

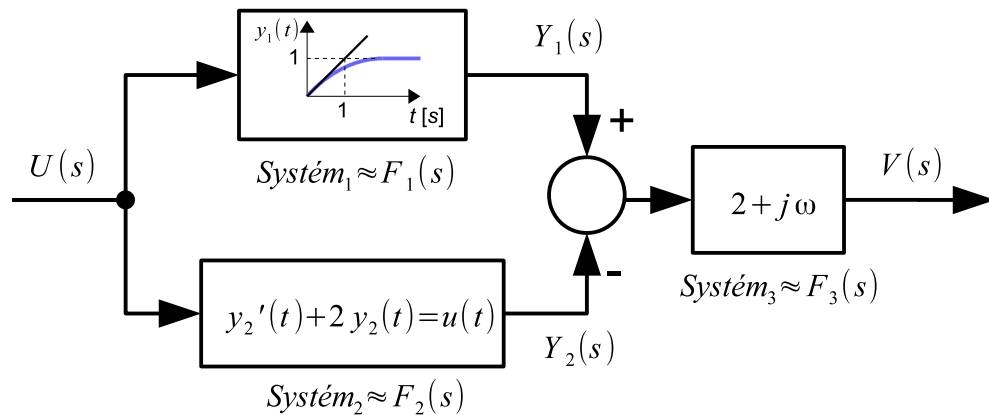
## 6 Bloková algebra pre URO, vyšetovanie frekvenčných charakteristík (Nyquist, Bode)

### 6.1 Ciele cvičenia

- precvičenie typových úloh pre vyšetovanie dynamického systému,
- odvodenie prenosu URO pre P regulátor.

### 6.2 Riešené príklady

**Zadanie:** Je daná bloková schéma sériovo-paralalného obvodu:



Diferenciálna rovnica pre Systém 2 je uvažovaná s nulovými počiatočnými podmienkami. Úlohy:

1. Vyjadrite Laplaceové obrazy prenosov pre systém 1 zadaný prechodovou charakteristikou  $[F_1(s)]$ , pre systém 2 zadaný diferenciálnou rovnicou  $[F_2(s)]$  a systém 3 zadaný pomocou frekvenčného prenosu  $[F_3(s)]$ ,
2. Podľa pravidiel blokovej algebry vyjadrite celkový prenos  $F(s)$  pre uvedený sériovo-paralalný obvod,
3. Vyjadrite frekvenčný prenos sériovo-paralalného obvodu  $F(j\omega)$  v algebraickom tvare,
4. Znázornite Nyquistovú frekvenčnú charakteristiku v komplexnej rovine pre uvedený sériovo-paralalný obvod (vypočítajte limity pre  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow \infty$  a priesečníky s osami)
5. Znázornite amplitúdovú logaritmickú frekvenčnú charakteristiku a fázovú frekvenčnú charakteristiku pre uvedený sériovo-paralalný obvod.

**Riešenie:**

1. Vyjadrenie Laplaceových obrazov prenosov jednotlivých systémov ako  $F_1(s)$ ,  $F_2(s)$ ,  $F_3(s)$ :  
1. systém:

$$F_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{Z_1}{T_1 s + 1} = \frac{1}{s + 1} \quad (6.1)$$

kde zosilnenie  $Z_1 = 1$  a časová konštanta  $T_1 = 1$ .

2. systém:

$$\mathcal{L}\{y'(t) + 2y(t) = u(t)\} \cong sY_2(s) + 2Y_2(s) = U(s) \Rightarrow Y_2(s)(s + 2) = U(s) \quad (6.2)$$

$$F_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{1}{s + 2} \quad \text{resp.} \quad F_2(s) = \frac{Z_2}{T_2 s + 1} = \frac{0.5}{0.5s + 1} \quad (6.3)$$

kde zosilnenie  $Z_2 = 0.5$  a časová konštanta  $T_2 = 0.5$ .

3. systém:

$$F_3(s) = [F(j\omega)]_{j\omega=s} = [2 + j\omega]_{j\omega=s} = 2 + s = 2(1 + 0.5s) \quad (6.4)$$

2. Vyjadrenie celkového prenosu  $F(s)$  pre uvedený sériovo-paralalný obvod:

$$Y_1(s) = F_1(s)U(s) \quad (6.5)$$

$$Y_2(s) = F_2(s)U(s) \quad (6.6)$$

$$V(s) = [Y_1(s) - Y_2(s)]F_3(s) \quad (6.7)$$

$$V(s) = [F_1(s)U(s) - F_2(s)U(s)]F_3(s) \quad (6.8)$$

$$V(s) = [F_1(s) - F_2(s)]F_3(s)U(s) \quad (6.9)$$

$$F(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = [F_1(s) - F_2(s)]F_3(s) \quad (6.10)$$

$$F(s) = \left[ \frac{1}{s+1} - \frac{0.5}{0.5s+1} \right] (2+s) \quad (6.11)$$

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} \quad (6.12)$$

3. Vyjadrenie frekvenčného prenosu sériovo-paralalného obvodu  $F(j\omega)$  v algebraickom tvare,

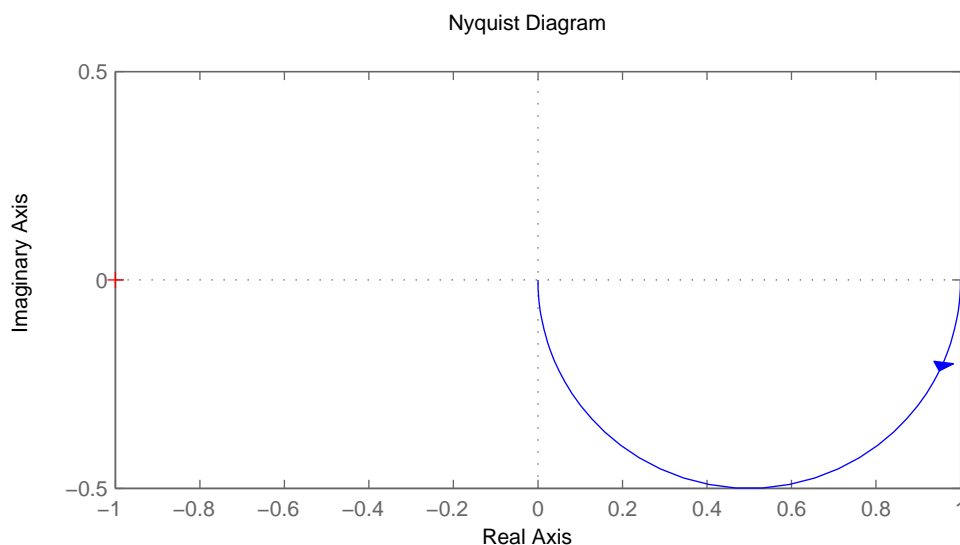
$$F(j\omega) = [F(s)]_{s=j\omega} = \left[ \frac{1}{s+1} \right]_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega+1} \quad (6.13)$$

$$F(j\omega) = Q(\omega) + jR(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} - j\frac{\omega}{1+\omega^2} \quad (6.14)$$

4. Znázornenie Nyquistovej frekvenčnej charakteristiky v komplexnej rovine:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{1+\omega^2} - j\frac{\omega}{1+\omega^2} = \frac{1}{1} - j\frac{0}{1+0} = 1 + 0j \quad (6.15)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\omega^2} - j\frac{\omega}{1+\omega^2} = \frac{1}{1+\infty} - j\frac{\infty}{1+\infty} = 0 + 0j \quad (6.16)$$



5. Znázornenie amplitúdovej logaritmickej frekvenčnej charakteristiky a fázovej frekvenčnej charakteristiky pre uvedený sériovo-paralalný obvod.

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{\Phi(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}e^{-\tan^{-1}\omega} \quad (6.17)$$

$$20 \log |F(j\omega)| = -20 \log \sqrt{1+\omega^2} \quad (6.18)$$

kde bod zlomu  $\omega_k = \frac{1}{T} = 1$ .

$$\omega \ll \omega_k \quad 20 \log 0 = 0 \quad (6.19)$$

$$\omega \gg \omega_k \quad -20 \log \sqrt{1+\omega^2} \quad (6.20)$$

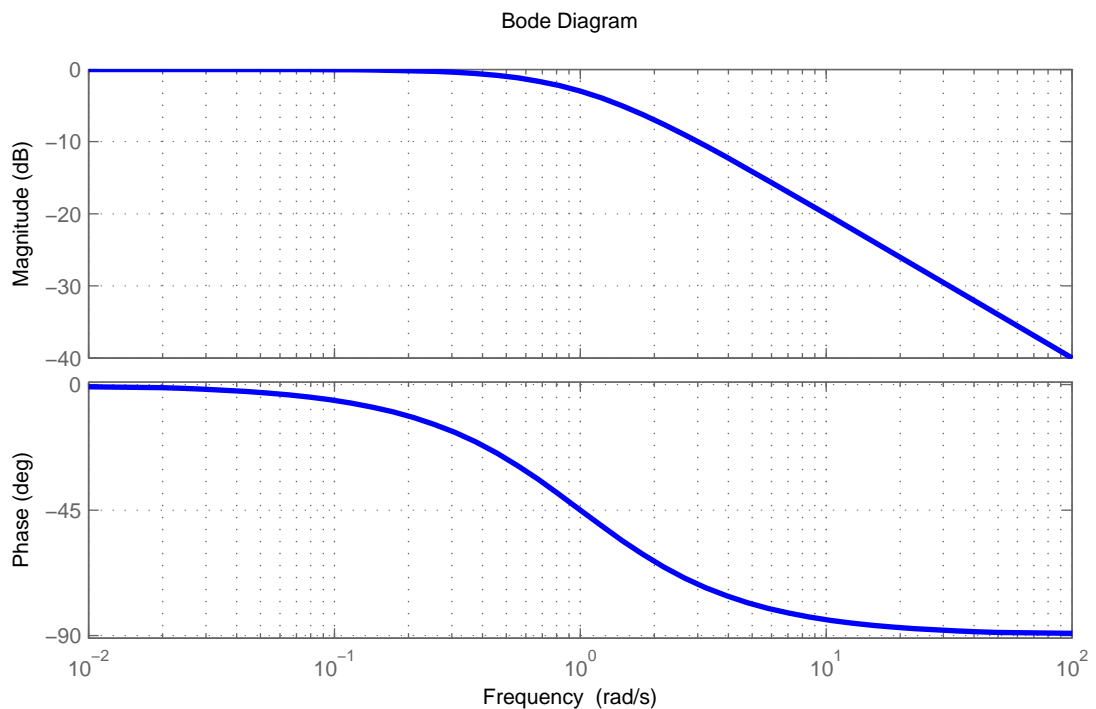
Pre fázovú frekvenčnú charakteristiku platí

$$\Phi(\omega) = -\tan^{-1}\omega \quad (6.21)$$

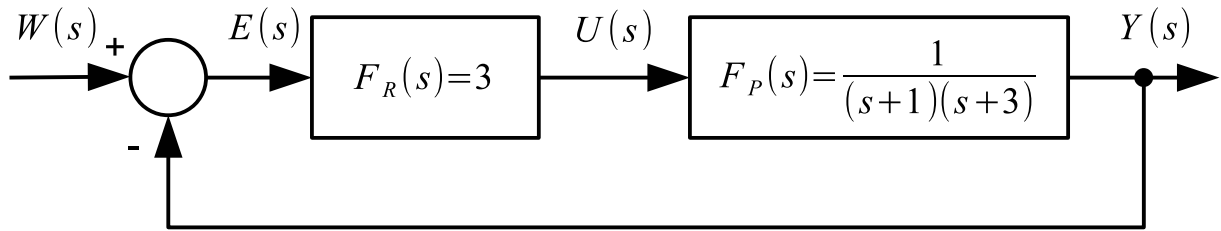
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \Phi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} -\tan^{-1}\omega = -0 \text{ deg} \quad (6.22)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Phi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} -\tan^{-1}\omega = -90 \text{ deg} \quad (6.23)$$

$$\omega = \omega_k \quad \rightarrow \quad \Phi(\omega_k) = -\tan^{-1}\omega_k = -45 \text{ deg} \quad (6.24)$$



**Zadanie:** Je zadaný uzavretý regulačný obvod



Odvoďte prenos regulovanej veličiny vzhľadom na riadiacu veličinu.

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= F_R(s) \cdot F_P(s) \cdot E(s) \quad \text{kde} \quad E(s) = W(s) - Y(s), \\
 Y(s) &= F_R(s) \cdot F_P(s) \cdot [W(s) - Y(s)], \\
 Y(s) &= F_R(s) \cdot F_P(s) \cdot W(s) - F_R(s) \cdot F_P(s) \cdot Y(s), \\
 Y(s) + F_R(s) \cdot F_P(s) \cdot Y(s) &= F_R(s) \cdot F_P(s) \cdot W(s), \\
 Y(s)(1 + F_R(s) \cdot F_P(s)) &= F_R(s) \cdot F_P(s) \cdot W(s), \\
 Y(s) &= \frac{F_o(s)}{1 + F_o(s)} W(s),
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

$$F_{Y/W}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{F_R(s) \cdot F_P(s)}{1 + F_R(s) \cdot F_P(s)} \tag{6.26}$$

$$F_{Y/W}(s) = \frac{3 \cdot \frac{1}{s^2 + 4s + 3}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{s^2 + 4s + 3}} \tag{6.27}$$

$$F_{Y/W}(s) = \frac{3}{s^2 + 4s + 6} \tag{6.28}$$

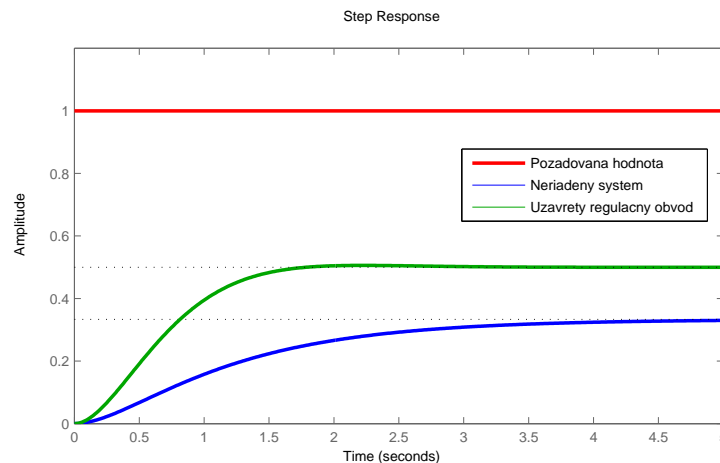
Vyjadrite výstup uzavretého regulačného obvodu  $Y(s)$ :

$$Y(s) = F_{Y/W}(s) \cdot W(s) \tag{6.29}$$

Vypočítajte ustálenú hodnotu regulovanej veličiny  $y(t) \cong Y(s)$  pomocou vety o konečnej hodnote:

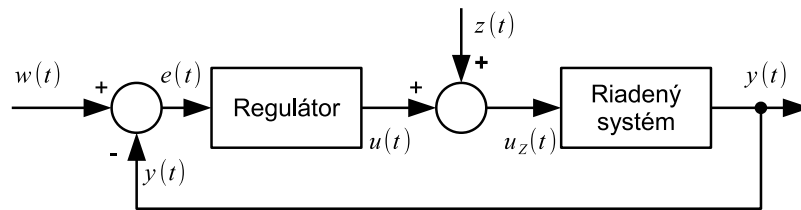
$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \cong \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(F_{Y/W}(s) \cdot W(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s(F_{Y/W}(s) \cdot \frac{1}{s}) \tag{6.30}$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{3}{s^2 + 4s + 6} \cdot \frac{1}{s} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3}{s^2 + 4s + 6} = \frac{3}{6} = 0.5 \tag{6.31}$$

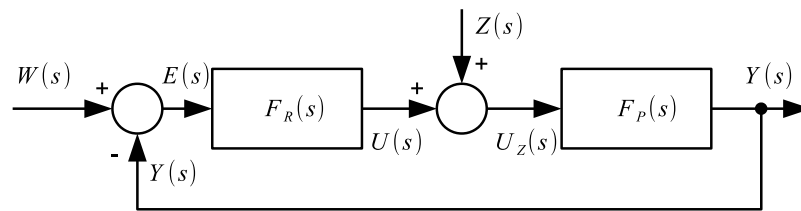


### 6.3 Uzavretý regulačný obvod

V časovej oblasti

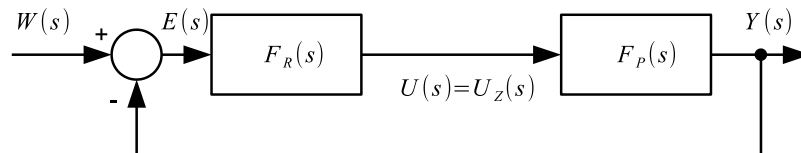


V Laplaceovej oblasti



**Zadanie:** Odvodte prenosovú funkciu riadenia  $F_{Y/W}(s)$  ak je porucha  $z(t) \cong Z(s) = 0$ .

$$F_{Y/W}(s) = ? \quad (6.32)$$



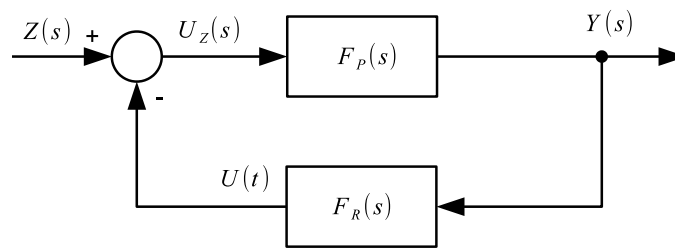
**Riešenie:**

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= F_R(s) \cdot F_P(s) \cdot E(s) \quad \text{kde} \quad E(s) = W(s) - Y(s), \\
 Y(s) &= F_R(s) \cdot F_P(s) \cdot [W(s) - Y(s)], \\
 Y(s) &= F_R(s) \cdot F_P(s) \cdot W(s) - F_R(s) \cdot F_P(s) \cdot Y(s), \\
 Y(s) + F_R(s) \cdot F_P(s) \cdot Y(s) &= F_R(s) \cdot F_P(s) \cdot W(s), \\
 Y(s)(1 + F_R(s) \cdot F_P(s)) &= F_R(s) \cdot F_P(s) \cdot W(s), \\
 Y(s) &= \frac{F_o(s)}{1 + F_o(s)} W(s),
 \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$\boxed{F_{Y/W}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{F_R(s) \cdot F_P(s)}{1 + F_R(s) \cdot F_P(s)}} \quad (6.34)$$

**Zadanie:** Odvodte prenosovú funkciu poruchy  $F_{Y/Z}$  ak je riadiaca veličina  $w(t) \cong W(s) = 0$ .

$$F_{Y/Z}(s) = ? \quad (6.35)$$



**Riešenie:**

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= F_P(s) \cdot U_Z(s) & \text{kde} & \quad U_Z(s) = Z(s) + U(s) \\
 Y(s) &= F_P(s) \cdot [Z(s) + U(s)] & \text{kde} & \quad U(s) = F_R(s) \cdot (-Y(s)) \\
 Y(s) &= F_P(s) \cdot [Z(s) - F_R(s) \cdot Y(s)] \\
 Y(s) &= F_P(s) \cdot Z(s) - F_P(s) \cdot F_R(s) \cdot Y(s)
 \end{aligned}$$

$$Y(s) + F_P(s) \cdot F_R(s) \cdot Y(s) = F_P(s) \cdot Z(s), \quad (6.36)$$

$$Y(s)(1 + F_P(s) \cdot F_R(s)) = F_P(s) \cdot Z(s),$$

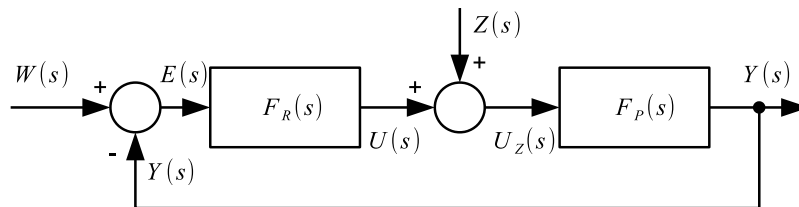
$$Y(s) = \frac{F_P(s)}{1 + F_P(s) \cdot F_R(s)} Z(s),$$

$$Y(s) = \frac{F_P(s)}{1 + F_o(s)} Z(s),$$

$$\boxed{F_{Y/Z}(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{F_P(s)}{1 + F_P(s) \cdot F_R(s)} = \frac{F_P(s)}{1 + F_o(s)}} \quad (6.37)$$

**Zadanie:** Odvoďte prenosovú funkciu uzavretého regulačného obvodu vzhľadom, ak riadiaca veličina  $w(t) \neq 0$  a poruchová veličina  $z(t) \neq 0$ .

$$F_{URO}(s) = F_{Y/W}(s)W(s) + F_{Y/Z}(s)Z(s) \quad (6.38)$$



**Riešenie:**

$$Y(s) = F_P(s) \cdot U_Z(s) \quad \text{kde} \quad U_Z(s) = U(s) + Z(s)$$

$$Y(s) = F_P(s) \cdot [U(s) + Z(s)] \quad \text{kde} \quad U(s) = F_R(s) \cdot E(s)$$

$$Y(s) = F_P(s) \cdot [F_R(s) \cdot E(s) + Z(s)] \quad \text{kde} \quad E(s) = W(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = F_P(s) \cdot \{F_R(s) \cdot [W(s) - Y(s)] + Z(s)\}$$

$$Y(s) = F_P(s) \cdot [F_R(s) \cdot W(s) - F_R(s) \cdot Y(s) + Z(s)]$$

$$Y(s) = F_P(s) \cdot F_R(s) \cdot W(s) - F_P(s) \cdot F_R(s) \cdot Y(s) + F_P(s) \cdot Z(s)$$

$$Y(s) + F_P(s) \cdot F_R(s) \cdot Y(s) = F_P(s) \cdot F_R(s) \cdot W(s) + F_P(s) \cdot Z(s)$$

$$Y(s)[1 + F_P(s) \cdot F_R(s)] = F_P(s) \cdot F_R(s) \cdot W(s) + F_P(s) \cdot Z(s)$$

$$Y(s) = \frac{F_P(s) \cdot F_R(s)}{1 + F_P(s) \cdot F_R(s)} W(s) + \frac{F_P(s)}{1 + F_P(s) \cdot F_R(s)} Z(s)$$

$$Y(s) = \frac{F_o(s)}{1 + F_o(s)} W(s) + \frac{F_P(s)}{1 + F_o(s)} Z(s)$$

(6.39)