1 Optimization toolbox

Optimalizačný toolbox poskytuje používateľom štandardné algoritmy a algoritmy "veľkého rozsahu" – large scale na riešenie optimalizačných úloh ako sú:

- nepodmienená nelineárna minimalizácia,
- podmienená nelineárna optimalizácia,
- riešenie sústav nelineárnych rovníc,
- kvadratické a lineárne programovanie,
- nelineárne metód najmenších štvorcov a aproximácie kriviek,
- lineárne metódy najmenších štvorcov s väzbami,
- úlohy s riedkymi maticami a štruktúrované rozsiahle problémy.

Toolbox ďalej rozlišuje štyri základne kategórie optimalizačných problémov:

- minimalizácia,
- viac objektová minimalizácia,
- riešenie rovníc,
- metóda najmenších štvorcov.

Minimalizácia (minimizers): Snažíme sa nájsť lokálne minimum funkcie v blízkosti východiskového bodu x_0 . Sem patria problémy neohraničenej optimalizácie, problémy lineárneho programovania, problémy kvadratického programovania a problémy všeobecného nelineárneho programovania.

Viac objektová minimalizácia (multiobjective minimizers): Minimalizujeme buď maximálnej hodnoty množiny funkcií, alebo hľadáme také miesta, kde tieto funkcie nadobúdajú nižšie ako vopred špecifikované hodnoty.

Riešenie rovníc (equation solvers) : Hľadáme riešenie nelineárnej rovnice v tvare $f(x) = 0$, ktoré je v blízkosti východiskového bodu x_0. Riešenie rovníc takéhoto tvaru je považované za ekvivalent hľadania minima.

Metóda najmenších štvorcov (least-squares solvers): Minimalizujeme súčet štvorcov. S týmto problémom sa môžeme stretnúť pri modeloch s dátami. Hľadáme nezáporné riešenia, lineárne ohraničené a obmedzené riešenia.

V tejto kapitole riešim dva vybrané komparatívne metódy jednorozmerného hľadania extrému funkcie metódu rovnomerného delenia intervalu a metódu zlatého rezu.

Optimalizačný toolbox dokáže v spolupráci s ostatnými toolboxmi riešiť rôzne typy úloh.

Tabuľka 1 Využitie optimalizačného toolboxu s ostatnými toolboxmi

Database Toolbox	Výmena dát v relačnej databáze
Financial Toolbox	Modely finančných dát a vytváranie finančnej analýzy
Simulink	Návrh a simulácia v čase spojitých a diskrétnych systémov
Statistic Toolbox	Použitie štatistických algoritmov a pravdepodobnostných modelov.
Symbolic/Extended Symbolic Math Toolbox	Výpočty s využitím symbolickej matematiky.

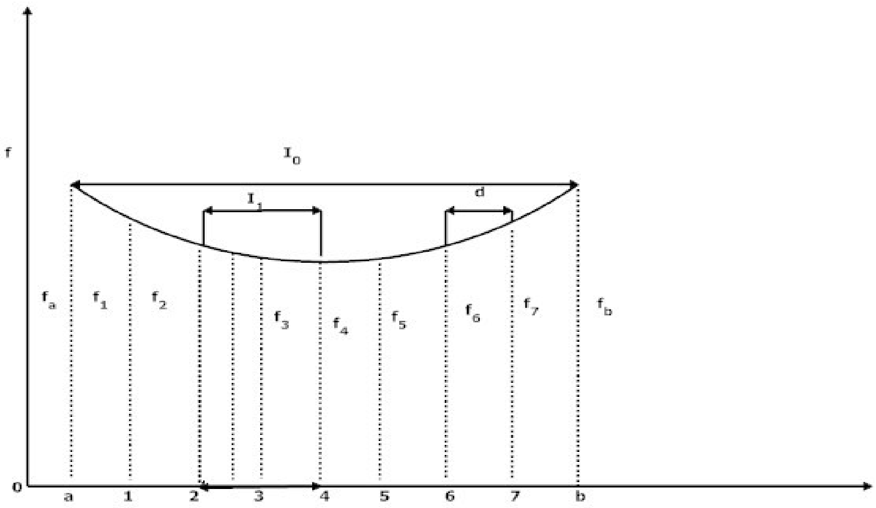
V nasledujúcej tabuľke uvádzam stručný prehľad funkcií optimalizačného toolboxu.

Tabuľka 2 Prehľad funkcií optimalizačného toolboxu

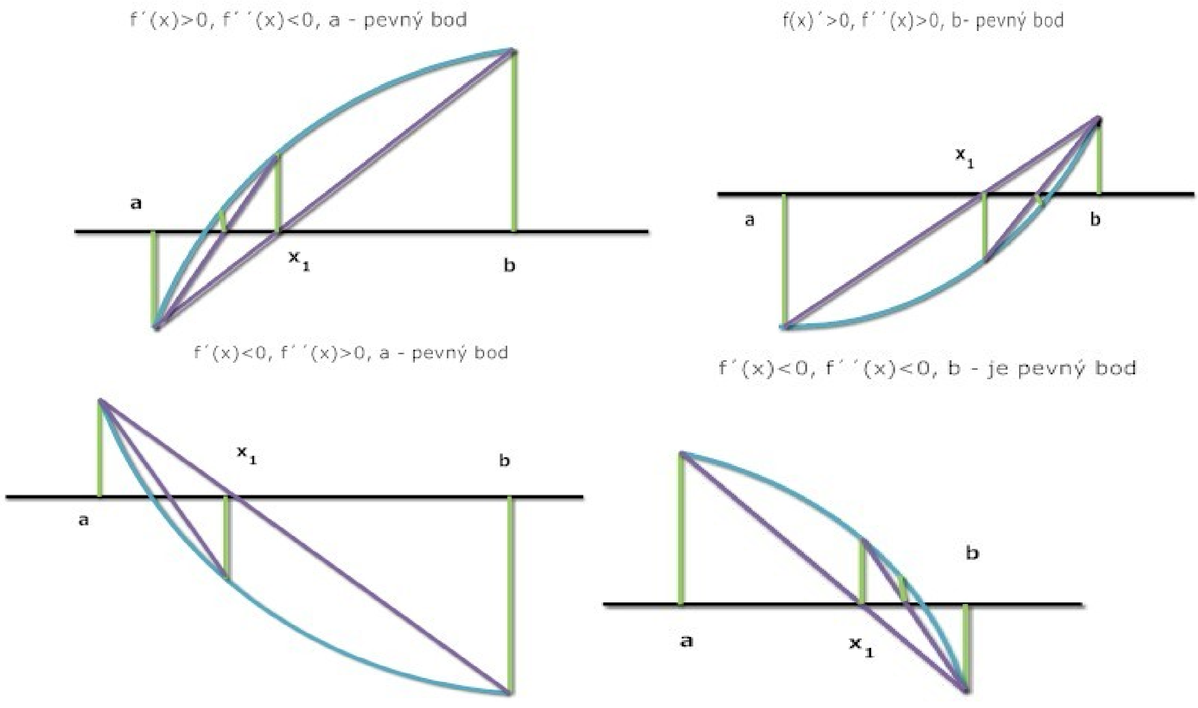
fminbnd	Lokálne minimum funkcie
fmincon	Ohraničená nelineárna minimalizácia
fminimax	Minimax optimization
fminsearch	Lokálne minimum funkcie s viacerými premennými
fseminf	Semi-infinite minimalizácia
linprog	Lineárne programovanie
quadprog	Kvadratické programovanie
fgoalattain	Multiobjective goal attainment

V tejto kapitole riešim dve vybrané komparatívne metódy a jednu metódu typu jedna jednorozmerného hľadania extrému funkcie. Ide o metódu rovnomerného delenia intervalu, metódu regula falsi a metódu zlatého rezu.

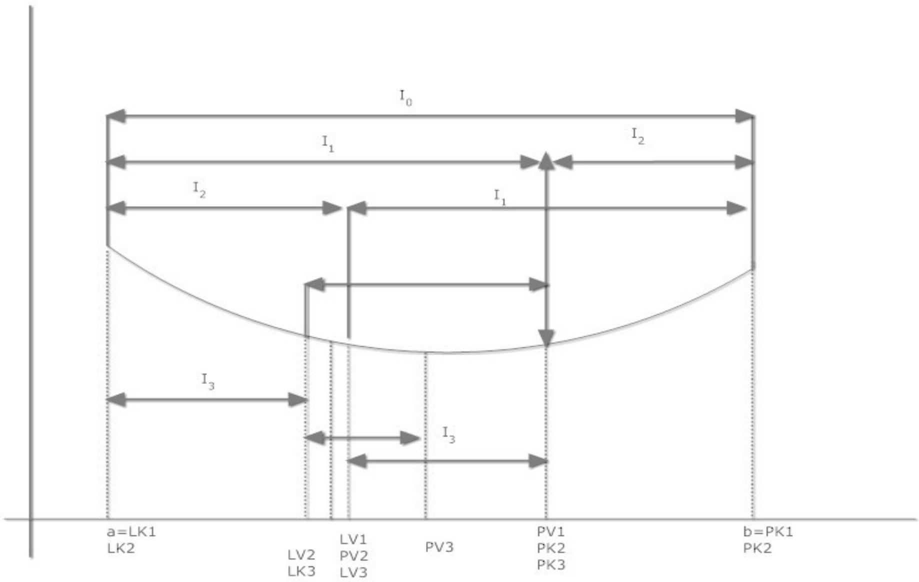
Metóda rovnomerného delenia intervalu predstavuje jednu z najjednoduchších komparatívnych metód jednorozmerného hľadania extrému. Keďže ide o komparatívnu metódu stačí vyhodnotiť funkčné hodnoty kriteriálnej funkcie a z nich vybrať tú najlepšiu s jej susediacimi vzorkami, ktoré predstavujú veľkosť výsledného intervalu.



Metóda regula falsi patrí medzi optimalizačné metódy typu jedna, keďže využíva znalosť prvej derivácie účelovej funkcie, ktorá dokáže výrazne znížiť množstvo výpočtov a tým urýchliť hľadanie extrému. Princíp metódy spočíva v hľadaní nulového bodu prvej derivácie.



Metóda zlatého rezu je jedna z najčastejšie využívaných metód, ktorá sa využíva pri zložitejších algoritmoch viacrozmerných optimalizačných úloh. Na rozdiel od prvej metódy rovnomerného delenia intervalu sa interval I_k rozdelí 2 vzorkami na tri rovnaké časti. Na základe porovnania funkčných hodnôt sa určí nový zúžený interval dĺžky I_{k+1}



1.1 Príklady

Vybrané príklady riešte 3 vybranými metódami analytickým výpočtom, algoritmicky s využitím optimalizačného toolboxu.

Úlohy riešte :

a) metódou rovnomerného delenia intervalu

b) metódou regula falsi

metódou zlatého rezu

1.1.1 Numerické riešenie s využitím Metódy rovnomerného delenia intervalu

Cena vína C rastie v závislosti od času na základe vzťahu $C = 6(2{,}5)^{\sqrt{t}}$, kde t je čas v rokoch. Čistá súčasná hodnota peňazí investovaných na t rokov pri diskontnom faktore r je vyjadrená vzťahom $P(t) = e^{-rt} 6(2{,}5)^{\sqrt{t}}$. Ako dlho by mal obchodník skladovať víno ak chce maximalizovať výnos z investície pri diskontnom faktore $r = 0{,}08$ (8% ročne)?

$$r = 0{,}08 \qquad C = 6(2{,}5)^{\sqrt{t}}$$
$$t = \langle 10{,}40 \rangle \qquad P(t) = e^{-rt} 6(2{,}5)^{\sqrt{t}}$$
$$\varepsilon = 2$$

Máme zúžiť východiskový interval dĺžky I_0 na dĺžku I_1 . Interval zúžime pomocou N vzoriek pričom N musí byť celé číslo a $I_1 \leq 2\varepsilon$, kde ε je požadovaná presnosť určenia extrému.

1. Určíme východiskový interval pre čas:

$I_0 = 40 - 10 = 30$

V tomto intervale určíme polohu minima funkcie (-P(t)) s presnosťou $\varepsilon = 2$. Dĺžka finálneho intervalu I_1 môže byť maximálne $2\varepsilon = 4$.

2. Rozdelíme interval na N rovnakých disjunktných intervalov rovnakej dĺžky.

Počet vzoriek získam zo vzťahu:

$$\boxed{\begin{array}{l} 2\frac{I_0}{\varepsilon} - 1 \leq N \leq 2\frac{I_0}{\varepsilon} \\ 2\frac{30}{4} - 1 \leq N \leq 2\frac{30}{4} \\ 14 \leq N \leq 15 \end{array}}$$

Interval rozdelím na 15 podintervalov.

t	10	12	14	16	18	20	22
-P(t)	-48,877	-54,920	-60,352	-65,165	-69,355	-72,932	-75,909

24	26	28	30	32	34	36	38	40
-78,307	-80,153	-81,476	-82,309	-82,688	-82,649	-82,228	-81,463	-80,39

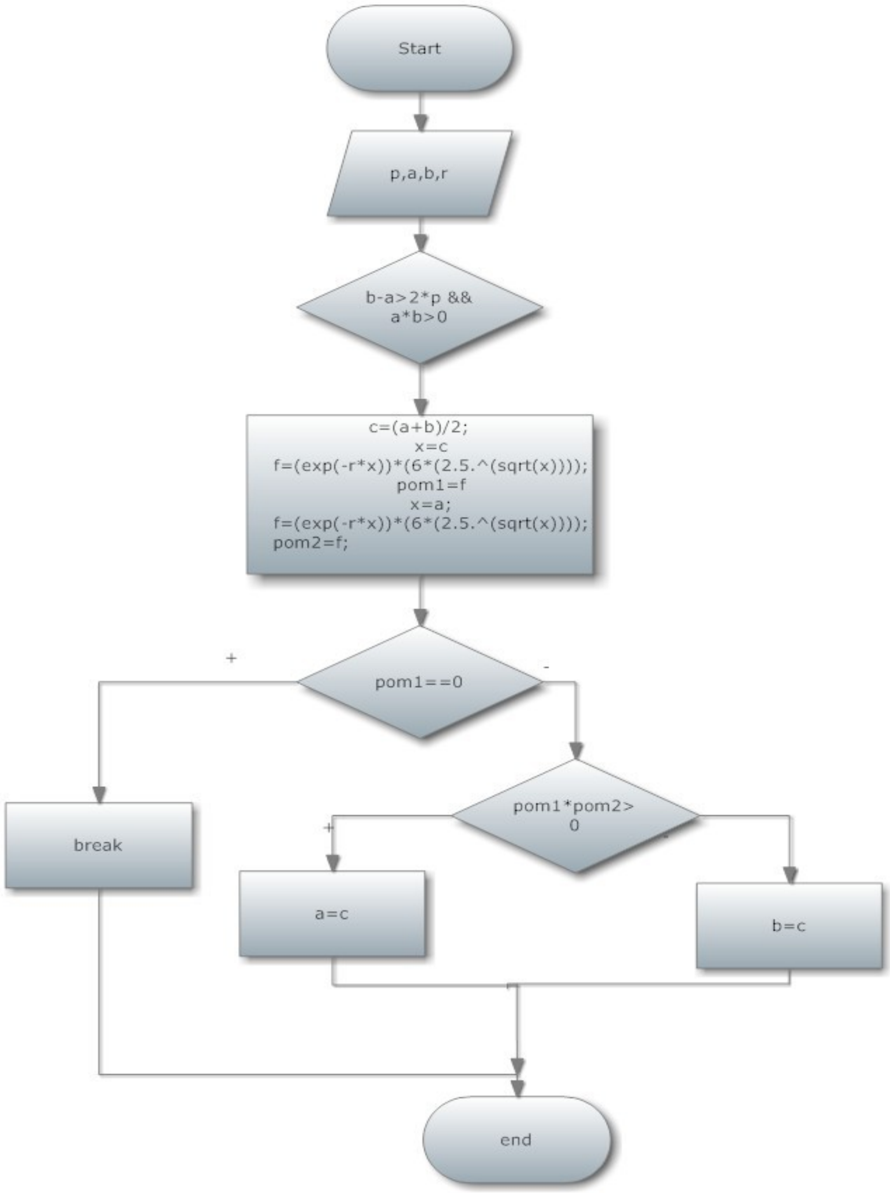
Zo vzoriek vyberieme tú ktorá ma najlepšiu funkčnú hodnotu –P(t), susediace vzorky vymedzujú konečný interval pre čas t. Najlepšia vzorka v tomto prípade je bod 32 s funkčnou hodnotu -82,6887 .

1.1.2 Algoritmické riešenie na baze metódy bisekcie

Vstupné premenné: *a,b*- východiskový interval, p-diskontný faktor

Riadiaca premenná cyklu: *c* -

Výstupné premenné:



Metódu riešte v Matlabe bez riešenia pomocou optimalizačného toolboxu.

1.1.3 Numerické riešenie s využitím metódy regula falsi

Pri tejto metóde sa využíva vzorec

$\boxed{x_n = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} * f(a)}$, ktorý sa ale modifikuje vzhľadom na body intervalu *a,b*.

Ak bod *a* je posuvný bod a bod *b* je pevný tak sa využíva vzorec.

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)} * f(x_n)}$$

Ak bod *a* je pevný bod a bod *b* je posuvný tak sa využíva vzorec.

$$\boxed{x_{n+1} = a - \frac{x_n - a}{f(x_n)-f(a)} * f(a)}$$

Riešte funkciu $x^3 - 12x + 1 = 0 \quad \varepsilon = 0{,}00001$ na intervale $\langle -4;-3 \rangle$.

Určím si prvú a druhú deriváciu funkcie. $\begin{array}{l} f' = 3x^2 - 12 \\ f'' = 6x \end{array}$

Na základe vzťahu $f(x_0) * f''(x_0) \prec 0$ určím pevný a posuvný bod.

$\begin{array}{l} a:(-4) \Rightarrow (-15)*(-24) \succ 0 \\ b:(-3) \Rightarrow (10)*(-18) \prec 0 \end{array}$ čiže bod *a* predstavuje pevný bod a bod *b* posuvný. Teda platí vzorec $x_{n+1} = a - \frac{x_n - a}{f(x_n)-f(a)} * f(a)$ z ktorého po dosadení hodnoty *a* dostávame

$$x_{n+1} = -4 - \frac{x_n + 4}{f(x_n)+15} * (-15)$$

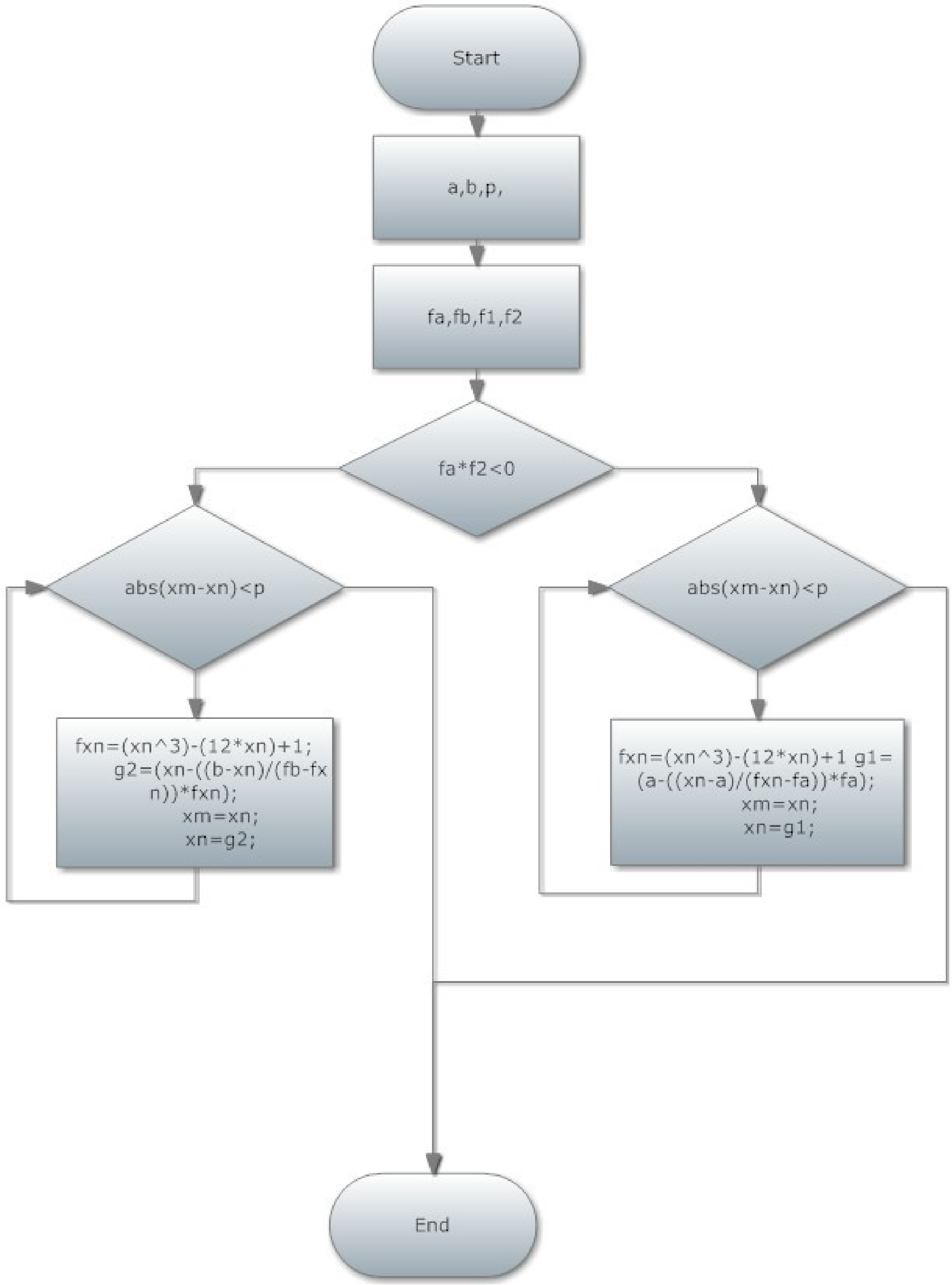
n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	-3	0
1	-3,4	0,4
2	-3,485596	0,08
3	-3,501524	0,01
4	-3,504407	0,002
5	-3,504925	0,0005
6	-3,50501	0,00008

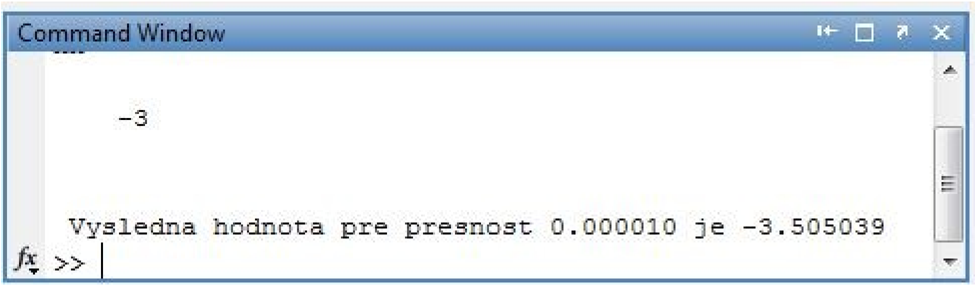
1.1.4 Regula falsi – algoritmické riešenie

Vstupné premenné: a,b,p,fa,fb

Riadiaca premenná cyklu: f_1,f_2-funkcia f_1,f_2

Výstupné premenné: $x,$





1.1.5 Numerické riešenie metódy zlatého rezu

Zavedieme si označenie:

LV- ľavý vnútorný bod príslušného intervalu

PV - pravý vnútorný bod príslušného intervalu

LK - ľavý krajný bod príslušného intervalu

PK – pravý krajný bod príslušného intervalu

Pričom x_{PV} a x_{LV} dostaneme z nasledujúceho vzťahu:

$$\boxed{\begin{aligned} x_{PV} &= x_{LK} + \tau(x_{PK} - x_{LK}) \\ x_{LV} &= x_{PK} - \tau(x_{PK} - x_{LK}) \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} r &= 0{,}08 \\ t &= \langle 10{,}40 \rangle \\ \varepsilon &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} C &= 6(2{,}5)^{\sqrt{t}} \\ P(t) &= e^{-rt}6(2{,}5)^{\sqrt{t}} \end{aligned} \qquad \text{pomer delenia : } \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0{,}618$$

Rozdelíme si východiskový interval $I_0 = 40 - 10 = 30$ dvoma prekrývajúcimi sa intervalmi dĺžky:

$$I_1 = \tau * I_0 = 0{,}618 * 30 = 18{,}54$$

Vypočítame hodnoty vnútorných bodov pričom vonkajšie body majú hodnoty

$$x_{LK} = 10; x_{PK} = 40 : \begin{aligned} x_{LV} &= 40 - 18{,}54 = 21{,}46 \\ x_{PV} &= 10 + 18{,}54 = 28{,}54 \end{aligned}$$

Vyčíslime funkčné hodnoty $f(x_{LK}) = -P(x_{LK}) = -e^{-0{,}08*10}6(2{,}5)^{\sqrt{10}} = -48{,}88$

Nájdeme z vnútorných hodnôt LV a PV vyberieme tú "najlepšiu" teda najmenšiu $x_{PV} = 28{,}54 = -81{,}75$. "Horší" z vnútorných bodov $x_{LV} = 21{,}46 = -75{,}16$ sa zmení na LK a "lepší" vnútorný bod PV sa stáva novým LV .

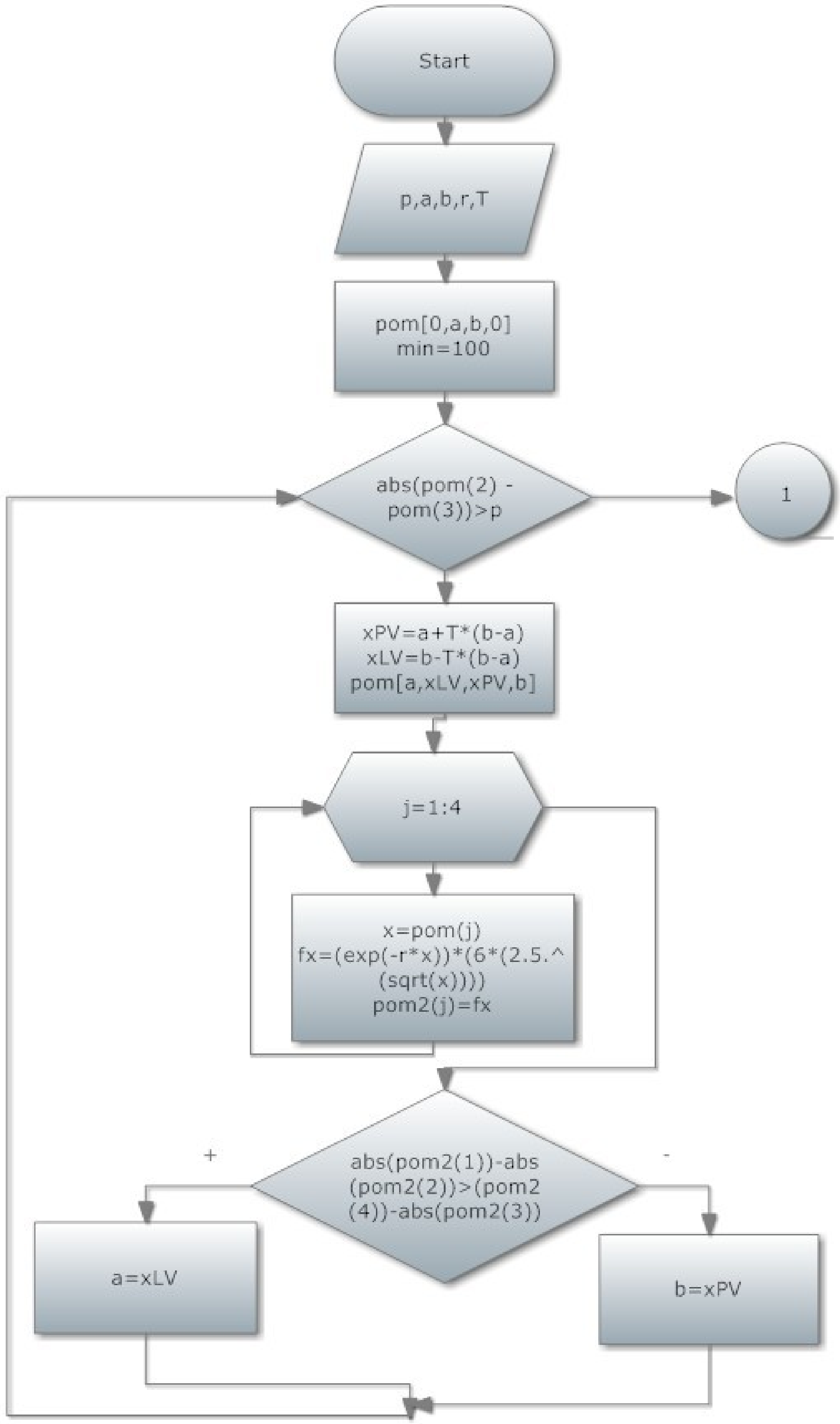
k		LK	LV	PV	PK
1.	x_k $f(x_k)$	10 -48,88	21,46 -75,16	28,54 -81,75	40 -80,39
2.	x_k $f(x_k)$	21,46 -75,16	28,54 -81,75	32,92 -82,72	40 -80,39
3.	x_k $f(x_k)$	28,54 -81,75	32,92 -82,72	35,62 -82,33	40 -80,39
4.	x_k $f(x_k)$	28,54 -81,75	31,24 -82,59	32,92 -82,72	35,62 -82,33
5.	x_k $f(x_k)$	31,24 -82,59	32,92 -82,72	33,95 -82,66	35,62 -82,33

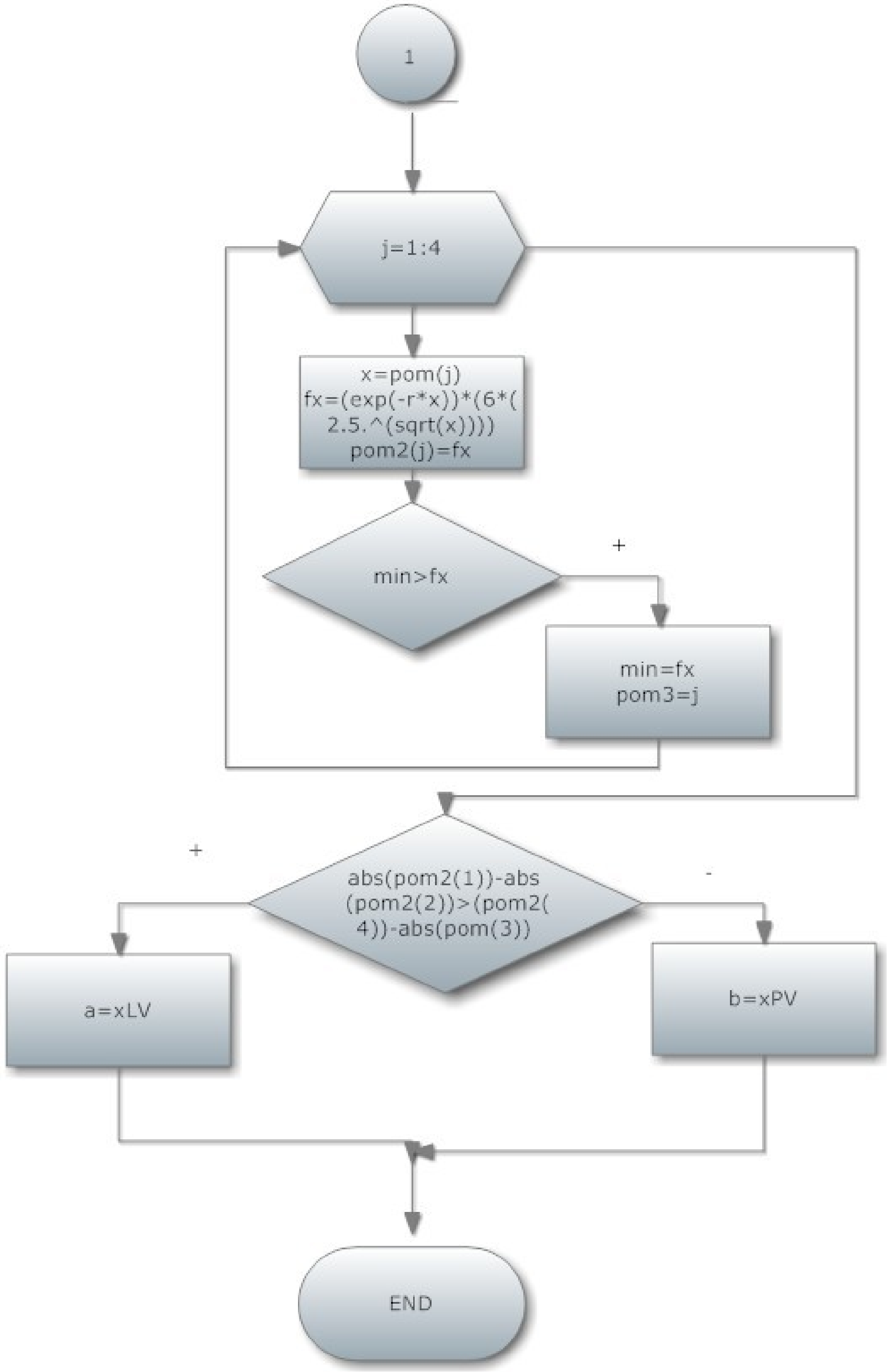
1.1.5.1 Metóda zletého rezu - Algoritmické riešenie

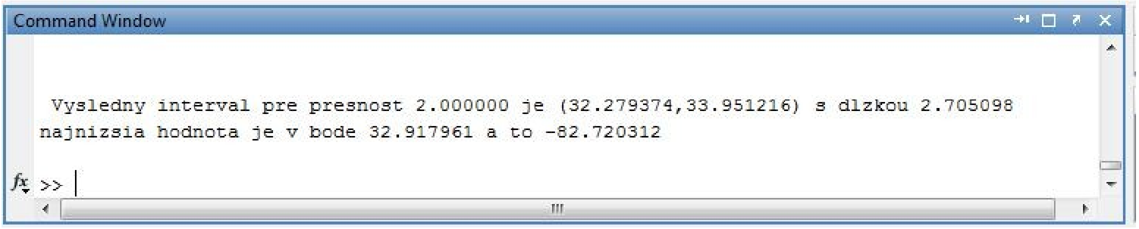
Vstupné premenné: *a,b*- východiskový interval

Riadiaca premenná cyklu: f_1,f_2-funkcia f_1,f_2

Výstupné premenné: *x,P(t)*




1
j=1:4
x=pom(j)
fx=(exp(-r*x))*(6*(
2.5.^(sqrt(x))))
pom2(j)=fx
min>fx
+
min=fx
pom3=j
+
abs(pom2(1))-abs
(pom2(2))>(pom2(
4))-abs(pom(3))
-
a=xLV
b=xPV
END



Metódu zlatého rezu ako aj metódu rovnomerného delenia intervalu nájdeme v optimalizačnom toolboxe pod funkciou *fminbnd*. Táto funkcia je dostupná každému užívateľovi Matlabu, kde umožňuje riešiť problémy lokálneho extrému v rámci vymedzeného pevného intervalu.

Syntax: $\boxed{x = \text{fminbnd}(\text{fun}, x1, x2)}$