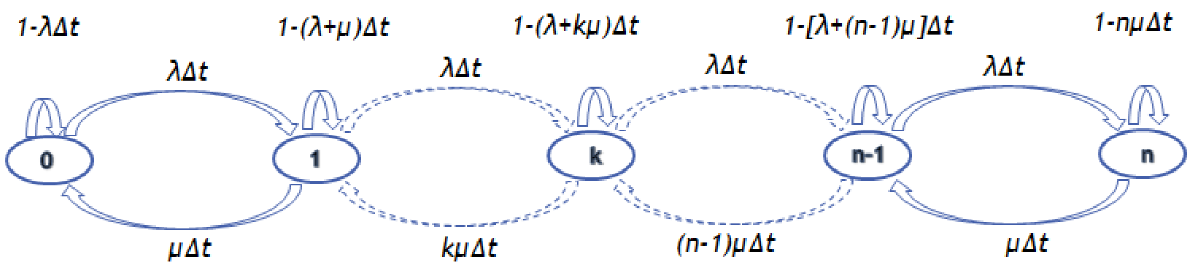
Z grafu vidíme, že priebeh pravdepodobností sa po určitom čase ustáli na tých hodnotách, ktoré nám vyšli aj z analytického výpočtu.

A. OTVORENÝ VIACKANÁLOVÝ SYSTÉM HROMADNEJ OBSLUHY BEZ ČAKANIA

Predpoklady modelu sú zhodné s predpokladmi otvoreného jednokanálového systému hromadnej obsluhy bez čakania okrem bodu 3., kde platí, že n>1. Takto systém sa môže nachádzať v jednom z *n+1* stavov:

S_0 - všetky kanály sú voľné
S_1 - jeden kanál je obsadený
...
S_n - všetkých *n* kanálov je obsadených

Graf prechodov otvoreného viackanálového systému bez čakania:



Sústava diferenciálno- diferenčných rovníc systému má nasledovný tvar :

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda p_0(t) - (\lambda + \mu)p_1(t) + 2\mu p_2(t)$$

.....

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t)$$

.....

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_n(t) - n\mu p_n(t)$$

Začiatočné podmienky sú: $p_0(0)=1,\ p_1(0)=p_2(0)=\ldots=p_n(0)=0$

Riešený príklad - Do kancelárie informačnej služby so štyrmi linkami prichádza priemerne 1 výzva za 72 sekúnd. Priemerná dĺžka hovoru je 3 minúty. Za predpokladu Poissonovho vstupného prúdu a exponenciálneho času obsluhy vypočítajte :
a. pravdepodobnosť odmietnutia a pravdepodobnosť obslúženia (relatívna kapacita)
b. pomocou diferenciálnych rovníc znázornite priebeh stavov jednotlivých pravdepodobností a porovnajte s vypočítanými hodnotami.

Riešenie

n = 4

λ = 1 volanie za 72 sekúnd = 50 volaní/h

t¯= 3 minúty na požiadavku = 1/20 h/pož.

μ = 1/t¯ = 20 volaní/h

Ψ = λ/μ = 50/20 = 2,5

K	Ψ^k	$k!$	$\frac{\Psi^k}{k!} = \frac{p_k}{p_0}$	p_k	kp_k
0	1	1	1	0,0921	0
1	2,5	1	2,5	0,2303	0,2303
2	6,25	2	3,125	0,2878	0,5756
3	15,625	6	2,6042	0,2399	0,7197
4=n	39.0625	24	1,6276	0,1499	0,5996
Σ			10,8568=1/p_0	1	2,125

p0=1/10,8568=0,0921

Pravdepodobnosť odmietnutia: ps t = pn = Ψ^k/n! p_0 = 0,1499

Relatívna kapacita: Kr = 1 - pst = 0,8501

Z diferenciálnych rovníc dostávame maticu:

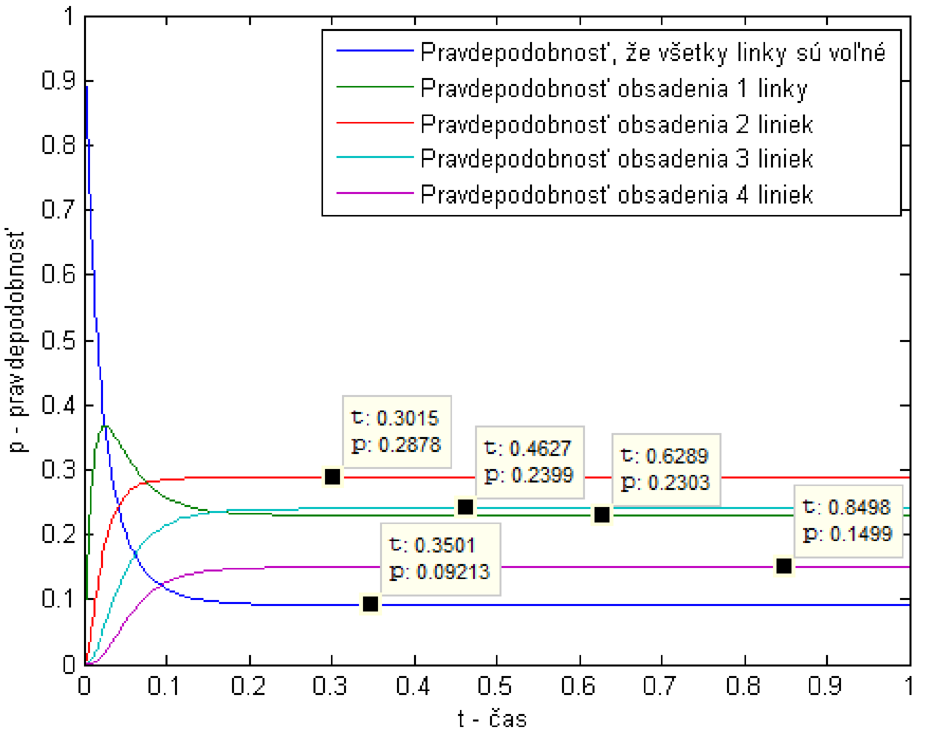
S_0:	$-\lambda$	μ	0	0	0
S_1:	λ	$-\lambda-\mu$	2μ	0	0
S_2:	0	λ	$-\lambda-2\mu$	3μ	0
S_3:	0	0	λ	$-\lambda-3\mu$	μ
S_4:	0	0	0	λ	-4μ

Vytvoríme si funkciu :

```
function [pder] = ustredna4(t,p)

lambda = 50;
mi = 20;

pder = [-lambda*p(1)+mi*p(2);
        lambda*p(1)-mi*p(2)-lambda*p(2)+2*mi*p(3);
        lambda*p(2)-lambda*p(3)-2*mi*p(3)+3*mi*p(4);
        lambda*p(3)-lambda*p(4)-3*mi*p(4)+4*mi*p(5);
        lambda*p(4)-4*mi*p(5)];

return
```

Hlavný program:

```
pp = [1 0 0 0 0];     % počiatočné podmienky
t =  [0 0.5];

[t,pder]=ode45(@ustredna4,t,pp);
plot(t,pder)
legend('Pravdepodobnosť, že všetky linky sú voľné',...
    'Pravdepodobnosť obsadenia 1 linky','Pravdepodobnosť obsadenia 2 liniek',...
    'Pravdepodobnosť obsadenia 3 liniek','Pravdepodobnosť obsadenia 4 liniek')
```


Pravdepodobnosť, že všetky linky sú voľné
Pravdepodobnosť obsadenia 1 linky
Pravdepodobnosť obsadenia 2 liniek
Pravdepodobnosť obsadenia 3 liniek
Pravdepodobnosť obsadenia 4 liniek
t: 0.3015
p: 0.2878
t: 0.4627
p: 0.2399
t: 0.6289
p: 0.2303
t: 0.8498
p: 0.1499
t: 0.3501
p: 0.09213
p - pravdepodobnosť
t - čas
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

T6 – 3. PRÍKLADY NA SAMOTATNÉ RIEŠENIE

1. Na benzínovú čerpaciu stanicu prichádza priemerne 25 vozidiel za hodinu. Stanica má tri čerpacie stojany, z ktorých každý obslúži zákazníka priemerne za 5 minút. Na čerpacej stanici nie je miesto na čakanie. Za predpokladu poissonovského vstupného toku a exponenciálnej doby obsluhy vypočítajte pravdepodobnosť straty zákazníka a relatívnu kapacitu.

T5 – 3. POUŽITÁ LITERATÚRA

HRUBINA, Kamil – JADLOVSKÁ, Anna – HREHOVÁ, Stella : Metódy a úlohy operačnej analýzy riešené s pomocou počítača, Košice TU, 2002, IBSN : 80-88941-19-9