

7 Výpočet ustálených hodnôt regulovanej veličiny $y(t)$ a regulačnej odchýlky $e(t)$ s využitím vety o konečnej hodnote v Laplaceovej transformácii

7.1 Ciele cvičenia

- odvodenie prenosovej funkcie vzhľadom na žiadanú hodnotu $F_{Y/W}(s)$
- výpočet ustálenej hodnoty regulovanej veličiny $y(t)$ s využitím vety o konečnej hodnote v Laplaceovej transformácii
- odvodenie prenosovej funkcie vzhľadom na regulačnú odchýlku $F_{Y/E}(s)$
- výpočet ustálenej hodnoty regulačnej odchýlky $e(t)$ s využitím vety o konečnej hodnote v Laplaceovej transformácii

7.2 Riešené príklady

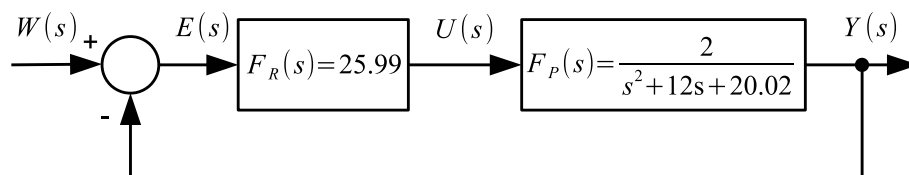
Zadanie: Je zadaný lineárny dynamický systém s prenosovou funkciou v tvare:

$$F_P(s) = \frac{2}{s^2 + 12s + 20.02} \quad (7.1)$$

Pre riadenie lineárneho dynamického systému je navrhnutý P regulátor:

$$F_R(s) = r_0 = 25.99, \quad (7.2)$$

ktorý je zapojený v spätnoväzobnej riadiacej štruktúre (Obr. 2).



Obr. 2: Spätnoväzobná riadiaca štruktúra s P regulátorom

Úlohy:

1. Zostavte prenosovú funkciu uzavretého regulačného obvodu $F_{Y/W}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)}$
2. Vypočítajte ustálenú hodnotu regulovanej veličiny $y(t)$ s využitím vety o konečnej hodnote v Laplaceovej transformácii $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \cong \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$, ak uvažujeme, že riadiaca veličina $w(t) = 1(t)$ (v Laplaceovej transformácii $W(s) = \frac{1}{s}$)
3. Zostavte prenosovú funkciu $F_{E/W}(s) = \frac{E(s)}{W(s)}$
4. Vypočítajte ustálenú hodnotu regulačnej odchýlky $e(t)$ s využitím vety o konečnej hodnote v Laplaceovej transformácii $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \cong \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$, ak uvažujeme, že riadiaca veličina $w(t) = 1(t)$ (v Laplaceovej transformácii $W(s) = \frac{1}{s}$)

Riešenie:

$$1. F_{Y/W}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{F_P(s)F_R(s)}{1 + F_P(s)F_R(s)} = \frac{\frac{2r_0}{s^2+12s+20.02}}{1 + \frac{2r_0}{s^2+12s+20.02}}$$

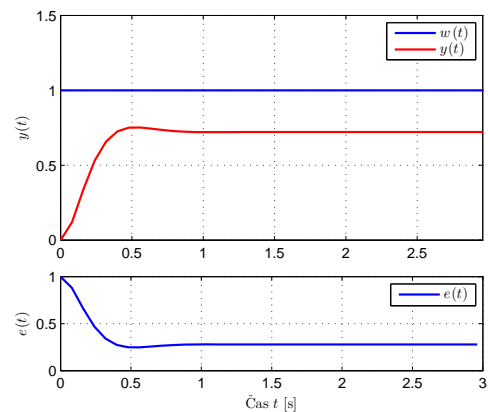
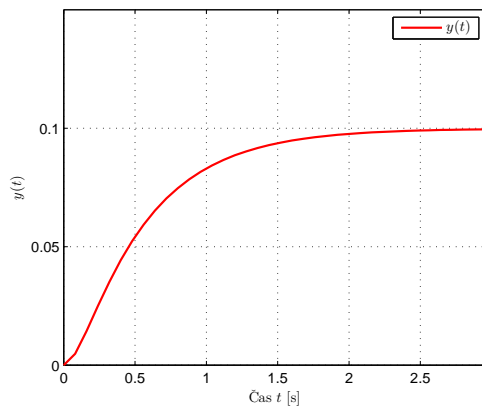
$$2. \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \cong \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(F_{Y/W}(s)W(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s(F_{Y/W}(s)\frac{1}{s}) = \\ = \lim_{s \rightarrow 0} F_{Y/W}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{2r_0}{s^2+12s+20.02}}{1 + \frac{2r_0}{s^2+12s+20.02}} = \frac{2r_0}{20.02 + 2r_0}$$

$$3. F_{E/W}(s) = \frac{E(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + F_P(s)F_R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{2r_0}{s^2+12s+20.02}}$$

$$4. \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \cong \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(F_{E/W}(s)W(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s(F_{E/W}(s)\frac{1}{s}) = \\ = \lim_{s \rightarrow 0} F_{E/W}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{2r_0}{s^2+12s+20.02}} = \frac{20.02}{20.02 + 2r_0}$$

Prechodová charakteristika systému s prenosovou funkciou $F_P(s)$

Časový priebeh regulovanej veličiny $y(t)$ URO vzhľadom na požadovanú hodnotu riadiacej veličiny $w(t) = 1(t)$



Záver: Riadenie systému $F_P(s) = \frac{2}{s^2 + 12s + 20.02}$ s využitím regulátora $F_R(s) = r_0$ zapojeného v spätnoväzobnej riadiacej štruktúre nezabezpečí ustálenie regulovanej veličiny $y(t)$ na požadovanej hodnote riadiacej veličiny $w(t)$. Medzi hodnotou riadiacej veličiny $w(t)$ a regulovanou veličinou $y(t)$ je trvalá regulačná odchýlka $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (w(t) - y(t)) = \frac{20.02}{20.02 + 2r_0}$.

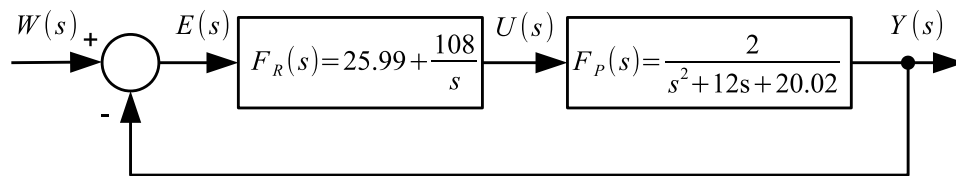
Zadanie: Je zadaný lineárny dynamický systém s prenosovou funkciou v tvare:

$$F_P(s) = \frac{2}{s^2 + 12s + 20.02} \quad (7.3)$$

Pre riadenie lineárneho dynamického systému je navrhnutý PI regulátor:

$$F_R(s) = r_0 + \frac{r-1}{s} = 25.99 + \frac{108}{s}, \quad (7.4)$$

ktorý je zapojený v spätnoväzobnej riadiacej štruktúre (Obr. 3).



Obr. 3: Spätnvázobná riadiaca štruktúra s PI regulátorom

Úlohy:

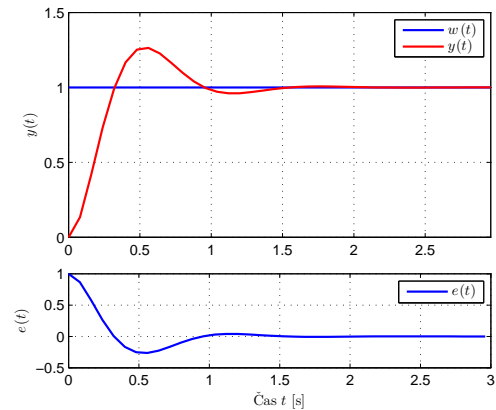
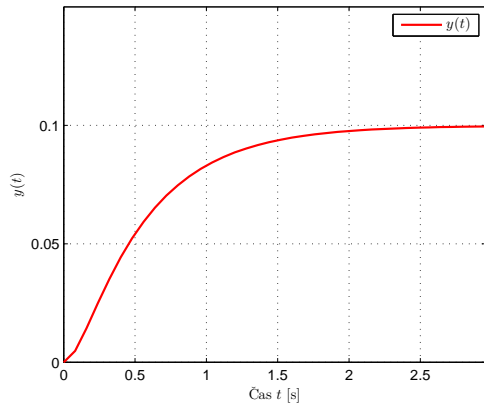
1. Zostavte prenosovú funkciu uzavretého regulačného obvodu $F_{Y/W}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)}$
2. Vypočítajte ustálenú hodnotu regulovanej veličiny $y(t)$ s využitím vety o konečnej hodnote v Laplaceovej transformácii $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \cong \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$, ak uvažujeme, že riadiaca veličina $w(t) = 1(t)$ (v Laplaceovej transformácii $W(s) = \frac{1}{s}$)
3. Zostavte prenosovú funkciu $F_{E/W}(s) = \frac{E(s)}{W(s)}$
4. Vypočítajte ustálenú hodnotu regulačnej odchýlky $e(t)$ s využitím vety o konečnej hodnote v Laplaceovej transformácii $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \cong \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$, ak uvažujeme, že riadiaca veličina $w(t) = 1(t)$ (v Laplaceovej transformácii $W(s) = \frac{1}{s}$)

Riešenie:

1.
$$F_{Y/W}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{F_P(s)F_R(s)}{1 + F_P(s)F_R(s)} = \frac{\frac{2(r_0 + \frac{r-1}{s})}{s^2 + 12s + 20.02}}{1 + \frac{2(r_0 + \frac{r-1}{s})}{s^2 + 12s + 20.02}}$$
2.
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &\cong \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(F_{Y/W}(s)W(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s(F_{Y/W}(s)\frac{1}{s}) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} F_{Y/W}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{2(r_0 + \frac{r-1}{s})}{s^2 + 12s + 20.02}}{1 + \frac{2(r_0 + \frac{r-1}{s})}{s^2 + 12s + 20.02}} = 1 \end{aligned}$$
3.
$$F_{E/W}(s) = \frac{E(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + F_P(s)F_R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{2(r_0 + \frac{r-1}{s})}{s^2 + 12s + 20.02}}$$
4.
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &\cong \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(F_{E/W}(s)W(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s(F_{E/W}(s)\frac{1}{s}) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} F_{E/W}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{2(r_0 + \frac{r-1}{s})}{s^2 + 12s + 20.02}} = 0 \end{aligned}$$

Prechodová charakteristika systému s prenosovou funkciou $F_P(s)$

Časový priebeh regulovanej veličiny $y(t)$ URO vzhľadom na požadovanú hodnotu riadiacej veličiny $w(t) = 1(t)$

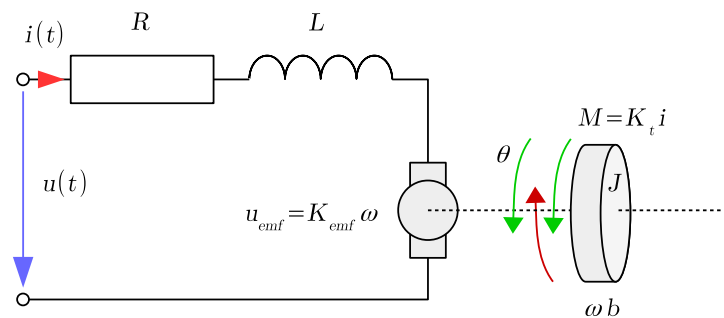


Záver: Riadenie systému $F_P(s) = \frac{2}{s^2 + 12s + 20.02}$ s využitím regulátora $F_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s}$ zapojeného v spätnoväzobnej riadiacej štruktúre zabezpečí ustálenie regulovanej veličiny $y(t)$ na požadovanej hodnote riadiacej veličiny $w(t)$ s nulovou regulačnou odchýlkou $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (w(t) - y(t)) = 0$.

Zadanie: Navrhnete riadiacu štruktúru URO a vypočítajte priebeh regulovanej veličiny $y(t) = \theta(t)$ (regulovanou veličinou $y(t)$ je uhol natočenia rotora $\theta(t)$) DC motora na žiadanú hodnotu riadiacej veličiny $w(t) = 1$. Parametre modelu sú uvedené v tabuľke:

Popis	Ozn.	Hodnota	Jednotky
Odpor	R	2	$[\Omega]$
Indukcia	L	0.4	$[H]$
Moment zotrvačnosti	J	0.02	$[kg.m^2]$
Trenie motora	b	0.2	$[N.m.s]$
Konštanta	K	0.2	$[\frac{Nm}{A}]$

Elektro-mechanickú schému DC motora je možné znázorniť:



Zjednodušený model DC motora vychádza z aplikácie Newtonovho zákona v rovnici (7.5) a Kirchhoffových zákonov (7.6):

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta(t)}{dt} = K_t i(t) \tag{7.5}$$

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = u(t) - K_{emf} \frac{d\theta(t)}{dt} \tag{7.6}$$

- vstupom do systému je napätie kotvy $u(t)$ [V]
- prúd kotvy $i(t)$ je ovplyvňovaný napätím kotvy $u(t)$
- konštantu K_t nazývame konštantou úmernosti a je daná konkrétnym typom motora
- vplyvom rotácie kotvy sa indukuje spätné elektromotorické napätie $u_{emf}(t)$, ktoré je úmerné uhlovej rýchlosti rotora $\omega(t)$ [$rad.s^{-1}$]
- pre uhlovú rýchlosť rotora $\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$, kde $\theta(t)$ [rad] je uhol natočenia rotora
- pre parametre DC motora K_t, K_{emf} platí: $K_t = K_{emf} = K$

Riešenie: Laplaceovou transformáciou rovníc (7.5) a (7.6) získame Laplaceove obrazy $\theta(t) \cong \theta(s), u(t) \cong U(s), i(t) \cong I(s)$ (za predpokladu, že počiatočné podmienky sú $\frac{d\theta(t)}{dt} = 0, \theta(t) = 0, i(t) = 0$):

$$Js^2\theta(s) + bs\theta(s) = KI(s) \quad (7.7)$$

$$LsI(s) + RI(s) = U(s) - Ks\theta(s) \quad (7.8)$$

a po dosadení (7.8) do (7.7) dostaneme:

$$Js^2\theta(s) + bs\theta(s) = K \frac{U(s) - Ks\theta(s)}{R + Ls} \quad (7.9)$$

Prenosovú funkciu DC motora získame úpravou rovnice (7.9). Výstupom systému DC motora a súčasne regulovanou veličinou je uhol natočenia rotora $Y(s) = \theta(s)$ a vstupom systému DC motora je napätie $U(s)$:

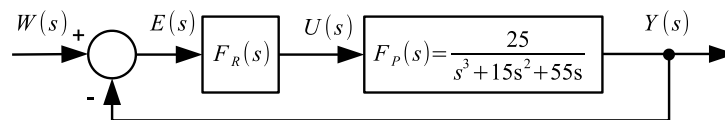
$$F_P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{K}{JLs^3 + (JR + bL)s^2 + (bR + K^2)s} \quad (7.10)$$

Dosadením parametrov systému DC motora uvedených v tabuľke a úpravou rovnice (7.10) dostaneme výslednú prenosovú funkciu:

$$F_P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{25}{s^3 + 15s^2 + 55s} \quad (7.11)$$

Pre riadenie DC motora použijeme P regulátor zapojený v spätnoväzobnej riadiacej štruktúre (Obr. 4) s prenosovou funkciou:

$$F_R(s) = r_0 = 16.5 \quad (7.12)$$



Obr. 4: Spätnoväzobná riadiaca štruktúra s P regulátorom použitá pre riadenie DC motora

Pre výpočet ustálenej hodnoty regulovanej veličiny využijeme vetu o konečnej hodnote v Laplaceovej transformácii $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \cong \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$ vzhľadom na požadovanú hodnotu riadiacej veličiny $W(s) = \frac{1}{s}$ (pozn. $W(s) = \frac{1}{s}$ je získaná Laplaceovou transformáciou $w(t) = 1(t)$) určíme tvar prenosovej funkcie $F_{Y/W}(s)$:

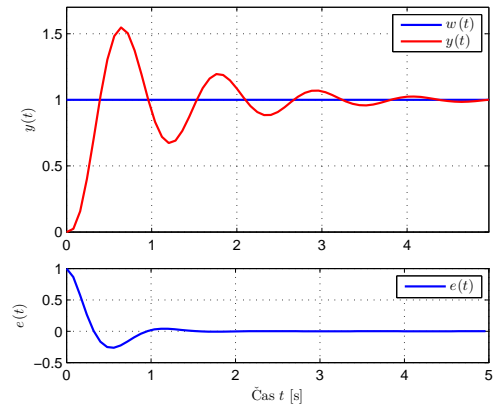
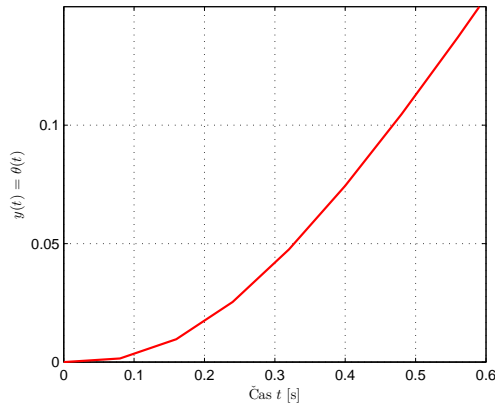
$$F_{Y/W}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{F_P(s)F_R(s)}{1 + F_P(s)F_R(s)} = \frac{\frac{25r_0}{s^3 + 15s^2 + 55s}}{1 + \frac{25r_0}{s^3 + 15s^2 + 55s}} = \frac{25r_0}{s^3 + 15s^2 + 55s + 25r_0} \quad (7.13)$$

Ustálenú hodnotu regulovanej veličiny $y(t)$ vypočítame pomocou vety o konečnej hodnote v Laplaceovej transformácii:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &\cong \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sF_{W/Y}(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} F_{W/Y}(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{25r_0}{s^3 + 15s^2 + 55s + 25r_0} = 1 \end{aligned} \quad (7.14)$$

Prechodová charakteristika systému DC motora opísaného prenosovou funkciou (7.11)

Časový priebeh regulovanej veličiny $y(t)$ URO vzhľadom na požadovanú hodnotu riadiacej veličiny $w(t) = 1(t)$



Záver: Riadenie systému DC motora opísaného prenosovou funkciou (7.11) s použitím P regulátora $F_R(s) = r_0$ zapojeného v spätnoväzobnej riadiacej štruktúre zabezpečí ustálenie regulovanej veličiny $y(t)$ na požadovanej hodnote riadiacej veličiny $w(t)$ s nulovou regulačnou odchýlkou $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (w(t) - y(t)) = 0$.

Póly prenosovej funkcie systému DC motora (7.11) sú $s_1 = 0$, $s_2 = -8.618$, $s_3 = -6.382$. Pól $s_1 = 0$ je nulovým pólom a zapríčiňuje integračný charakter systému DC motora. Pre dosiahnutie nulovej regulačnej odchýlky DC motora v spätnoväzobnom riadiacom obvode postačuje použiť P regulátor s prenosovou funkciou $F_R(s) = r_0$.